Univerza v Mariboru

Fakulteta za logistiko

Tomaž Kramberger in Simona Šinko

# *OPTIMIZACIJSKE METODE V LOGISTIKI*: Osnovni problemi linearnega programiranja

Celje, 2022

Avtorja: prof. dr.Tomaž Kramberger in asist. Simona Šinko, mag. inž. log.
Recenzenta: zasl. prof. ddr. Janez Usenik in doc. dr. Tea Vizinger

Jezikovni pregled: asist. dr. Vesna Mia Ipavec, univ. dipl. etn. in kult. ant.

**OPTIMIZACIJSKE METODE V LOGISTIKI: Osnovni problemi linearnega programiranja**
/Elektronska izdaja/

URL (pdf): https://estudij.um.si/ (dostopno z geslom)
Prva elektronska izdaja, 2021

| | |
|---|---|
| *Izdal* | Katedra za kvantitativno modeliranje v logistiki FL UM |
| *Založila* | Fakulteta za logistiko Univerze v Mariboru, Celje |

Prva izdaja, 2022

# KAZALO

# KAZALO SLIK

# BESEDA AVTORJEV

V knjigi, ki je pred vami, boste spoznali osnove optimizacije in linerarnega programiranja. Knjiga vam bo služila kot gradivo, s katerim se boste naučili sestaviti linearne programe nekaterih osnovnih problemov kot so:

- proizvodni problem;
- problem mešanja;
- celoštevilsko linearno programiranje;
- transportni problem.

Vsako poglavje v knjigi podaja najprej teoretične osnove obravnavanih problemov in pojasnjuje kako za določeni tip problema zapišemo linearni program. Reševanje linearnih programov je v nadaljevanju predstavljeno z grafično metodo, z uporabo programa LINGO, ki je namenjen reševanju različnih optimizacijskih problemov ter z uporabo programa Excel kot orodja, ki omogoča celovito obravnavo podatkov, tudi reševanje linearnih programov.

Vsa poglavja so opremljena s konkretnimi primeri, ki jih lahko apliciramo v realno okolje. Pri problemih v realnem svetu seveda nastopa mnogo več spremenljivk, kakor v problemih, ki jih predstavljamo v knjigi. Vendar avtorja meniva, da so problemi v knjigi predstavljeni na način, da lahko bralec spozna, razume ter zna uporabiti optimizacijo z linearnimi programi v katerem koli problemu, s katerim se sreča, neodvisno od kompleksnosti problema.

Knjiga ima svoje nadaljevanje: Optimizacijske metode v logistiki: Upravljanje s pretoki in odločanje, ki pa obravnava bolj kompleksne probleme, ki v osnovi niso problemi linearnega programiranja, jih pa lahko rešujemo tudi z linearnim programiranjem. Bralca, ki tovrstne tematike zanimajo, vabiva, da poseže tudi po njej.

Ob izzidu knjige bi se zahvalila zasl. prof. ddr. Janezu Useniku ter doc. dr. Tei Vizinger, ki sta s svojimi recenzijami ter vsemi nasveti pripomogla, da je knjiga Osnovni problemi linernega programiranja zares celovita in razumljiva.

Zahvaljujeva se tudi asist. dr. Vesni Mii Ipavec, univ. dipl. etn. in kult. ant., ki je pripomogla k temu, da je knjiga berljiva in da v njej ni velikih pravopisnih napak.

Celje, januar 2022 Tomaž Kramberger in Simona Šinko

# BESEDA RECENZENTOV

Knjiga Tomaža Krambergerja in Simone Šinko *Optimizacijske metode v logistiki: Osnovni problemi linernega programiranja* je sicer, kot pravita avtorja, napisana za dodiplomske in podiplomske študente Fakultete za logistiko Univerze v Mariboru, vendar jo glede na svojo širino in poglobljen sistemski pristop lahko koristno uporabljajo tudi študenti drugih fakultet, pa tudi vsi, ki jih optimizacijske metode zanimajo in jih želijo tudi (in morda predvsem) uspešno uporabljati v praksi. Današnja računalniška oprema namreč omogoča raznovrstno uporabo.

Knjiga je zastavljena ambiciozno, kar je seveda edino pravilno, zato ji vse to daje poseben poudarek pri študiju operacijskih raziskav. V tem konkretnem primeru gre za še vedno zelo aktualne probleme linearnega optimiranja z več (pod)variantami v teoretičnih in praktičnih primerih.

Avtorja sta knjigo razdelila na osem poglavij, ki si sledijo v kontinuiranem zaporedju, tako da pozoren bralec z lahkoto usvoji celotno (kar precej) zahtevno materijo.

Še posebej bi izpostavil v uvodu opisan razvoj operacijskih raziskav, ki sega od tretjega stoletja našega štetja vse do današnjih dni. Zagotovo velja: vedno je zgodovinski prikaz razvoja katerekoli znanstvene discipline temelj njenega razumevanja. Operacijske raziskave, ki so v modernem pristopu pravzaprav relativno mlada veda, stara približno osemdeset let, to trditev še prav posebej potrjujejo.

V prvem poglavju z naslovom linearna optimizacija bralec spozna in usvoji pojem matematičnega optimiranja in koncept linearnega programiranja. Avtorja ne pozabita na izjemno pomembno fazo analize in sprejemanja teoretične optimalne rešitve, opozorita tudi na pomen povratnih informacij in nadzora.

Drugo poglavje seznani bralca z osnovami linearne algebre, ki so zahtevano matematično orodje v teoriji linearnega programiranja. Avtorja definirata matrike in računanje z njimi ter jih uvedeta v sisteme linearnih enačb/neenačb. Vpeljeta še pomemben pojem konveksne množice, ki je temeljnega pomena za iskanje rešitev linearnega programa.

V tretjem poglavju je opisan splošni problem linearnega programiranja; uvedeni so vsi pojmi, s katerimi se tu srečujemo. Avtorja opozorita na nekaj možnih uporab v logistiki: proizvodni problem, prehrambeni problem, investicijski problem, problem nahrbtnika, problem trezorja, lokacijski problem in seveda tudi transportni problem. Ta področja natančno (teoretično in praktično) opišeta, rešita in analizirata v nadaljnjih poglavjih.

Proizvodni problem, ki je morda najbolj razširjen in uporabljen v praksi, je vsebina četrtega poglavja. Najprej spoznamo vsebino, pogoje in vprašanja v seriji možnosti, ki jih imenujemo proizvodni problem, potem pa še samo reševanje takšnih situacij, analizo dobljene (teoretične) rešitve in razne možnosti dodatnih izboljšav. Bralec bo v tem poglavju našel tako grafično kot analitično metodo reševanja, spoznal pa bo tudi pojem dualnega linearnega programa, ki je zanimiv (in koristen) za globje spoznavanje in utrjevanja zastavljenega problema. Teorija simpleksov je kot najpomembnejše matematično reševanje linearnih programov razložena jasno in razumljivo. Avtorja kot pomoč pri reševanje uvedeta/uporabita tudi razširjen računalniški program LINGO, opišeta pa tudi možnost reševanja linearnega programa z računalniškim orodjem Excel.

Peto poglavje obravnava problem mešanja, ki ga včasih poimenujemo tudi prehrambeni problem. Prikazano je grafično reševanje primarnega in dualnega programa, pa tudi reševanje obeh možnosti z računalniškima orodjema LINGO in Excel. Posebna pozornost je namenjena postoptimalni analizi občutljivosti s preigravanjem možnosti spreminjanja vseh elementov linearnega programa.

V šestem poglavju avtorja spoznata bralca s celoštevilskim linearnim programiranjem. Poudarila sta investicijski problem, problem nahrbtnika, problem trezorja in problem lokacije. Gre za zanimive in praktično uporabne situacije, kjer so možne rešitve linearnega programa (in seveda optimalna) lahko le nenegativna cela števila.

Sedmo poglavje se loteva reševanja situacij, ki jih imenujemo s skupnim pojmom transportni problem. Za strokovnjake logistike je to področje še posebej pomembno. V tem poglavju spoznamo sam koncept transportnega problema, pa tudi vse različne možnosti neravnovesja, do katerih lahko pride zaradi razlik pri resursih izvorov in ponorov ali drugače rečeno: razlik med ponudbo in povpraševanjem. Tudi tu so primeri rešeni bodisi grafično za le dve spremenljivki, bodisi z računalnikom z uporabo programov LINGO in Excel.

Osmo poglavje uvaja bralca v računalniški program LINGO, ki ga, kot razberemo iz celotne knjige, lahko uspešno uporabimo v vseh problemih linearnega programiranja.

Ob koncu je dodan tudi slovensko-angleški slovarček pojmov, ki jih avtorja uporabljata v knjigi. In prav na koncu še seznam uporabljene literature, ki bralca lahko pokliče še k širšemu spoznavanju linearnega programiranja.

V povzetku lahko povemo, da je knjiga Tomaža Krambergerja in Simone Šinko *Optimizacijske metode v logistiki: Osnovni problemi linernega programiranja* zanimiva, prijetno čitljiva, strokovno korektna in lepo grafično opremljena. Poseben draž pa ji dajejo številni praktični primeri, ki bralca prepričajo, da gre za zares uporabno orodje v postopku odločanja. Pohvaliti gre tudi poudarjeni uporabi računalniških orodij, saj lahko le na ta način uspešno rešujemo praktične probleme v praksi.

Novo mesto, marec 2022 prof. ddr. Janez Usenik

Knjiga Tomaža Krambergerja in Simone Šinko *Optimizacijske metode v logistiki: Osnovni problemi linearnega programiranja* v sklopu osmih poglavij zanimivo in poglobljeno predstavi področje operacijskih raziskav.

Primerna je tako za bralca, ki se prvič sreča s področjem operacijskih raziskav, kot za zahtevnejšega uporabnika, ki želi dano področje aplicirati v praksi. Knjiga najprej predstavi zgodovinski razvoj operacijskih raziskav, ter matematična izhodišča za razumevanje nadalje uporabljenih pojmov iz linearne algebre, linearne optimizacije in linearnega programiranja. Od tretjega poglavja naprej po vrsti sledi predstavitev nekaj tipičnih problemov linearnega programiranja, od proizvodnega problema, problema mešanja, celoštevilčnega linearnega programiranja, ter nenazadnje tudi transportnega problema. Vse probleme avtorja podrobno, tako teoretično kot praktično opišeta, ter njihove možne aplikacije predstavita tako v računalniškem orodju Excel, kot v orodju LINGO, ki je last podjetja LINDO systems inc.

Knjiga tako ni primerna samo za študente dodiplomskih in podiplomskega programa na Fakulteti za logistiko Univerze v Mariboru, temveč bi jo lahko uporabljali tudi študentje podobnih smeri, kot tudi vsa ostala zainteresirana javnost. Kot že rečeno je knjiga napisana zanimivo, razumljivo, je primerno grafično podprta in tako lahko vsakega potencialnega bralca prepriča, da so operacijske raziskave lahko zelo primerne in uporabne v širokem spektru odločitvenih problemov.

Maribor, april 2022 doc. dr. Tea Vizinger

# SEZNAM OKRAJŠAV

| | |
|---|---|
| LP | Linearno programiranje |
| OR | Operacijske raziskave |

# UVOD

Kaj je optimizacija? V matematiki se izraz optimizacija ali matematično programiranje nanaša na iskanje minimuma ali maksimuma dane realne funkcije na dovoljeni množici točk. Če malo poenostavimo in razširimo pojem optimizacije še na ostala področja, optimizacija pomeni izbiro najboljše možnosti med vsemi mogočimi alternativami. Tako hitro postane jasno, zakaj se beseda optimizacija tolikokrat pojavi, ko govorimo o sodobnem managementu, tudi logističnem.

Sodobna znanost managementa se ukvarja z razvojem in uporabo konceptov za reševanje različnih managerskih problemov, kot tudi z oblikovanjem in razvojem novih, boljših organizacijskih modelov podjetij ter drugih organizacij. Pri tem pa uporablja sistematične in znanstveno utemeljene računske metode. Z metodami optimizacije v managementu se ukvarja veda, ki jo imenujemo operacijske raziskave[1] (v nadaljevanju: OR). OR se ne uporabljajo samo na področju managementa, temveč je njihova uporaba dosti širša, npr. v ekonomski znanosti, upravljanju poslovnih in organizacijskih sistemov ter tudi v logistiki. Modeli in metode, uporabljene v OR posegajo na področja statistike, matematične optimizacije, teorije verjetnosti, teorije čakalnih vrst, teorije iger, teorije grafov, teorije odločanja, matematičnega modeliranja in simulacij.

Gradivo, ki je pred vami, se osredotoča le na področje linearnega programiranja, ki je prav tako del OR. Avtorja pa želiva na začetku podati kratek zgodovinski pregled razvoja OR.

[1] operational research ali operations research

## Razvoj operacijskih raziskav

Poimenovanje OR se je zgodovinsko gledano pojavilo zelo pozno, vendar segajo temelji optimizacije in operacijskih raziskav daleč v zgodovino. Poglejmo si nekaj letnic in dejstev, ki so pomembno vplivale na razvoj OR in linearnega programiranja.

### 3. stoletje p. n. š.

V zgodovini so učenjaki in vojska pogostokrat tesno sodelovali. Še posebej, kadar so imeli skupne cilje: poiskati pravo odločitev, ki bo prinesla zmago v odločilni bitki. Mnogi zgodovinarji menijo, da je do takšnega sodelovanja prvič prišlo v 3. stoletju pred našim štetjem v času 2. punske vojne, ko je slavni Arhimed pomagal obraniti sicilijansko mesto Sirakuza pred rimskim obleganjem. V tistem času naj bi iznašel tudi katapult in ostala, za tiste čase fantastična orožja. Pripisujejo mu tudi, da je rimsko floto zažgal s pomočjo zrcal, ki so sončne žarke skoncentrirala na eni točki in povzročila, da se je vnel les na ladjah rimske vojske.

### Leto 1503

Leonardo Da Vinci je kot vojaški inženir sodeloval v vojni s takratno Piso. Izboljšal je izdelavo topov, katapultov, topovskih krogel ipd. V tistem času je izdelal tudi idejno osnovo za tank ter orožje, ki je bilo podobno današnjemu tanku tudi izdelal.

### 17. in 18. stoletje

Z matematičnega vidika sta bila 17. in 18. stoletje pomembna prelomnica za zametke linearnega programiranja. Ključno vlogo pri razvoju linearnega programiranja je odigral francoski matematik Jean-Baptiste Joseph Fourier, ki je postavil osnove linearnega programiranja. Prvi je namreč formuliral problem linearnega programiranja kot problem reševanja sistema linearnih neenačb in objavil metodo za reševanje.

Ostali znanstveniki tistega časa kot so Newton, Leibniz, Bernoulli in Lagrange so raziskovali in postavljali temelje iskanja ekstremov funkcij. V poznih letih 18. stoletja je Gaspard Monge postavil temelje grafične metode zahvaljujoč razvoju opisne geometrije. V njegovem delu iz leta 1781 najdemo najzgodnejše opise transportnih problemov.

**Leto 1915**

Veliki izumitelj Thomas Edison je svoje znanje na področju operacijskih raziskav izkoristil za razvoj vojaške tehnologije med 1. svetovno vojno. Ena od njegovih velikih idej je bila izdelava protitorpedne obrambe za ladje. Na osnovi njegovih spoznanj so kasneje izdelali sonar.

**Leto 1916**

Friderick William Lanchester je pred začetkom prve svetovne vojne začel analizirati zračno bojevanje. S pomočjo sistema diferencialnih enačb je objavil delo, kjer opisuje metodologijo, imenovano Lanchestrov zakon o moči. Zakoni so dokazovali, da je sposobnost, takratnega sodobnega orožja, da deluje na dolgi doseg, močno spremenila naravo bojevanja.

OR tedaj še niso bile priznane kot znanstvena disciplina. Še 70 let nazaj je bilo mogoče študirati matematiko, fiziko in tehniko na skoraj vsaki univerzi, medtem ko študija OR ni bilo. Še več, izraz OR sploh še ni obstajal. Pojavljati se je začel v poznih tridesetih letih prejšnjega stoletja v Veliki Britaniji kot posledica priprav na bližajočo se 2. svetovno vojno.

**Leto 1936**

V začetku leta 1936 je Britansko ministrstvo za letalstvo ustanovilo Bawdsey Research Station na vzhodni obali Britanije blizu mesta Felixstowe v pokrajini Suffolk. Bawdsey Research Station sta vojska in letalstvo uporabljali za raziskovanje in eksperimentiranje na področju ravno odkritih radarjev. Zgradili so eksperimentalni radar z dosegom 100 milj (okoli 150 km), kar je bil za tiste čase velik dosežek. Vendar pa podatkov, ki so jih pridobili z radarjem, še niso bili sposobni vključiti v zračno obrambo Britanije. Šele v začetku istega leta je bila ustanovljena Air Force (RAF) Fighter Command, ki je kasneje skrbela za zračno obrambo Britanije. Kmalu po ustanovitvi je postalo jasno, da bo vpeljava lovskih prestreznikov Hurricane in Spitfire iter uporaba radarjev odkrila popolnoma nova vprašanja glede varnosti, s katerimi se do takrat niso srečevali. Reševanje problema, kako kombinirati radarska opazovanja s klasičnim zemeljskim opazovanjem in oboje uporabiti v taktiki boja lovcev prestreznikov, je bil začetek razvoja discipline, ki jo danes poznamo pod imenom OR.

**Leto 1937**

Radar na Bawdsey Research Station je bil leta 1937 predan v vojaško službo. Prva izmed treh velikih predvojnih vaj zračne obrambe Britanije, ki je bila izvedena poleti 1937, je bila s stališča zgodnjega odkrivanja sovražnih letal uspešna, vendar je pokazala velike pomanjkljivosti v obdelavi in posredovanju radarskih podatkov.

**Leto 1938**

Julija leta 1938 je bila izvedena druga velika vaja zračne obrambe. V tistem času so bile zgrajene še štiri nove radarske postaje in nekaj novih letališč, za katere so upali, da bodo povečala pokritost področja in učinkovitost zračne obrambe. Vendar je ta vaja pokazala ravno nasprotno. Nove radarske postaje so generirale celo vrsto novih problemov v komunikaciji in v primerjanju dodatnih podatkov, ki so si bili med seboj pogosto v nasprotju.

Problemi, ki so se pojavili tik pred vojno, ki je bila v tistem času že očitna, so zahtevali povsem nov pristop in drastične ukrepe. Glede na rezultate vaje je takratni poveljnik Bawdsey Research Station, Albert Percival Rowe nadrejenim sporočil, da je vaja pokazala izjemne tehnične zmogljivosti radarja, vendar je razkrila tudi ogromno operativnih pomanjkljivosti. Zato je predlagal ustanovitev posebnega programa, enote, ki se je kasneje ukvarjala s sistemom izključno iz operativnega vidika. Ime za novo vejo uporabne znanosti, ki so jo s tem začeli, so znanstveniki Radar Research Group izbrali še isti dan: »RESEARCH into (military) OPERATIONS« ali krajše OR.

**Leto 1939**

Poleti 1939 je bila izvedena zadnja predvojna vaja zračne obrambe v Britaniji. Vključevala je 33.000 vojakov, 1.300 letal, 110 protiletalskih topov, 700 iskalnih žarometov in 100 balonov. Ob uporabi metod, ki jih je izdelala skupina za OR, je vaja pokazala velik napredek pri reševanju problemov s komunikacijo in usmerjanjem letal k odkritim tarčam. Glede na velik doprinos OR ekipe k izboljšanju stanja, je poveljnik RAF Fighter Command Air - Hugh Dowding predlagal, da se OR ekipa pridruži glavnemu štabu letalstva v Stanmoru pri Londonu in se ustanovi tako imenovana Stanmore Research Section.

Leta 1939 je ruski matematik Leonid Vitaliyevich Kantorovich razvil matematično teorijo poimenovano linearno programiranje. Zaradi razvoja optimalne razporeditve virov je leta 1975 prejel Nobelovo nagrado. Istega leta je Nobelovo nagrado prejel tudi nizozemski matematik Tjalling Koopmans zaradi dela na področju teorije razvrščanja virov (problem načrtovanja optimalnega gibanja ladij med vojno čez Atlantski ocean).

**Leto 1940**

Maja 1940, ko so nemške enote hitro napredovale v bitki za Francijo, je bila Stanmore Research Section zadolžena, da analizira francosko zahtevo po desetih dodatnih lovskih eskadronih (1 eskadron = 12 lovcev prestreznikov) glede na dejstvo, da je bila predvidena izguba treh eskadronov na dva dni boja. Stanmore Research Section je pripravil poročilo in ga predstavil Winstonu Churchillu. Glede na poročilo se je Churchill odločil, da v Francijo ne pošljejo več nobenega letala, saj bo zaradi izgub sodelovanje v bojih za Francijo preveč oslabilo Britansko zračno obrambo. To je bil eden prvih velikih prispevkov OR pri strateških odločitvah.

**Leto 1941**

Zaradi številnih uspehov Stanmore Research Section in njihove OR ekipe je bila leta 1941 na Coastal Command ustanovljena Sekcija za operacijske raziskave[2] (v nadaljevanju: ORS), katere izračuni in napovedi so kasneje pomembno vplivali na izid 2. svetovne vojne. Glavna naloga Coastal Command je bila z letali odkrivati in uničevati nemške podmornice, ki so se pojavljale na površju blizu Britanske obale. Ena izmed nalog ORS je bila organizacija vzdrževanja letal. Vsako letalo v eskadronu je bilo potrebno v vsakem ciklu letenja dolgem 350 ur pregledati 8-krat.

[2] Operational Research Section

Sedem izmed teh pregledov je bilo kratkih in so trajali 2-5 dni, en pregled pa je bil daljši in je trajal 14 dni. Problem, ki se je pojavil, je bil, kako organizirati lete, da bodo vsi viri eskadrona (letala, piloti in mehaniki) izkoriščeni optimalno.

Znanstveniki na ORS so predlagali centralni sistem servisiranja, pri katerem je bilo letalo poslano na servis, ko je bilo to potrebno, ekipa mehanikov za servis pa je bila izbrana glede na razpoložljivost. Prednost tega sistema je bilo občutno povečanje ur letenja v določenem časovnem obdobju, vendar so se pojavile tudi slabosti, ki so se kazale predvsem v padcu morale posadk, saj je bilo izgubljeno zaupanje med mehaniki in piloti. Piloti so bili namreč do tedaj navajeni, da je njihovo letalo servisirala vedno ista skupina mehanikov, zato se je med njimi spletlo zaupanje. Po obsežnem testiranju, ki je trajalo 5 mesecev, so sistem kljub nezaupanju sprejeli in implementirali v prakso. Z implementacijo novega načina servisiranja so povečali število ur letenja, kljub temu, da je število letal ostalo enako. Število ur letenja se je povečalo za 61 %. ORS je postavila nova merila glede učinkovitosti letal in razvila metodo za merjenje učinkovitosti različnih tipov letal v različnih tipih vojaških akcij.

**Leto 1947**

Leto 1947 predstavlja pravi začetek linearnega programiranja. Tega leta je George Bernard Dantzig formuliral model, v katerem je uporabil namensko funkcijo. Istega leta je John Von Neumann na podlagi Dantzigovega pripovedovanja o simpleksni metodi reševanja linearnega programiranja razvil dualni linearni problem. Pri tem si je pomagal s primerom, ki ga je razvil v svojem delu Teorija iger[3].

Po drugi svetovni vojni so ameriški znanstveniki uporabili pridobljena znanja iz OR za reševanje problemov oskrbe z energijo, oborožitvijo in za reševanje problema upravljanja zalog. Ker so problemi OR izredno zahtevni, se je zahvaljujoč napredku računalništva čas za razreševanje tovrstnih problemov zelo skrajšal.

Prvič so računalnik za razrešitev problema OR uporabili leta 1952. Čas reševanja je bil tako spodbuden, da so računalniško reševanje problemov takoj uporabili za

[3] V originalu: »Game Theory«

vse vojaške izračune, kot je določitev optimalne višine leta letal za iskanje sovražnikovih podmornic in upravljanje stroškov za logistiko in oborožitev. V letu 1954 je bila izdana prva komercialna programska oprema, ki je bila sposobna reševanja linearnih programov.

V 50. in 60. letih 20. stoletja se je razvoj OR razširil tudi na področje trgovine in industrije. Prvi večji znani primer OR je bil problem transporta peska za gradnjo Moskve. Pesek so namreč pridobivali na desetih izhodiščnih točkah, potrebovali pa so ga na 230 različnih mestih v Moskvi. Za rešitev tega problema je bil uporabljen računalnik Strena. Izračun je trajal kar 10 dni, rešitev pa je prispevala k zmanjšanju stroškov za 11 % glede na prvotne stroške transporta.

**Leto 1982**

George Joseph Stigler je predstavil poseben problem, znan kot prehrambeni problem, do katerega je prišlo zaradi skrbi ameriške vojske, da bi svojim vojakom zagotovila primerno hrano po najnižji ceni. Prehrambeni problem je Stigler rešil s hevristično metodo, katere rešitev se le v nekaj odstotkih razlikuje od rešitve, ki jo je leta kasneje podalo reševanje s simpleksno metodo.

Linearno programiranje je bilo do danes razvito za veliko različnih vrst problemov. V tem gradivu bomo predstavili le del vsega, kar se je mogoče naučiti na tem področju, fokus gradiva pa je na linearnem programiranju.

# 1 LINEARNA OPTIMIZACIJA

## 1.1 Modeliranje optimizacijskih problemov

Poglavje povzeto po History of Operations Research, b. d.

Optimizacijski problemi so vseprisotni pri matematičnem modeliranju realnih sistemov, ki lahko pokrivajo zelo široka področja. Aplikacije optimizacijskih metod se uporabljajo v vseh vejah ekonomije, financ, kemije, astronomije, fizike, strukturne in molekularne biologije, inženirstva, računalništva in medicine.

Optimizacijsko modeliranje je časovno potraten proces. Poteka po naslednjih korakih:

- opis problema;
- predpis rešitev;
- nadzorovanje problema z neprekinjenim ocenjevanjem oziroma posodabljanjem optimalne rešitve ob spreminjanju parametrov in strukture problema.

Med temi splošnimi koraki vedno obstajajo povratne zanke, kar pomeni, da se je potrebno v korakih postopka vedno vračati nazaj.

### 1.1.1 Matematična formulacija problema

Ko odkrijemo problem, ga je najprej potrebno dobro razumeti, da ga lahko zapišemo v ustrezni pisni obliki. Ko problem razumemo, razvijemo matematični model, ki bo kolikor se da ustrezno predstavljal realnost. Formulacijo problema je potrebno preveriti in potrditi, preden se lotimo iskanja rešitev. Dobra matematična formulacija mora biti tako vključujoča (vključevati mora tisto, kar pripada problemu) in izključujoča (izključevati mora vse, kar ni povezano z izbranim problemom).

### 1.1.2 Iskanje optimalne rešitve

Drugi korak sestavljata identifikacija rešitve problema in izvedbena faza algoritma. V tem koraku s pomočjo izbranega algoritma iščemo rešitev definiranega problema. Rešitev lahko poiščemo z računanjem na pamet ali pa s pomočjo različnih računalniških programov in njihovih modulov.

### 1.1.3 Interpretacija optimalne rešitve

Izračunano optimalno rešitev je po navadi potrebno predstaviti tudi sodelavcem. V podjetju rešitev prestavimo osebi, ki sprejema odločitve. Pri tem je potrebno paziti, da uporabljamo izraze, ki so odločevalcu jasni. Rešitev problema je potrebno predstaviti z razumljivimi izrazi, odločevalcu tudi ne prenesemo le računalniškega izpisa problema, ki ga morda ne bo razumel, ampak uporabimo grafe, diagrame poteka in ostale slikovne pripomočke za boljše razumevanje. Odločevalec v podjetju seveda ni primoran k temu, da sprejme izračunano optimalno rešitev. Poleg podatkov, ki so bili vključeni v algoritem, lahko obstajajo tudi podatki, ki jih v algoritem ne moremo vključiti, igrajo pa zelo pomembno vlogo pri končni odločitvi.

### 1.1.4 Analiza problema po rešitvi

Te dejavnosti vključujejo posodobitve optimalne rešitve. V nenehno spreminjajočem se svetu je ključno, da optimalno rešitev redno posodabljamo, ne glede na vrsto optimizacijskega problema. Model, ki je bil uveljavljen in nam je podal optimalno rešitev, lahko izgubi na veljavnosti zaradi spremenjenih pogojev, s čemer predstavitev realnosti ni več ustrezna. Nenatančna rešitev lahko negativno vpliva na odločevalca, da sprejme napačne odločitve. Optimizacijski model, ki ga ustvarimo, mora biti sposoben obvladovati spremembe v svetu, biti mora dinamičen.

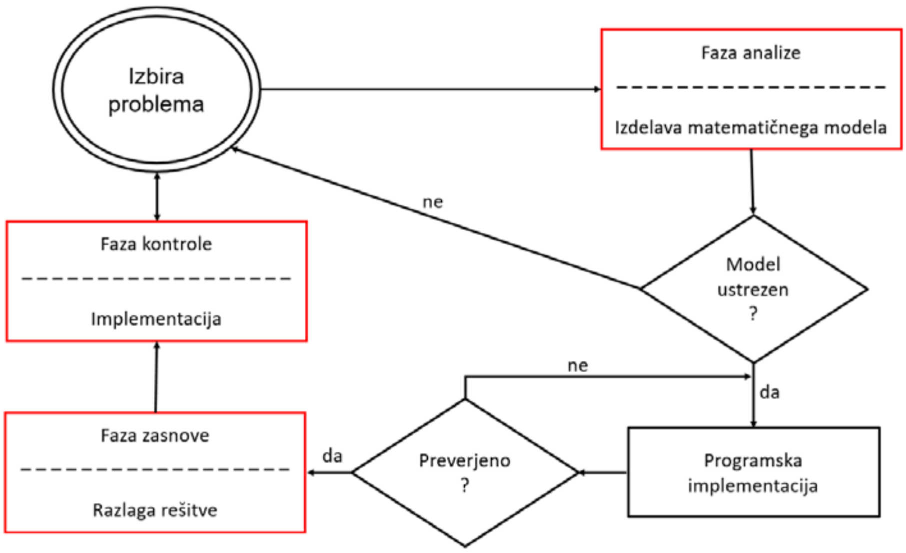
Optimalno rešitev lahko posodabljamo in prilagajamo glede na spreminjajoče se razmere le, če rešitev analiziramo in ugotovimo vpliv odločitvenih dejavnikov na optimalno rešitev. V ta namen uporabimo razne analize rešitve kot sta na primer analiza omejitev in analiza koeficientov, ki bosta predstavljeni v nadaljevanju.

### 1.1.5 Pomen povratnih informacij in nadzora

Poudariti moramo pomembnost razmišljanja o povratnih informacijah in kontrolnih vidikih optimizacijskega problema. Zaradi prej omenjenega spreminjanja realnega sveta, je zelo pomembno, da spremljamo povratne informacije in sprejmemo nadzor implementiranega modela kot zelo pomemben del procesa optimizacije.

Opisani postopek lahko strnemo z diagramom poteka, ki prikazuje faze sistemske analize, načrtovanja in nadzora z dejavnostmi potrjevanja in preverjanja modela (slika 1).

Slika 1: Diagram poteka modeliranja optimizacijskih problemov




Vir: Deterministic Modeling: Linear Optimization with Applications [online]

Na diagramu je jasno prikazana povratna zanka v procesu modeliranja optimizacijskih problemov. Po izbiri problema iz realnega okolja sledi faza analize problema, s pomočjo katere se izdela matematični model, ki opiše izbrani model. V primeru, da model ni ustrezen, je potrebno začeti na začetku – pri definiciji problema. Če se model izkaže kot ustrezen, pa lahko model implementiramo s programsko rešitvijo. Ko je tudi programska rešitev preverjena, preidemo na fazo zasnove, kjer dobljeno rešitev razložimo na način, primeren publiki. V fazi kontrole pa rešitev vnesemo v realno okolje. Zaradi sprememb model vedno znova preverjamo, da ohranimo njegovo učinkovitost.

## 1.2 Linearno programiranje

Linearno programiranje[4] je matematična metoda za iskanje rešitve, ki doseže najboljši rezultat (kot je na primer maksimalni dobiček ali najnižji strošek) v danem matematičnem modelu pod določenimi pogoji, ki so med seboj linearno odvisni.

Linearno programiranje kot matematični model se je razvilo med 2. svetovno vojno z namenom zmanjšanja stroškov pri načrtovanju vojaških izdatkov in pri organizaciji ladijskih konvojev. V tajnosti so metodo držali do leta 1947.

Kot smo zapisali uvodoma, kot začetnike linearnega programiranja štejemo ruskega matematika Leonida Kantoroviča, ki je leta 1939 razvil problem linearnega programiranja, Georga B. Dantziga, ki je leta 1947 objavil simpleksno metodo za reševanje linearnih programov in Johna von Neumanna, ki je istega leta razvil teorijo dualnega linearnega problema.

Dantzingov prvi problem, s katerim se je ukvarjal, je bil najti najboljšo razporeditev 70 ljudi na 70 delovnih mest. Pri tem mora vsak človek zasesti eno delovno mesto, vsako delovno mesto pa mora biti nekomu dodeljeno. Pri takšnem problemu nastane 140 omejitev in 4.900 razporeditev (Lenstra, Rinnooy Kan & Schrijver, 1991). Računalniška moč, ki bi jo uporabili za testiranje vseh možnih permutacij za izbiro najboljše dodelitve delovnih mest, je ogromna. Število možnih razporeditev namreč presega število delcev v vesolju. Če pa se problema lotimo z linearnim programiranjem, možnost, da poiščemo optimalno rešitev postane realna. Teorija linearnega programiranja namreč drastično zmanjša število možnih rešitev, ki jih je treba preveriti.

Leta 1963 je pri založbi Univerze Princeton izšla Dantzigova knjiga linearnega programiranja in njegovih razširitev[5], ki je pokrivala pomembne teme. Zaradi poglobljenega obravnavanja tematike je hitro postala »biblija« linearnega programiranja.

[4] Linear Programming
[5] V originalu: »Linear Programming and Extensions«

## Zanimivost

Kot zanimivost naj predstavimo dogodek iz Dantzigovega življenja, ki je pomembno vplival na razvoj linearnega programiranja. Leta 1939, ko je bil študent na UC Berkeley, je Dantzig zamujal na predavanja profesorja Jerzya Neymana. Profesor je pred Dantzigovim prihodom v predavalnico na tablo zapisal dva primera znanih nerešenih statističnih problemov. Dantzig je zaradi zamude na predavanje predvideval, da sta primera domača naloga in si ju je prepisal v zvezek. Ko se je lotil reševanja, sta se mu sicer zdela nekoliko težja kot običajno, vendar je nekaj dni kasneje profesorju oddal dokončani rešitvi, še vedno misleč, da gre za nalogo. Šest tednov po oddaji naloge, ga je poiskal navdušeni profesor Neyman, ki mu je povedal, da je rešil dva izmed najbolj znanih nerešljivih problemov v statistiki. Eno izmed rešitev sta kmalu objavila v matematični reviji. Leta kasneje je drugi raziskovalec, Abraham Wald pripravljal članek za objavo na temo drugega problema, ki ga je Dantzig rešil za domačo nalogo. Ko je izvedel za njegovo rešitev, ga je dodal kot soavtorja članka. Ta zgodba se je širila in je uporabljena kot motivacijska lekcija, ki kaže na moč pozitivnega mišljenja. Sčasoma so Dantzigovo ime umaknili iz zgodbe in spremenili nekatera dejstva, vendar se je osnovna zgodba ohranila v obliki urbane legende in postala uvodna scena filma Dobri Will Hunting[6].

[6] V originalu: »Good Will Hunting«

# 2 OSNOVNA ALGEBRA

Pri spoznavanju linearnega programiranja bomo potrebovali tudi nekaj matematičnega znanja. Zato v tem poglavju podajamo nekaj osnovnih pojmov o matrikah, računanju z njimi ter kako grafično in računsko reševati sisteme linearnih enačb in neenačb.

## 2.1 Matrike

Pred zapisom kaj je matrika, poglejmo naslednji primer: ladja iz Azije pelje velike zabojnike manga, srednje zabojnike limet in male zabojnike pomela. Tovor mora iztovoriti v štirih evropskih pristaniščih. V Hamburgu 18 velikih, 4 srednje in 10 malih zabojnikov, v Antwerpnu 25 velikih, 9 srednjih in 4 male zabojnike, v Kopru 8 velikih, 15 srednjih in 24 malih zabojnikov ter v Trstu 35 velikih, 12 srednjih in 5 malih zabojnikov.

Podatke zaradi boljše preglednosti uredimo v preglednico:

| **Pristanišče** | **Zabojniki** | | |
|---|---|---|---|
| | Število malih zabojnikov | Število srednjih zabojnikov | Število velikih zabojnikov |
| Hamburg | 10 | 4 | 18 |
| Antwerpen | 4 | 9 | 25 |
| Koper | 24 | 15 | 8 |
| Trst | 5 | 12 | 35 |

Podatke lahko zapišemo tudi v obliki, ki je matematično primernejša. Vse numerične podatke uredimo v tabelo, omejeno z oglatimi oklepaji.

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 18 \\ 4 & 9 & 25 \\ 24 & 15 & 8 \\ 5 & 12 & 35 \end{bmatrix}$$

Takšno tabelo v matematiki imenujemo matrika. Matrika je pravokotna tabela števil. Sestavljena je iz vrstic in stolpcev. Število vrstic in stolpcev matrike določa njeno dimenzijo oziroma razsežnost matrike: če ima matrika $m$ vrstic in $n$ stolpcev, je njena razsežnost enaka $m \times n$.

Matrike označujemo z velikimi tiskanimi črkami. Števila, ki nastopajo v matriki, imenujemo elementi matrike. Lego vsakega elementa matrike določimo tako, da povemo v kateri vrstici in v katerem stolpcu leži.

Splošni zapis matrike razsežnosti $m \times n$ je:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ali krajše:

$$\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

pri čemer z $a_{ij}$ označimo tisti element, ki leži v $i$-ti vrstici in v $j$-tem stolpcu matrike. Prvi indeks torej pove, v kateri vrstici leži izbrani element, drugi indeks pa pove, v katerem stolpcu. Element $a_{ij}$ imenujemo tudi $(i, j)$ –ti element matrike $\mathrm{A}$. Indeks $i$ lahko zavzame vrednosti od 1 do $m$, indeks $j$ pa vrednosti od 1 do $n$, kar matematično zapišemo:

$$i = 1,2, \dots, m \text{ in } j = 1,2, \dots, n.$$

Matrika zgrajena iz zgornje preglednice ima razsežnost $4 \times 3$. Torej ima 4 vrstice in 3 stolpce. Element $a_{42}$ se nahaja v četrti vrstici in drugem stolpcu: $a_{42} = 12$ in predstavlja, da je bilo v Trstu raztovorjenih 12 srednjih zabojnikov.

V prvi vrstici so elementi $a_{11} = 10$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 18$, v drugi vrstici so elementi $a_{21} = 4$, $a_{22} = 9$, $a_{23} = 25$, v tretji vrstici so elementi $a_{31} = 24$, $a_{32} = 15$, $a_{33} = 8$, in v četrti vrstici elementi $a_{41} = 5$, $a_{42} = 12$ in $a_{43} = 35$.

### 2.1.1 Enakost matrik

Matriki $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{p\times s}$ sta enaki, če imata enaki dimenziji $m = p$ in $n = s$ in če so istoležni elementi v obeh matrikah enaki: $a_{ij} = b_{ij}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, m$ in $j = 1,2, \dots, n$.

**Primer 1:**

Kakšne morajo biti vrednosti $a$, $b$ in $c$, da bosta matriki A in B enaki?

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 2 \\ a & 7 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & b & 2 \\ -5 & 7 & 2c \end{bmatrix}$$

**Rešitev:**

Da bosta matriki enaki, mora biti vrednost $a = -5$, vrednost $b = 10$ in vrednost $c = -3$.

### 2.1.2 Posebni primeri matrik

Matrika razsežnosti $1 \times 1$ je skalar (skalar je v fiziki neusmerjena količina, ki je izražena samo s številom):

$$[a] = a$$

Matrika z enim samim stolpcem se imenuje stolpični vektor in je oblike:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Matrika z eno samo vrstico se imenuje vrstični vektor in je oblike:

$$\mathrm{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

Splošne elemente stolpičnih in vrstičnih vektorjev označujemo le z enim indeksom, ne z dvema, kot pri matrikah večjih razsežnosti, kjer moramo označiti tako vrstico kot stolpec, v katerem se element nahaja.

Ničelna matrika je matrika, v kateri so vsi elementi enaki 0. Običajna oznaka za ničelno matriko reda $m \times n$ je velika tiskana črka $\mathrm{O}$:

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika je matrika, ki ima enako število vrstic in stolpcev ($m = n$). Kvadratna matrika razsežnosti $n \times n$ je reda $n$. Vse elemente kvadratne matrike z enakima indeksoma ($a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$) imenujemo diagonalni elementi. Ti elementi tvorijo glavno diagonalo matrike[7].

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Oznaka za transponirano matriko (matrike $\mathrm{A}$) je matrika $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. Matriko $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ dobimo z zamenjavo istoležnih vrstic in stolpcev, torej z zrcaljenjem matrike čez glavno diagonalo.

Če je matrika

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

potem je njena transponirana matrika enaka:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[7] Glavna diagonala matrike $\mathrm{A}$ predstavlja množico elementov $a_{ij}$ pri katerih je $i$ enak $j$. Glavno diagonalo lahko poiščemo v vsaki matriki.

Lastnosti transponiranja matrik so naslednje:

- $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$
- $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$
- $(\alpha \cdot \mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \alpha \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ ($\alpha$ pri tem predstavlja poljubno število)
- $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

Simetrična matrika je kvadratna matrika $\mathrm{A}$, za katero velja $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$. Elementi simetrične matrike so enaki glede na glavno diagonalo. Za simetrično matriko velja $a_{ij} = a_{ji}$ za vsak $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Zgornje trikotna matrika je matrika, ki ima vse elemente pod glavno diagonalo enake 0:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonalna matrika je kvadratna matrika, v kateri so vsi elementi izven glavne diagonale enaki 0:

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Enotska ali identična matrika je skalarna matrika, ki ima vse elemente na glavni diagonali enake 1:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Skalarna matrika je diagonalna matrika, v kateri so vsi elementi na glavni diagonali med seboj enaki, vsi elementi izven glavne diagonale pa so 0. Dobimo jo z množenjem skalarja z enotsko matriko (o računski operaciji množenja skalarja z matriko si lahko bralec prebere v naslednjem poglavju):

$$\mathrm{D_r} = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{bmatrix}$$

### 2.1.3 Računanje z matrikami

#### 2.1.3.1 Množenje matrik s skalarjem

Produkt matrike $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ z realnim številom $\alpha$ je matrika oblike:

$$\alpha\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti množenja matrik s skalarjem so naslednje:

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{A}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathrm{A}$
- $1 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$
- $0 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{O}$

**<u>Primer 2:</u>**

Izračunajte produkt matrike $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ in skalarja $\alpha = 2$.

**Rešitev:**

$$\alpha \cdot \mathrm{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-4) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -8 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

#### 2.1.3.2 Seštevanje matrik

Vsoto matrik $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ je možno izračunati le, če sta matriki enakih dimenzij. Vsota matrik $\mathrm{A} = [\mathrm{a_{ij}}]_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ in $\mathrm{B} = [\mathrm{b_{ij}}]_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ je enaka matriki:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti seštevanja matrik so naslednje:

- $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$
- $\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})=(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}$
- $\mathrm{A}+0=\mathrm{A}$
- $\alpha\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \alpha\cdot\mathrm{A}+\alpha\cdot\mathrm{B}$
- $(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{A}=\alpha\cdot\mathrm{A}+\beta\cdot\mathrm{A}$

**Primer 3:**

Izračunajte vsoto matrik $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & (-3)+7 & 4+(-5) \\ 5+6 & 7+1 & 1+0 \\ 0+4 & 3+9 & 4+(-3) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 11 & 8 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1.3.3 Odštevanje matrik

Razliko matrik $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ je mogoče izračunati le, če sta obe matriki enakih dimenzij. Razlika matrik $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ je enaka matriki:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti odštevanja matrik so naslednje:

- $\mathrm{A}-0=\mathrm{A}$
- $\mathrm{A}-\mathrm{A}=0$

**<u>Primer 4:</u>**

Izračunajte razliko matrik $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2-(-1) & (-3)-7 & 4-(-5) \\ 5-6 & 7-1 & 1-0 \\ 0-4 & 3-9 & 4-(-3) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 6 & 1 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

### 2.1.3.4 Množenje matrik

Produkt dveh matrik $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ je mogoče ozračunati le, če velja, da je število stolpcev v prvi matriki enako številu vrstic v drugi.

Produkt matrik $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$, je matrika dimenzije $m \times p$:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

Element $c_{ij}$produkta matrik $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ dobimo tako, da $i$-to vrstico matrike $\mathrm{A}$ skalarno pomnožimo[8] z $j$-tim stolpcem matrike $\mathrm{B}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

V primeru, da so izpolnjeni pogoji glede dimenzij matrik, so lastnosti množenja matrik naslednje:

- $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})\cdot\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}\cdot\mathrm{C})$
- $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{C} + \mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$
- $\mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + \mathrm{A}\cdot\mathrm{C}$
- $\alpha\cdot(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = (\alpha\cdot\mathrm{A})\cdot\mathrm{B}$
- $\mathrm{A}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{I}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A}$
- $\mathrm{A}\cdot\mathrm{O} = \mathrm{O}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{O}$

Potrebno je poudariti, da pri matrikah velja posebnost pri množenju, saj komutativnost množenja matrik $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = (\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})$ v splošnem ne velja. V primeru matrik $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$, je matrika produkta $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ velikosti $m \times p$ (pri tem mora veljati $m = p$), matrika produkt $\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$ pa velikosti $n \times n$ (če velja $n = n$).

[8] Skalarno množenje ali skalarni produkt je matematična operacija, ki dvema vektorjema priredi število (skalar).

**Primer 5:**

Izračunajte produkt matrik $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) & 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 33 \\ 1 & -35 \end{bmatrix}$$

### 2.1.3.5 Determinanta matrike

Determinanta matrike $\mathrm{A}$ je definirana le za kvadratne matrike. Determinanta matrike je preslikava, ki kvadratni matriki priredi število. Označimo jo kot:

$$\det \mathrm{A} = \det[a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; i = 1,2, \dots, n \; j = 1,2, \dots, n$$

Z $\mathrm{D_{ij}}$ označimo determinanto matrike, ki jo dobimo, če v matriki $\mathrm{A}$ izpustimo $i$-to vrstico in $j$-ti stolpec. Determinantam $\mathrm{D_{ij}}$ pravimo poddeterminante matrike $\mathrm{A}$.

Pri izračunu determinante matrike moramo upoštevati pravila za računanje z determinantami. V gradivu navajamo le nekatere izmed njih:

- če v matriki $\mathrm{A}$ zamenjamo dve sosednji vrstici ali dva sosednja stolpca, determinanta spremeni predznak;
- če v matriki $\mathrm{A}$ kakšni vrstici ali stolpcu prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice ali stolpca, determinanta ne spremeni svoje vrednosti.

Determinanto matrike $\mathrm{A}$ lahko izračunamo na več načinov. V nadaljevanju bomo na kratko predstavili dva načina. Prvi način je Sarrusovo pravilo, ki je uporabno le za matrike reda $2 \times 2$ in matrike reda $3 \times 3$, drugi način pa s pomočjo razvoja po vrstici ali stolpcu. Najlažje je razvijati matriko po tisti vrstici ali stolpcu, ki ima največ ničel, saj si tako delo olajšamo.

Poglejmo primer izračuna determinante matrike $\mathrm{A}$, reda $3 \times 3$. Poglejmo najprej kako jo izračunamo po Sarrusovem pravilu. Prva dva stolpca matrike pripišemo na desno stran matrike.

$$\det \mathrm{A} = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Determinanto izračunamo tako, da seštejemo produkte treh elementov po diagonalah. Pozitivne predznake imajo produkti elementov v smeri diagonale od leve proti desni, negativne predznake pa produkti elementov v smeri diagonale od desne proti levi.

$$\det \mathrm{A} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det \mathrm{A} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$
$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Prikažimo še razvoj po vrstici ali stolpcu. Determinanto bomo razvili po prvi vrstici:

$$\det \mathrm{A} = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \mathrm{D}_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \mathrm{D}_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \mathrm{D}_{13} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

**Primer 6:**

Izračunajte determinanto matrike $\mathrm{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rešitev:**

$$\det \mathrm{A} = det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -3 & 6 \end{matrix}$$

$$\det \mathrm{A} = \big((-1) \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 \cdot 6\big) - (5 \cdot 7 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 1)$$

$$= (-7) + (-24) + 0 - ((-105) + (-24) + 0) =$$

$$= -7 - 24 + 105 + 24 = 98$$

### 2.1.3.6 Inverzna matrika

Inverzna ali obratna matrika kvadratne matrike $\mathrm{A}$ je matrika $\mathrm{A}^{-1}$ za katero velja, da je

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{I}.$$

Matrika $\mathrm{A}$ je kvadratna matrika. Če velja, da $\det A \neq 0$, potem obstaja inverzna matrika $A^{-1}$:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\mathrm{D}_{11} & (-1)^{1+2}\mathrm{D}_{12} & \cdots & (-1)^{1+n}\mathrm{D}_{1n} \\ (-1)^{2+1}\mathrm{D}_{21} & (-1)^{2+2}\mathrm{D}_{22} & \cdots & (-1)^{2+n}\mathrm{D}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\mathrm{D}_{n1} & (-1)^{n+2}\mathrm{D}_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n}\mathrm{D}_{nn} \end{bmatrix}; i = 1,2, \dots, n \;\; j = 1,2, \dots, n,$$

kjer so $\mathrm{D}_{\mathrm{ij}}$ poddeterminante matrike $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Inverzno matriko lahko določimo le za kvadratne matrike, pa vendar tudi za vsako kvadratno matriko ne obstaja. Matriko, za katero inverzna matrika obstaja, imenujemo obrnljiva matrika. Za obrnljivi matriki $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ ustreznih dimenzij in za poljubno realno število $\alpha$ veljajo naslednje lastnosti:

- $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$
- $(\alpha \cdot \mathrm{A})^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}, \alpha \neq 0$
- $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$

**Primer 7:**

Preverite, ali je matrika $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ inverzna matriki $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ker je $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}=\mathrm{I}$, je matrika $\mathrm{B}$ res inverzna matrika matrike $\mathrm{A}$:

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}.$$

**Primer 8:**

Določite inverzno matriko matrike $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{92}\cdot\begin{bmatrix}28 & 3 & -7\\ 8 & 14 & -2\\ -48 & -15 & 35\end{bmatrix}$$

### 2.1.4 Dodatni primeri

**Primer 9:**

Dani sta matriki $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$ in $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Izračunajte $4\cdot\mathrm{A}-\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$.

**Rešitev:**

Matriko $\mathrm{A}$ množimo s skalarjem tako, da s skalarjem množimo vsak element matrike, matriko $\mathrm{B}$ pa transponiramo tako, da njene elemente prezrcalimo preko glavne diagonale.

$$4\cdot\mathrm{A}=4\cdot\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 12 & 4\\ -8 & 4 & 4\\ 8 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Dobljeni matriki le še odštejemo, da dobimo končni rezultat:

$$4 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 12 & 7 \\ -11 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

**Primer 10:**

Med danimi matrikami $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{N} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$ izberite tisti matriki, ki ju lahko pomnožimo in izračunajte njun produkt.

**Rešitev:**

Množimo lahko tisti dve matriki, pri katerih je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge. Če upoštevamo to pravilo, ugotovimo, da je mogoče množiti matriki $\mathrm{M}_{2\times4}$ in $\mathrm{O}_{4\times2}$, matriki $\mathrm{K}_{1\times2}$ in $\mathrm{M}_{2\times4}$ ter $\mathrm{O}_{4\times2}$ in $\mathrm{M}_{2\times4}$. Rezultat je matrika, ki ima toliko vrstic kot prva in toliko stolpcev kot druga matrika: $\mathrm{A}_{\mathrm{ij}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{jk}} = \mathrm{C}_{\mathrm{ik}}$:

$$\mathrm{M}_{2\times4} \cdot \mathrm{O}_{4\times2} = \mathrm{MO}_{2\times2}$$

$$\mathrm{K}_{1\times2} \cdot \mathrm{M}_{2\times4} = \mathrm{MK}_{1\times4}$$

$$\mathrm{O}_{4\times2} \cdot \mathrm{M}_{2\times4} = \mathrm{OM}_{4\times4}$$

Element $C_{ij}$ produkta matrik $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ dobimo tako, da $i$-to vrstico matrike $\mathrm{A}$ skalarno pomnožimo z $j$-tim stolpcem matrike $\mathrm{B}$.

V danem primeru element $c_{11}$ produkta matrik $\mathrm{M}$ in $\mathrm{O}$ dobimo tako, da skalarno pomnožimo prvo vrstico matrike $\mathrm{M}$ s prvim stolpcem matrike $\mathrm{O}$:

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = 4 + 1 - 8 + 0 = -3$$

Vse ostale elemente produkta matrik $\mathrm{M}$ in $\mathrm{O}$ izračunamo po enakem postopku:

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 20 \\ 5 & 24 \end{bmatrix}$$

Izračunamo še produkt $\mathrm{K}$ in $\mathrm{M}$:

$$K \cdot M = [3 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = [21 \quad 2 \quad 12 \quad 31]$$

In produkt $\mathrm{O}$ in $\mathrm{M}$:

$$\mathrm{O} \cdot \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 3 & 8 & 29 \\ 10 & 5 & -4 & 18 \\ 5 & 5 & -8 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**<u>Primer 11:</u>**

Matrikama $\mathrm{A}$ in $\mathrm{B}$ določite parametre $a$, $b$, $c$ in $d$ tako, da bosta matriki

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 6 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -d \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & a & -2d \\ 6 & c & -a \\ -b & 0 & 5 \end{bmatrix}$ enaki.

**Rešitev:**

$a = -1$, $b = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{2}$ in $d = -5$.

**<u>Primer 12:</u>**

Dani sta matriki $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Izračunajte $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}$ in $\frac{1}{2}\mathrm{A} - \mathrm{B}$.

**Rešitev:**

$\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 16 \\ -4 & 11 & 19 \end{bmatrix}$ in $\frac{1}{2}\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{13}{2} \\ -3 & -\frac{3}{2} & -6 \\ 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

**<u>Primer 13:</u>**

Dani sta matriki $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Preverite, če je produkt danih matrik komutativen ($\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$).

**Rešitev:**

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -17 & 27 \end{bmatrix}$. Ker $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, produkt teh dveh matrik ni komutativen.

**Primer 14:**

Dani sta matriki $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -2 & b \end{bmatrix}$. Določite parametra $a$ in $b$ tako, da bo $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:**

$a = 5$ in $b = -1$

## 2.2 Linearna funkcija

Linearna funkcija je funkcija, ki jo lahko v najbolj splošni obliki zapišemo kot:

$$f(x) = kx + n.$$

Njen graf je premica.

V zapisu enačbe premice $y = kx + n$, $k$ predstavlja poljubno realno število in ga imenujemo smerni koeficient premice. Smerni koeficient določa naklon premice. Začetno vrednost premice predstavlja $n$, ki določa tudi presečišče grafa z ordinatno osjo v koordinatnem sistemu.

Zapis enačbe premice v obliki $y = kx + n$ imenujemo eksplicitna oblika enačbe premice. S takšno obliko ni vedno mogoče zapisati enačbe premice, zato takrat uporabimo implicitno obliko enačbe premice: $ax + by + c = 0$. Za lažje risanje grafov pa lahko uporabimo tudi odsekovno obliko enačbe premice: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

## 2.3 Sistemi linearnih neenačb

### 2.3.1 Reševanje linearnih neenačb na grafični način

Linearna neenačba z dvema neznankama je neenačba oblike: $ax + by + c \lesseqgtr 0$, kjer so $a$, $b$ in $c$ koeficienti neenačbe, $x$ je neodvisna, $y$ pa odvisna spremenljivka. Znak $\lesseqgtr$ pa predstavlja, da je lahko funkcijski predpis za linearno neenačbo ali manjši ($<$), manjši ali enak ($\leq$), večji ($>$), večji ali enak ($\geq$) ali pa enak ($=$) 0.

Množica rešitev linearne neenačbe je ena od obeh polravnin, na kateri premica $ax + by + c = 0$ razdeli ravnino. Katera polravnina je rešitev neenačbe lahko določimo na več načinov.

Prvi način je, da neenačbo izrazimo v njeni eksplicitni obliki ($y > \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$).

V primeru, da je neenačba izražena kot $y > \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, torej da je $y$ večji od funkcijskega predpisa, je rešitev neenačbe polravnina nad narisano premico oziroma desno od nje.

V primeru, da je neenačba izražena kot $y < \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, torej da je $y$ manjši od funkcijskega predpisa, pa je rešitev neenačbe polravnina pod narisano premico oziroma levo od nje.

Drugi način je, da neenačbo preoblikujemo v obliko $ax + by + c > 0$, kjer je funkcijski predpis nujno večji od 0. Množica rešitev linearne neenačbe je ena od obeh polravnin, na kateri premica $ax + by + c = 0$ razdeli ravnino. Če je $c > 0$, je to polravnina, ki vsebuje izhodišče koordinatnega sistema; če pa je $c < 0$, je to polravnina, ki ne vsebuje izhodišča koordinatnega sistema.

**Primer 15:**

Z grafičnim načinom določite množico rešitev neenačbe $4x + 2y - 8 > 0$.

**Rešitev:**

Narišemo premico z enačbo $4x + 2y - 8 = 0$.

Določimo presečišče premice z osjo $x$:

$$4x + 2 \cdot 0 - 8 = 0$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Premica seka os $x$ v točki $A(2,0)$.

Določimo še presečišče z osjo $y$:

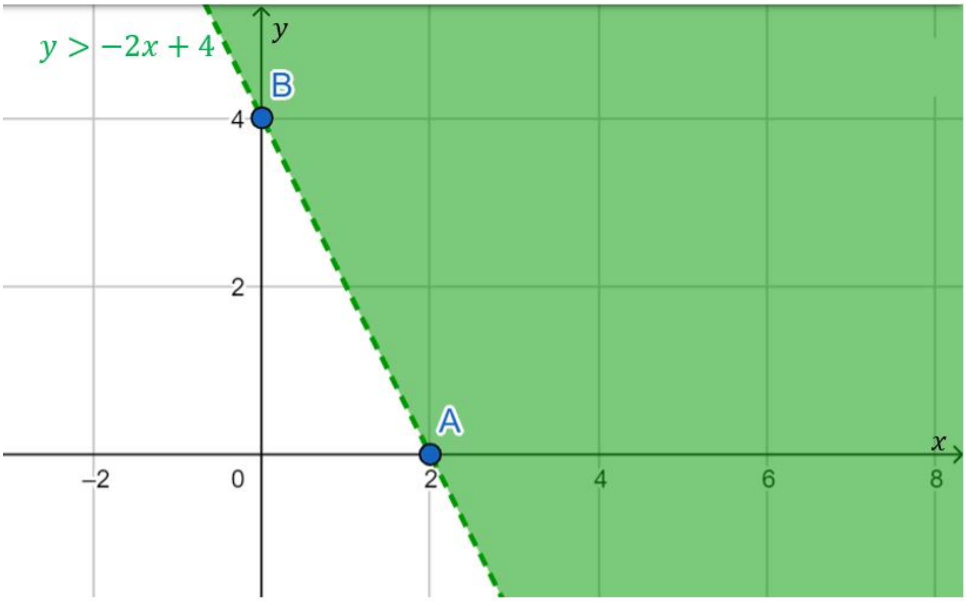
$$4 \cdot 0 + 2y - 8 = 0$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

Premica seka os $y$ v točki $B(0,4)$.

Skozi izračunani točki narišemo premico in določimo polravnino, ki zadošča neenačbi $4x + 2y - 8 > 0$. Neenačba, izražena v eksplicitni obliki je $y > -2x + 4$. Spremenljivka $y$ je večja kot funkcijski predpis, zato je rešitev polravnina, ki leži nad premico. Oziroma ker je $c = -8$, torej $c < 0$, je rešitev polravnina, ki ne vsebuje koordinatnega izhodišča.

Premico narišemo v graf s črtkano črto, saj točke na premici $4x + 2y - 8 = 0$ zaradi strogega neenačaja niso del rešitve neenačbe.

Slika 2: Grafična rešitev neenačbe




**Primer 16:**

Z grafičnim načinom določite množico rešitev neenačbe $5\text{x} - y + 6 \leq 0$.

**Rešitev:**

Narišemo premico z enačbo $5\text{x} - y + 6 = 0$.

Določimo presečišče z osjo $x$:

$$5\mathrm{x} - 0 + 6 = 0$$

$$5\mathrm{x} = -6$$

$$\mathrm{x} = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

Premica seka os $x$ v točki $A(-\frac{6}{5}, 0)$.

Določimo še presečišče z osjo $y$:

$$5 \cdot 0 - y + 6 = 0$$

$$-y = -6$$

$$y = 6$$

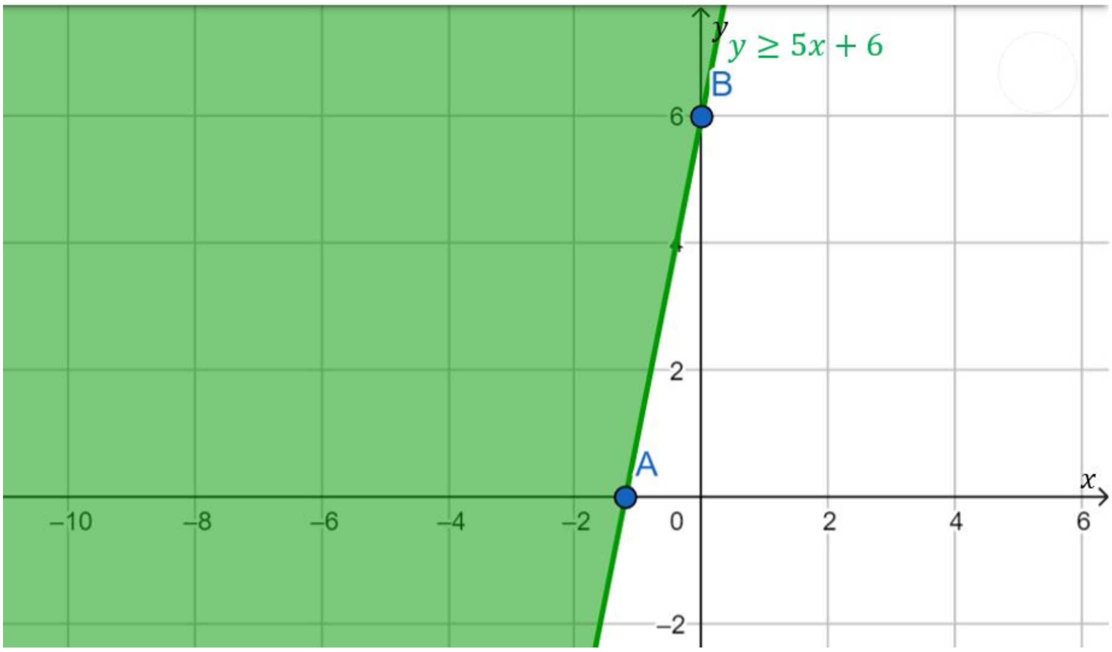
Premica seka $y$ os v točki $B(0, 6)$.

Skozi dobljeni točki narišemo premico. V tem primeru premico narišemo s polno črto, saj je tudi premica vključena v množico rešitev neenačbe $5\mathrm{x} - y + 6 \leq 0$. Neenačba izražena v eksplicitni obliki je $y \geq 5x + 6$. Spremenljivka $y$ je v tem primeru večja od funkcijskega predpisa, torej je rešitev polravnina nad premico.

Polravnino, ki je rešitev linearne neenačbe, lahko določimo tudi na drug način. V tem primeru moramo neenačbo $5x - y + 6 \leq 0$ pomnožiti z $-1$, da obrnemo neenačaj in dobimo $-5x + y - 6 \geq 0$. V tem primeru je $c = -6$, torej je rešitev polravnina, ki ne vsebuje koordinatnega izhodišča.

Točke na premici so del iskane polravnine, saj neenačba ni izražena s strogim neenačajem.

Slika 3: Grafična rešitev neenačbe




### 2.3.2 Reševanje sistemov linearnih neenačb na grafični način

Poglejmo si primer reševanja sistema več linearnih neenačb z več neznankami. Zapišimo sistem $m$ linearnih neenačb z $n$ neznankami:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \gtreqless b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \gtreqless b_2$$

...

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \lesseqgtr b_m$$

Z $\mathrm{A}$ označimo osnovno matriko koeficientov sistema $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$,

z $\mathrm{B}$ vektor prostih členov $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

in z $\mathrm{X}$ vektor odločitvenih spremenljivk $\mathrm{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$.

V obliki matrične neenačbe lahko zgornji sistem zapišemo: $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} \lesseqgtr \mathrm{B}$.

Množica rešitev sistema linearnih neenačb je presek množic rešitev posameznih neenačb. Kadar ima sistem neenačb le dve neznanki, se reševanja lahko lotimo grafično.

Sistem linearnih neenačb rešimo z dvema korakoma.

1. korak: poiščemo grafično rešitev vsake linearne neenačbe.

(1. korak ponavljamo, dokler grafično ne rešimo vseh linearnih neenačb)

2. korak: poiščemo presek vseh rešitev in označimo končno rešitev.

**Primer 17:**

Rešite sistem neenačb:

$$4x + 6y - 24 \leq 0$$
$$-x + 2y - 4 \leq 0$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

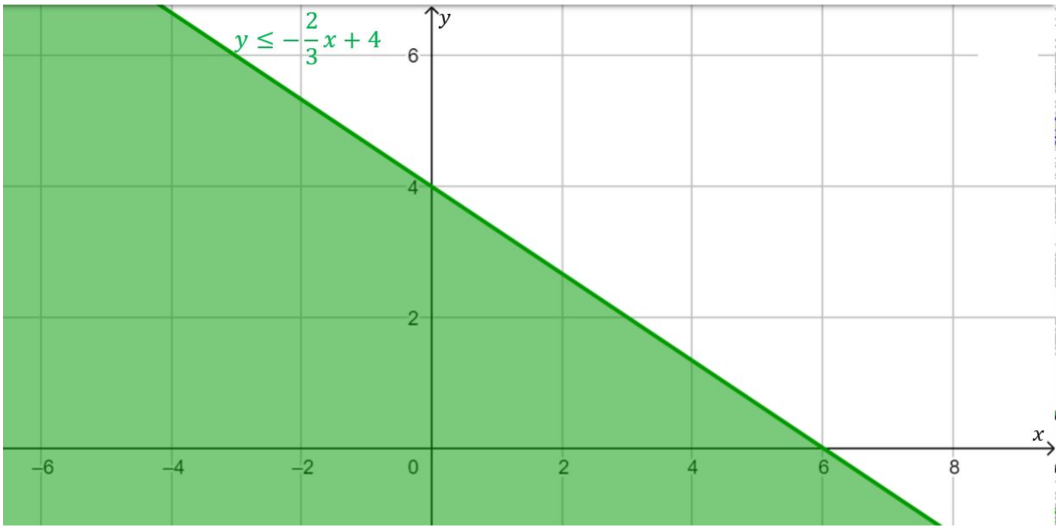
**Rešitev:**

Da lahko določimo katera polravnina je rešitev določene neenačbe, neenačbi najprej zapišemo v eksplicitni obliki:

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 4$$
$$y \leq \frac{1}{2}x + 2$$

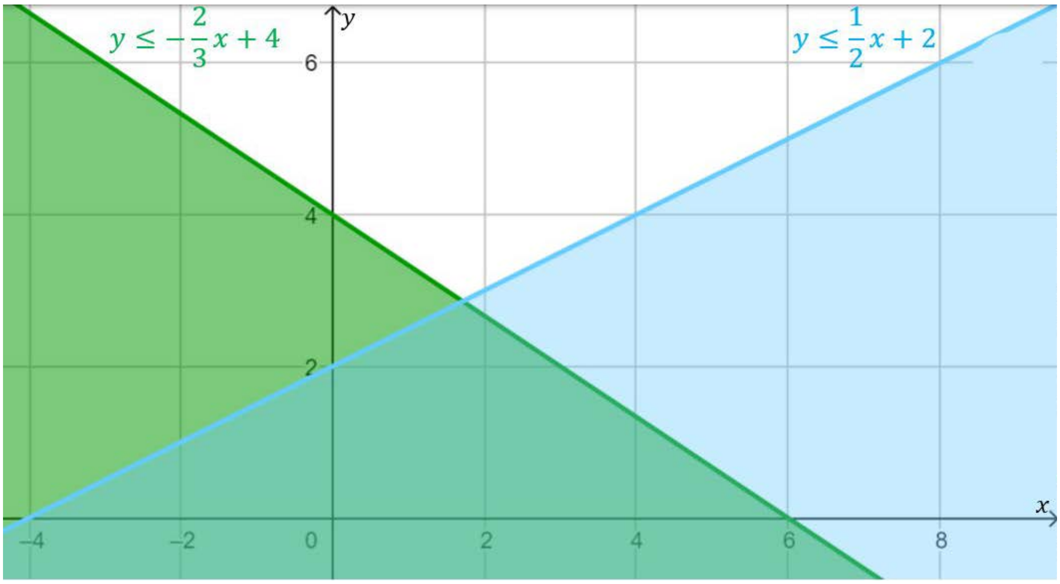
Narišemo enačbo $4x + 6y - 24 = 0$ v graf in označimo ustrezno polravnino, ki predstavlja rešitev te neenačbe:

Slika 4: Grafično reševanje sistema neenačb



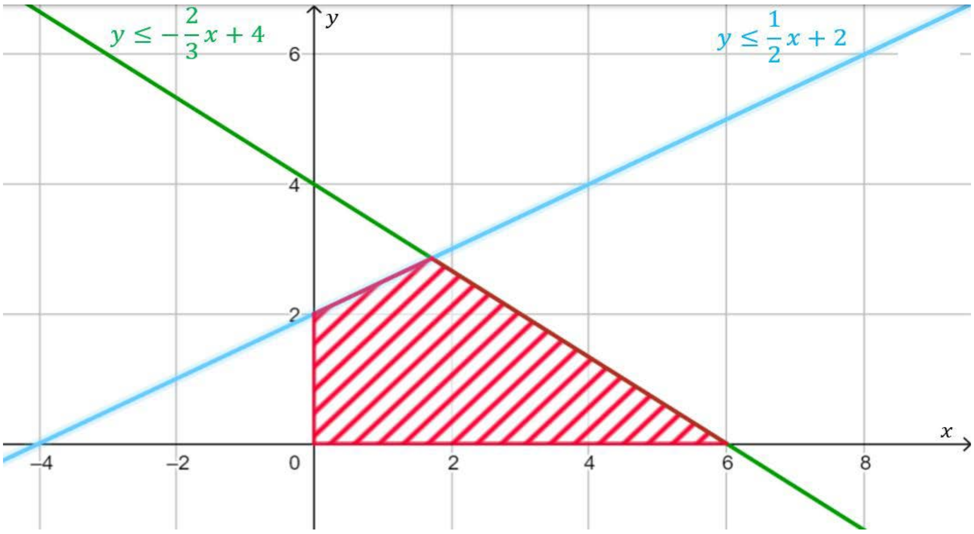

V isti graf narišemo še enačbo $-x + 2y - 4 = 0$ in ustrezno označimo njeno rešitev:

Slika 5: Grafično reševanje sistema neenačb



Ko sta rešitvi danih dveh neenačb ustrezno označeni, upoštevamo še zadnji dve neenačbi $x \geq 0$ in $y \geq 0$, ki opredeljujeta, da se množica rešitev danega sistema nahaja v prvem kvadrantu koordinatnega sistema[9]. Množica rešitev danega sistema neenačb je presek vseh polravnin, ki jih določajo podane neenačbe. Na sliki 6 je rešitev obarvana množica točk.

Slika 6: Grafično reševanje sistema neenačb




**Primer 18:**

Rešite sistem neenačb:

$$2x + y - 6 \geq 0$$
$$2x - 4 \leq 0$$
$$y - 2 \leq 0$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Rešitev:**

V koordinatni sistem narišemo premice. V vseh neenačbah so premice del rešitve, saj niso izražene s strogim neenačajem, zato jih rišemo z neprekinjeno črto.

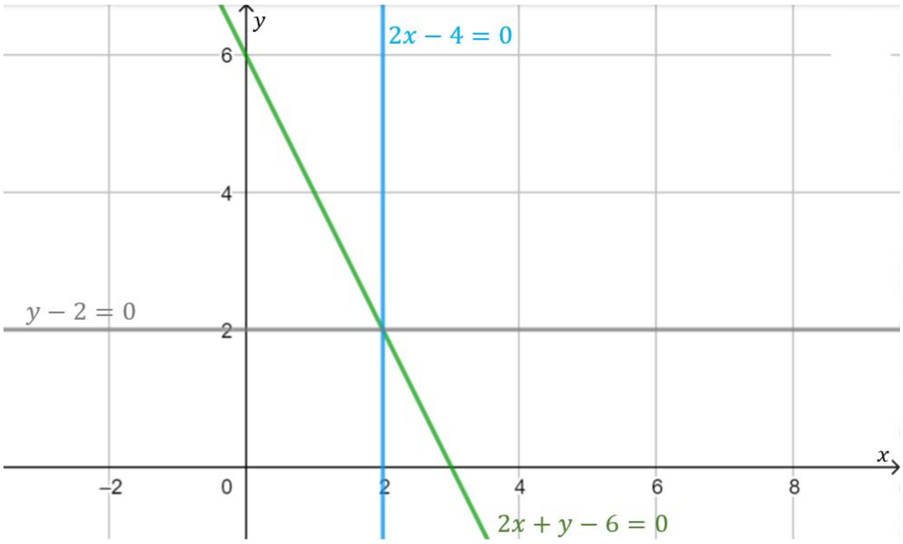
[9] Pravokotni koordinatni sistem je razdeljen na štiri kvadrante, ki so med seboj ločeni z osmi koordinatnega sistema. Prvi kvadrant je omejen s pozitivno abscisno in ordinatno osjo. Drugi kvadrant omejujejeta negativna abscisna in pozitivna ordinatna os. Tretji kvadrant je omejen z negativno abscisno in ordinatno osjo in četrti kvadrant s pozitivno abscisno in negativno ordinatno osjo.

$$2x + y - 6 = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$y - 2 = 0$$

Slika 7: Grafično reševanje sistema neenačb



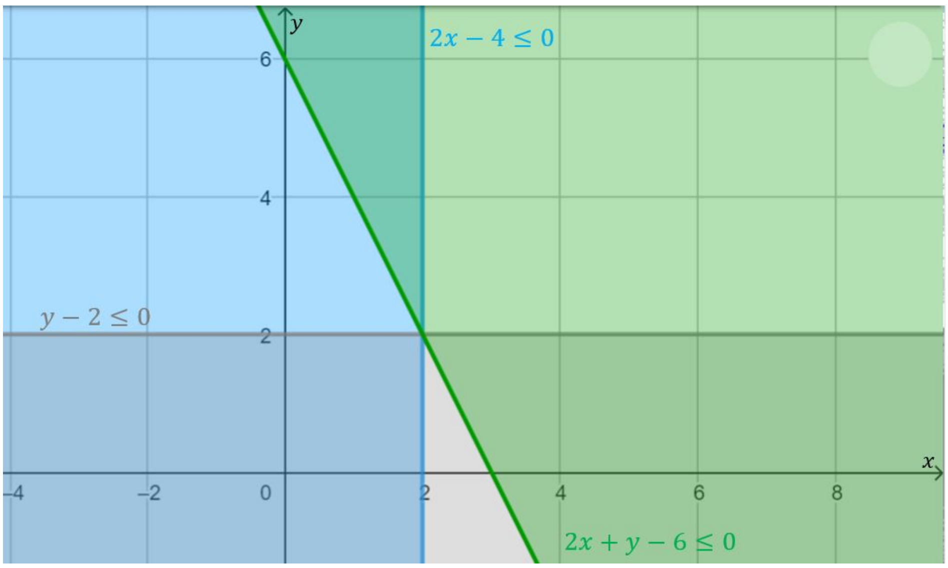

Za lažjo določitev polravnin, ki so del rešitev, neenačbe izrazimo v eksplicitni obliki:

$$y \geq -2x + 6$$

$$x \leq 2$$

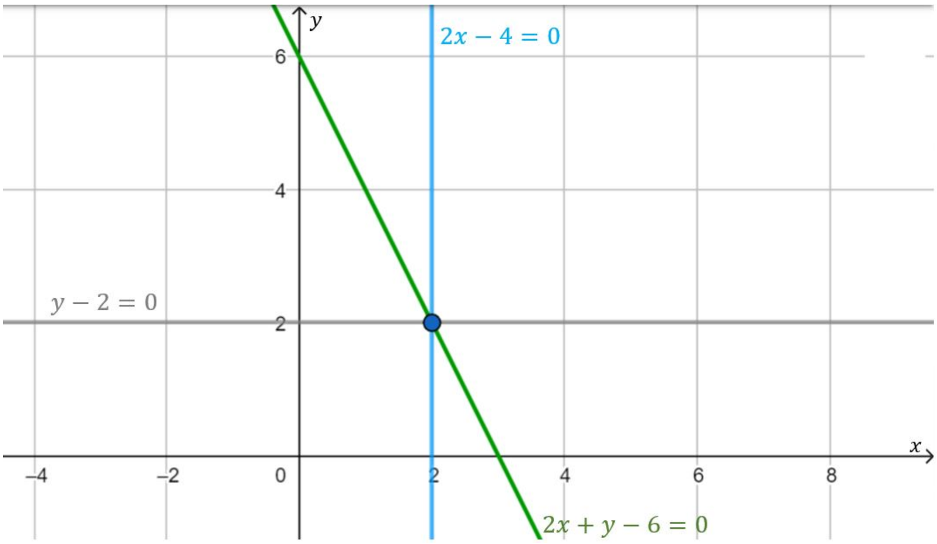
$$y \leq 2$$

Slika 8: Grafično reševanje sistema neenačb



Upoštevamo še zadnji dve neenačbi $x \geq 0$ in $y \geq 0$, ki določata, da se množica rešitev sistema nahaja v prvem kvadrantu koordinatnega sistema. Množica rešitev danega sistema neenačb je presek vseh polravnin, ki so rešitev podanih neenačb.

Slika 9: Grafično reševanje sistema neenačb




Sistem ima natanko eno rešitev in to je točka s koordinatama $x = 2$ in $y = 2$.

**Primer 19:**

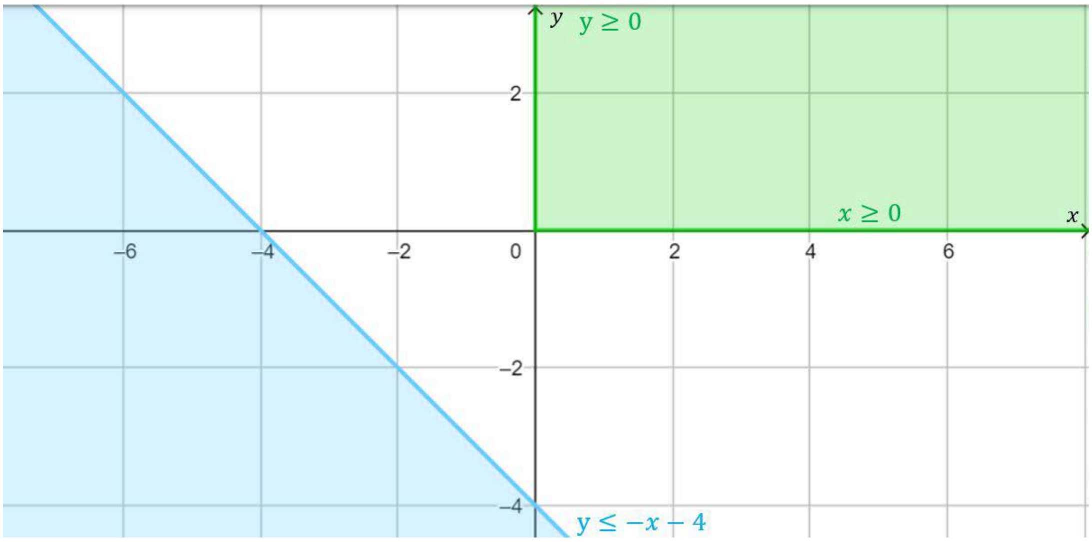
Rešite sistem neenačb:

$$x + y + 4 \leq 0$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Rešitev:**

V koordinatni sistem narišemo premico $x + y + 4 = 0$ in označimo ustrezno polravnino ($y \leq -x - 4$, torej je rešitev polravnina pod premico). Upoštevamo še neenačbi $x \geq 0$ in $y \geq 0$, ki določata, da se rešitev nahaja v prvem kvadrantu koordinatnega sistema. Ker dobljena polravnina nima nobene skupne točke s prvim kvadrantom (presek je prazna množica), sistem nima rešitve.

Slika 10: Grafično reševanje sistema neenačb



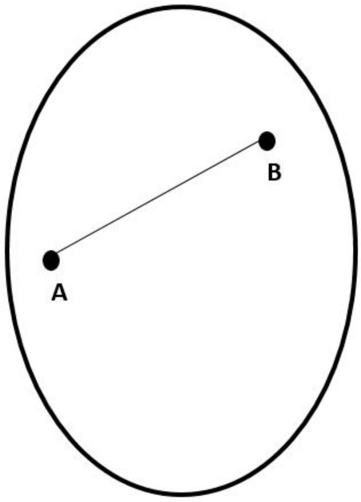

Kot je bilo predstavljeno v treh primerih tega poglavja, ima lahko vsak sistem linearnih neenačb neskončno rešitev, natanko eno rešitev ali pa nima nobene rešitve.

## 2.4 Konveksne množice

Množica točk $\Omega$ je konveksna, če za poljubni točki $A$ in $B$ v množici velja: daljica $AB$ je element množice $\Omega$. Pri obravnavi sistema linearnih enačb ali neenačb velja: množica rešitev sistema linearnih neenačb je konveksna množica.

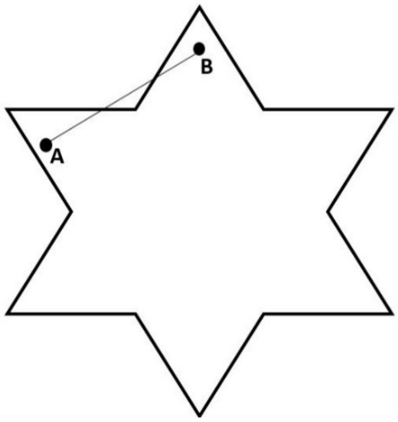
Za primer vzemimo množico točk v obliki elipse. Vsaka elipsa je konveksna množica točk, ker velja: za poljubni točki $A$ in $B$ v elipsi ali na njej bo tudi celotna daljica $AB$, ki povezuje izbrani točki, v celoti ležala znotraj elipse.

Slika 11: Preizkus konveksnosti elipse




Lik v obliki zvezde ni konveksna množica točk, ker obstajata takšni točki $A$ in $B$, ki ležita znotraj lika, da daljica $AB$, ki ju povezuje, ne leži v celoti v liku zvezde.

Slika 12: Preizkus konveksnosti zvezde



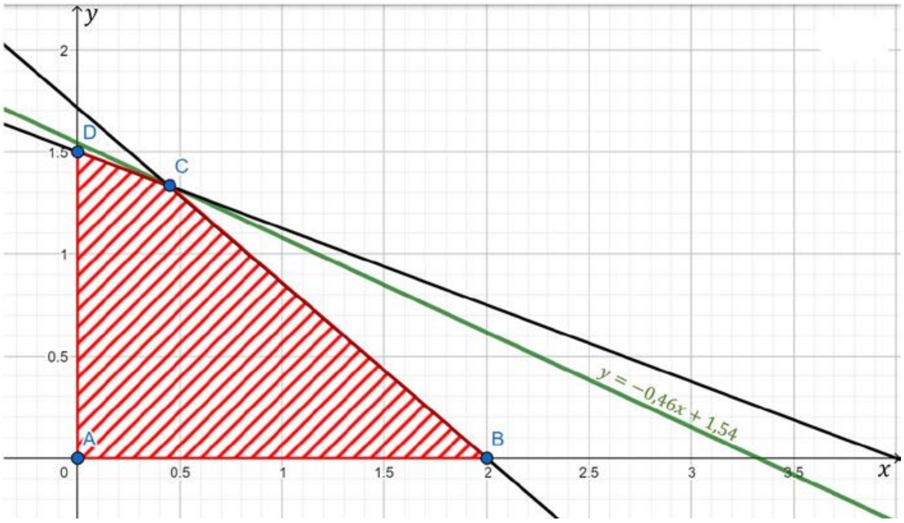

Vsa oglišča konveksnega lika imenujemo ekstremne točke konveksnega lika. Vse ostale točke (npr. vse notranje točke) konveksnega lika pa imenujemo neekstremne točke.

## 2.5 Linearna funkcija na konveksni množici

Definirajmo še linearno funkcijo na konveksni množici. Linearna funkcija $f(x)$ ima na konveksni množici svoj ekstrem (maksimum oz. minimum). Ta se lahko pojavi (ali pa sploh ne) na več načinov:

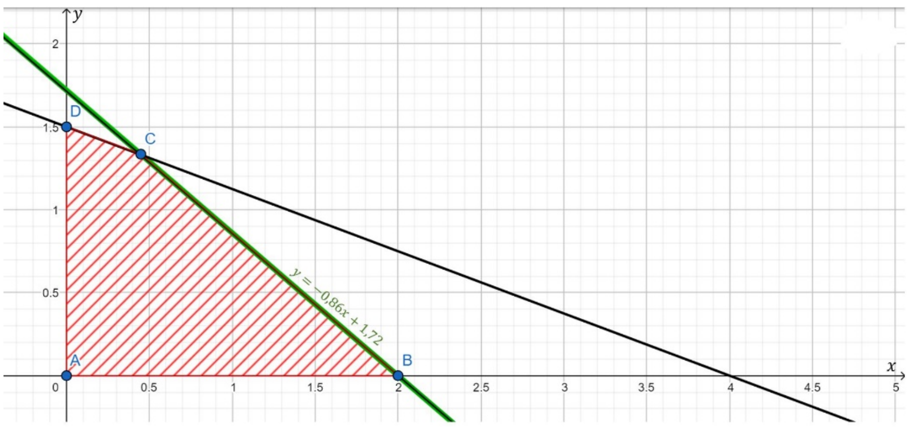
- v eni točki, in sicer v eni od ekstremnih točk konveksne množice, na kateri je definirana (slika 13):

Slika 13: En ekstrem funkcije na množici dopustnih rešitev



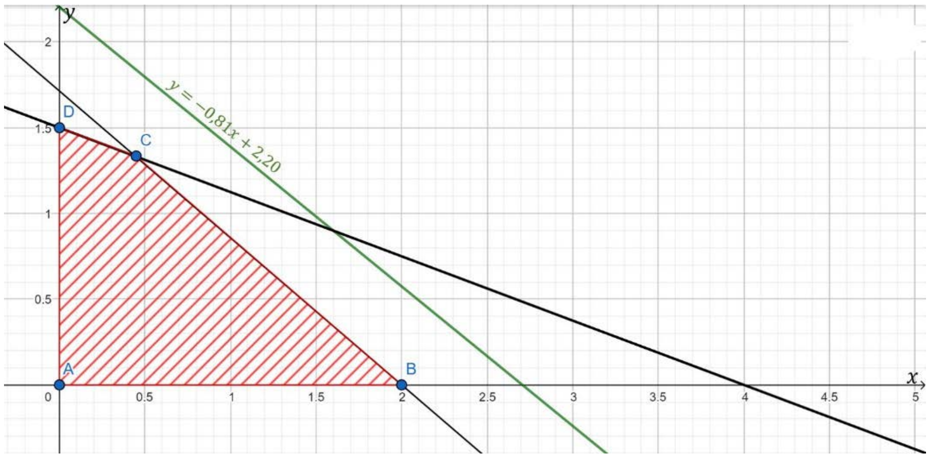

- neskončno točkah, in sicer na daljici med dvema ekstremnima točkama, v katerih linearna funkcija doseže isto ekstremno vrednost (slika 14):

*Slika 14: Ekstrem funkcije na daljici med dvema ekstremnima točkama*




- nima ekstrema, in sicer v primeru, ko ustrezen sistem linearnih neenačb nima rešitev (slika 15):

Slika 15: Funkcija na dani množici nima ekstrema




Velja torej: ekstreme (minimum ali maksimum) funkcije iščemo v ogliščih konveksne množice točk ali pa na daljicah med ekstremnimi točkami, na katerih je funkcija definirana.

**Primer 20:**

Določite ekstreme linearne funkcije $f(x, y) = 2x + y$ na konveksni množici definirani s sistemom neenačb:

$$2x + 3y - 16 \leq 0$$

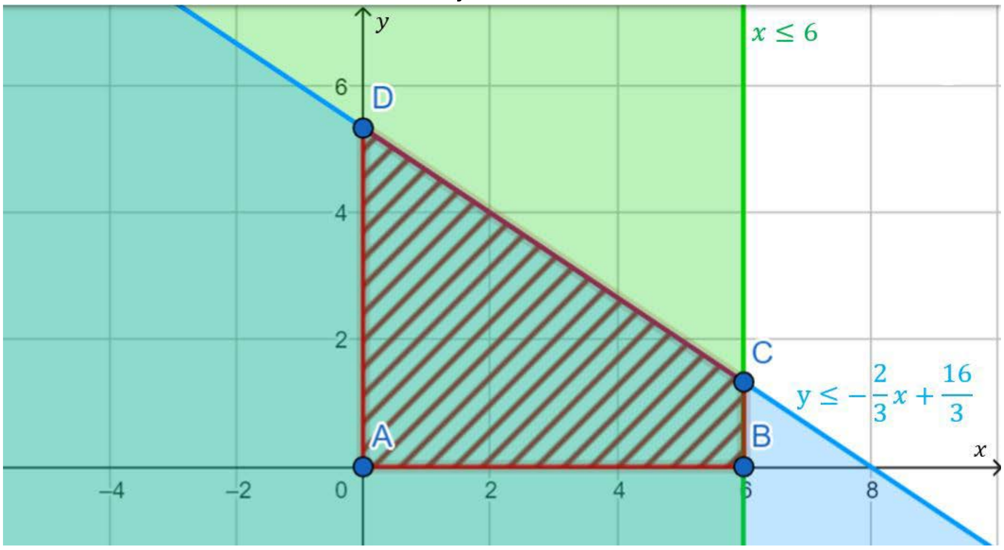
$$x \leq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Rešitev:**

V koordinatni sistem narišemo vse neenačbe. Presek neenačb bo konveksna množica, na kateri določimo ekstremne točke (oglišča konveksnega lika).

Slika 16: Iskanje konveksne množice




Točka $C$ je presečišče premic $x = 6$ in $2x + 3y - 16 = 0$. Za izračun natančnih koordinat točke je potrebno rešiti sistem dveh enačb z dvema neznankama. Vrednost $x = 6$ vstavimo v drugo enačbo in dobimo:

$$12 + 3y - 16 = 0$$
$$3y = 4$$
$$y = \frac{4}{3}$$

Točka $C$ ima tako koordinate $(6, \frac{4}{3})$.

Koordinate drugih ekstremnih točk pa preberemo z grafa:

$$A(0,0)$$
$$B(6,0)$$
$$D(0,6)$$

Za izračun vrednosti linearne funkcije $f(x, y) = 2x + y$ v ekstremnih točkah konveksne množice v podano linearno funkcijo vstavimo koordinate ekstremnih točk:

$$f(A) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$$
$$f(B) = 2 \cdot 6 + 0 = 12$$
$$f(C) = 2 \cdot 6 + \frac{4}{3} = 13,\overline{33}$$

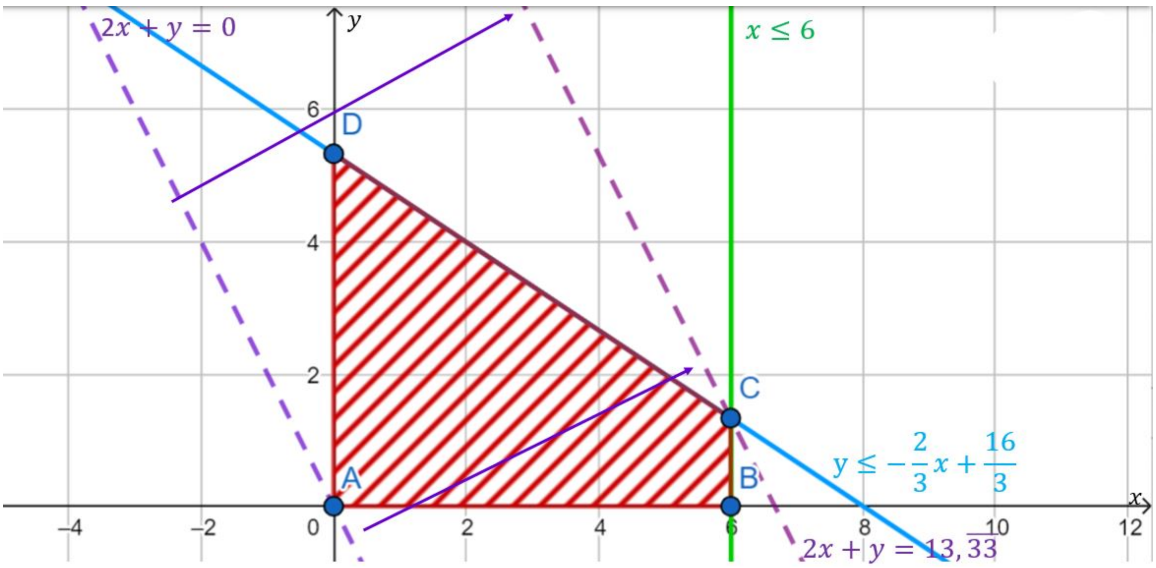
$$f(D) = 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

Funkcija zavzame na dani konveksni množici najmanjšo vrednost $0$ (minimum) v točki $A$, in največjo vrednost $13,\overline{33}$ (maksimum) v točki $C$.

Točki, v katerih dana funkcija doseže maksimalno oz. minimalno vrednost, bi lahko določili tudi na grafični način. V isti koordinatni sistem, kjer je že narisana konveksna množica, narišemo še premico z enačbo $f(x, y) = 0$.

V danem primeru je to premica $2x + y = 0$. Na spodnji sliki je predstavljena s premico vijolične barve. Da dobimo točko, v kateri dana funkcija doseže maksimum, moramo to premico vzporedno premakniti čim višje, pri čemer moramo upoštevati, da mora imeti premica vsaj eno skupno točko s konveksno množico (črtkana vijolična premica).

Slika 17: Grafično iskanje ekstrema linearne funkcije definirane na konveksni množici




Točka, v kateri funkcija doseže maksimum je točka $C$. Če bi premico funkcije $f(x, y)$ premaknili še višje od te točke, s konveksno množico $ABCD$ ne bi imela nobene skupne točke več. Torej iskana funkcija doseže maksimum v točki $C(6, \frac{4}{3})$, in sicer je njena vrednost $f(C) = 2 \cdot 6 + \frac{4}{3} = 13,\overline{33}$.

Minimum pa bo funkcija dosegla v točki, ki jo določimo tako, da premico namenske funkcije vzporedno premaknemo čim nižje, pri čemer moramo zopet upoštevati, da mora premica obdržati vsaj eno skupno točko s konveksno množico.

Na sliki 17 vidimo, da je točka, v kateri funkcija doseže minimum točka $A$. Če bi premico premaknili še nižje, s konveksno množico $ABCD$ ne bi imela nobene skupne točke več. Torej funkcija doseže minimum v točki $A(0,0)$ in sicer je njena vrednost v točki $f(A) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$.

**Primer 21:**

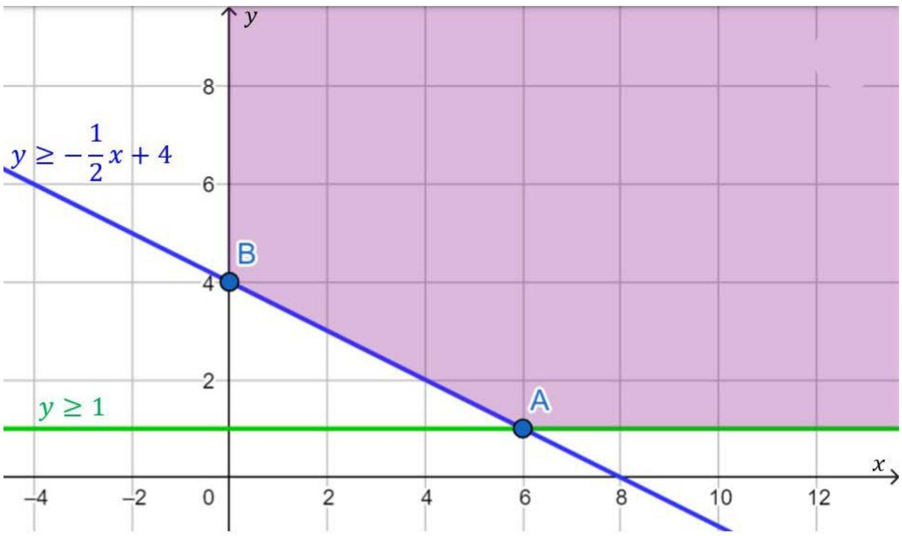
Določite ekstreme linearne funkcije $f(x, y) = 2x + 4y$ na konveksni množici, definirani s sistemom neenačb:

$$2x + 4y - 16 \geq 0$$
$$y \geq 1$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Rešitev:**

V koordinatni sistem narišemo vse neenačbe. Presek polravnin, ki so njihove rešitve, pa je konveksna množica, na kateri določimo ekstremne točke (oglišča konveksnega lika).

Slika 18: Iskanje ekstrema funkcije na konveksni množici



Točka $A$ je presečišče premic $y = 1$ in $2x + 4y - 16 = 0$. Za izračun natančnih koordinat te točke rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama. Vrednost $y = 1$ vstavimo v drugo enačbo:

$$2x + 4 - 16 = 0$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

Točka $A$ ima tako koordinate $(6,1)$.

Koordinati druge ekstremne točke pa preberemo iz grafa:

$$B(0,4)$$

Izračunamo vrednosti linearne funkcije $f(x,y) = 2x + 4y$ v obeh ekstremnih točkah konveksne množice:

$$f(A) = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 16$$
$$f(B) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16$$

Da določimo ali dobljeni točki predstavljata minimum ali maksimum funkcije, je potrebno izračunati še vrednost funkcije v poljubni neekstremni točki konveksne množice.

Izračunamo vrednost funkcije npr. v točki s koordinatama $(5,5)$:

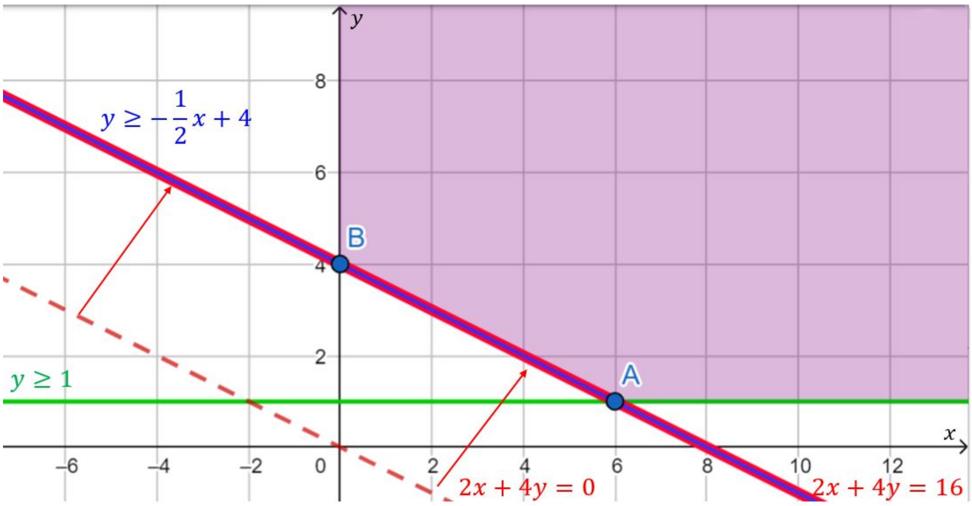
$$f(5,5) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 30$$

Ker je vrednost funkcije v izbrani neekstremni točki konveksne množice večja od vrednosti funkcije v ekstremnih točkah, funkcija v ekstremnih točkah zavzame minimum. Dana funkcija zavzame na dani konveksni množici najmanjšo vrednost $16$ (minimum) v vseh točkah daljice $AB$. Maksimum funkcije pa na dani konveksni množici ne obstaja, saj je neomejena v eni smeri.

Točke, v katerih dana funkcija doseže minimalno vrednost, bi lahko določili tudi na grafični način. V koordinatni sistem kjer je narisana konveksna množica narišemo še premico z enačbo $f(x,y) = 0$. V danem primeru je to premica $2x + 4y = 0$.

Na spodnji sliki je premica namenske funkcije predstavljena z rdečo premico. Da dobimo točko, v kateri dana funkcija doseže minimum, premico vzporedno premaknemo čim nižje na množici dopustnih rešitev, pri čemer upoštevamo, da mora pri tem imeti vsaj eno skupno točko s konveksno množico.

Slika 19: Iskanje ekstrema funkcije na konveksni množici




Vidimo, da so točke, kjer funkcija doseže minimum, vse točke na daljici $AB$. Če premico premaknemo še nižje, s konveksno množico ne bo imela nobene skupne točke več. Torej funkcija doseže minimum v vseh točkah daljice $AB$.

Maksimum bi funkcija dosegla v točki, ki bi jo dobili tako, da bi rdečo premico vzporedno premaknili čim višje, pri tem bi morala premica imeti vsaj eno skupno točko s konveksno množico. Vendar ne glede na to, kako visoko premaknemo premico, bo ta vedno imela neskončno skupnih točk s konveksno množico. Tako ugotovimo, da dana konveksna množica nima maksimuma, saj je navzgor neomejena.

### 2.5.1 Dodatni primeri

**Primer 22:**

Grafično rešite dani sistem linearnih neenačb:

$$x + y - 3 \leq 0$$

$$x - 3 \geq 0$$

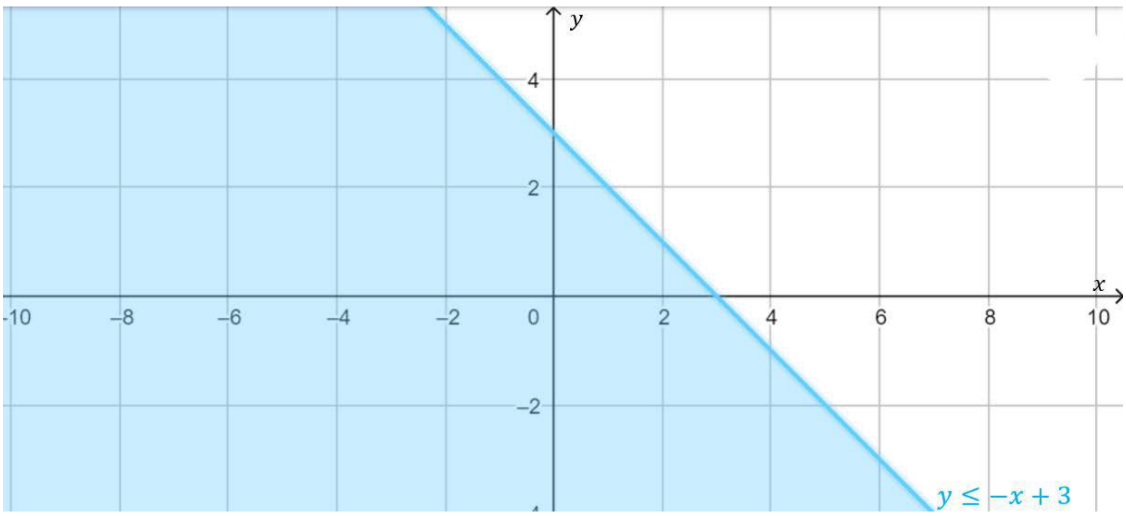
$$y \geq 0$$

**Rešitev:**

Rešitve posameznih neenačb v obliki polravnin narišemo v koordinatni sistem. Najprej narišemo premico z enačbo $x + y - 3 = 0$. Določimo presečišče dane premice z osjo $x$ (v enačbo vstavimo vrednost $y = 0$ in dobimo vrednost $x = 3$) in z osjo $y$ (v enačbo vstavimo vrednost $x = 0$ in dobimo vrednost $y = 3$). Skozi dani točki $(3, 0)$ in $(0, 3)$ narišemo premico (slika 20). Določimo še, katera polravnina je rešitev neenačbe $x + y - 3 \leq 0$.

Če neenačbo preoblikujemo v eksplicitno obliko, tako da izpostavimo neznanko $y$, dobimo naslednjo obliko neenačbe: $y \leq -x + 3$. Zaradi dejstva, da je vrednost neznanke $y$ $\leq$ od funkcijskega predpisa premice, ležijo rešitve neenačbe (iskana polravnina) pod narisano premico (slika 20). Lahko pa si pomagamo tudi z vrednostjo $c$, tako da neenačbo pomnožimo z $-1$: $-x - y + 3 \geq 0$. Vrednost $c = 3$, torej $c > 0$, zato je rešitev polravnina, ki vsebuje izhodišče koordinatnega sistema.

Slika 20: Sistem linearnih neenačb

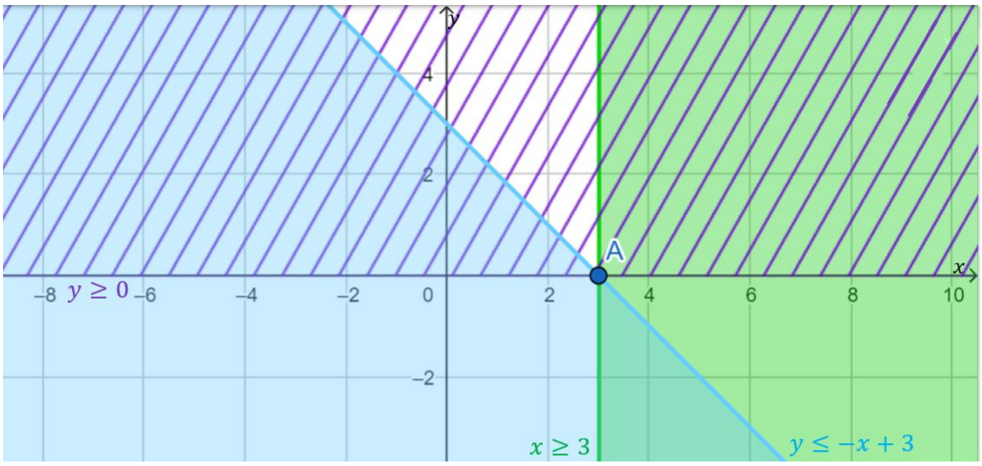


Na isti način narišemo še preostali polravnini, ki predstavljata rešitvi zadnjih dveh neenačb.

Da dobimo rešitev neenačbe $x - 3 \geq 0$ narišemo najprej premico $x = 3$, neenačbo pa preoblikujemo v izraz oblike $x \geq 3$. Dano neenačbo definirajo vse točke, ki se nahajajo desno od narisane premice $x = 3$.

Rešitev neenačbe $y \geq 0$ predstavlja polravnina, ki leži na $x$ osi in nad njo. Vse tri polravnine, ki predstavljajo rešitev danih treh neenačb, so predstavljene na sliki 21. Iz slike je razvidno, da je presek vseh treh polravnin točka $(3, 0)$, ki predstavlja rešitev sistema danih neenačb.

Slika 21: Sistem linearnih neenačb




**Primer 23:**

V koordinatni sistem narišite konveksno množico točk, ki ustreza sistemu linearnih neenačb. Izračunajte koordinate njenih oglišč.

$$-5x + 3y \leq -9$$

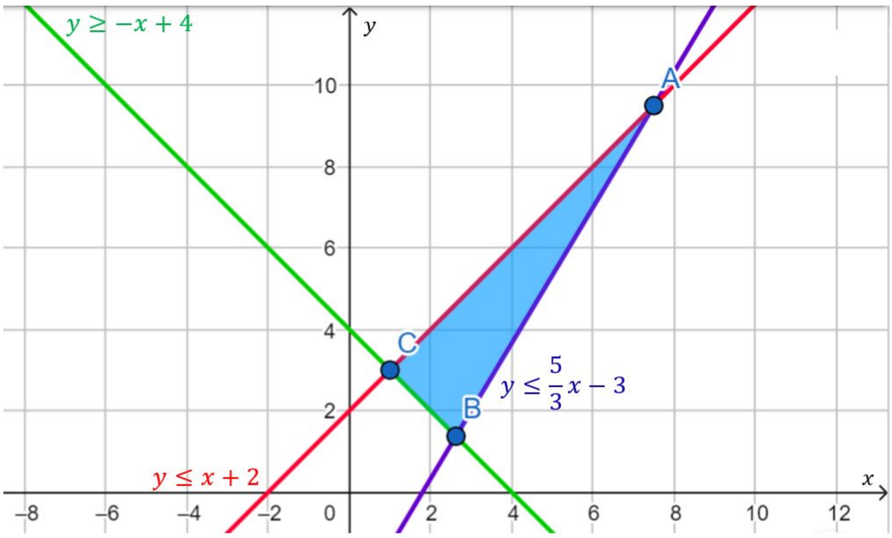
$$x + y \geq 4$$

$$-x + y \leq 2$$

$$y \geq 0$$

**Rešitev:**

Slika 22: Grafično iskanje konveksne množice




Ekstremne točke konveksne množice imajo koordinate: $A\left(\frac{15}{2}, \frac{19}{2}\right), B\left(\frac{21}{8}, \frac{11}{8}\right)$ in $C(1,3)$.

**Primer 24:**

V koordinatni sistem narišite konveksno množico točk, ki ustreza sistemu linearnih neenačb. Izračunajte koordinate njenih oglišč.

$$x - 2 \geq 1$$

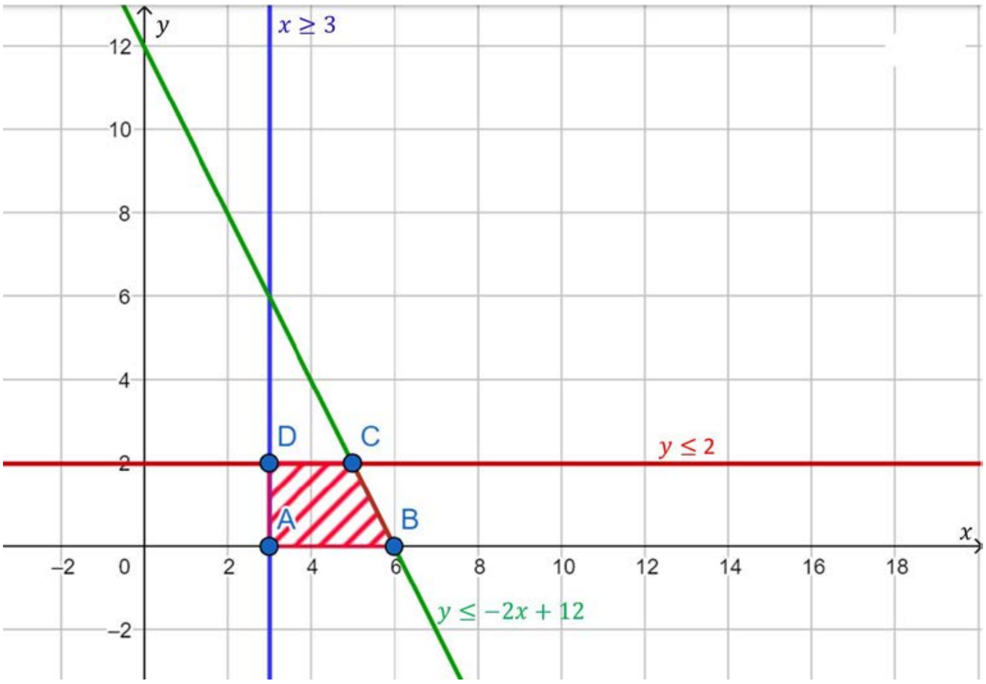
$$2x + y \leq 12$$

$$y \geq 0$$

$$y \leq 2$$

**Rešitev:**

Slika 23: Grafično iskanje konveksne množice




Ekstremi konveksne množice so v točkah: $A(3{,}0), B(6{,}0), C(5{,}2)$ in $D(3{,}2)$.

**Primer 25:**

Narišite množico točk v ravnini, ki zadoščajo danim neenačbam. Določite ekstremne točke te množice.

$$x + y \geq -3$$

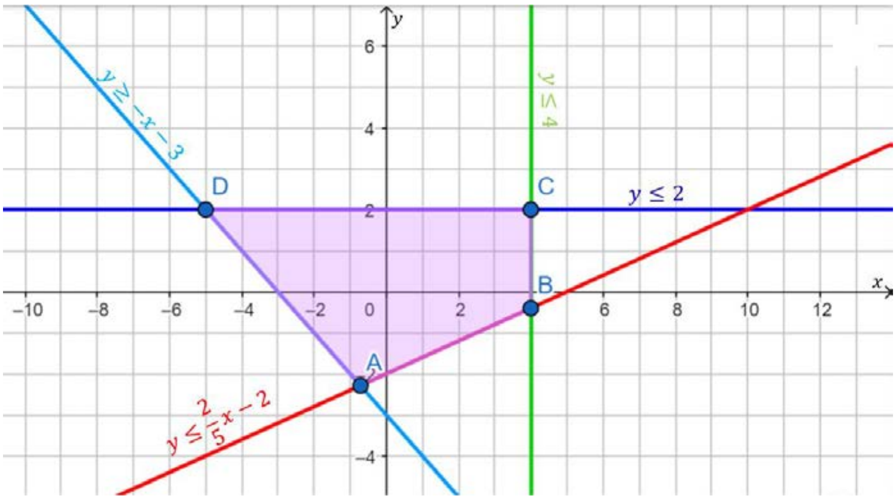
$$2x - 5y \leq 10$$

$$x \leq 4$$

$$y \leq 2$$

**Rešitev:**

Slika 24: Grafično iskanje konveksne množice




Koordinate ekstremnih točk so naslednje: $A\left(-\frac{5}{7}, -\frac{16}{7}\right)$, $B\left(4, -\frac{2}{5}\right)$, $C(4,2)$ in $D(-5,2)$.

# 3 LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje je matematična optimizacijska metoda, ki se uporablja za reševanje problemov s področja operacijskih raziskav. Uporablja se za t.i. optimizacijo z omejitvami[10]. Gre za iskanje najboljše rešitve (optimizacijo) danega problema pri danih pogojih, npr. maksimiranje dobička pri danih produkcijskih in tržnih omejitvah. V praksi se linearno programiranje uporablja v številnih aplikacijah na raznovrstnih področjih: v ekonomiji, financah, bančništvu, logistiki, statistiki, uporabni matematiki, organizaciji proizvodnje, razporejanju dobrin in še bi lahko naštevali.

Linearno programiranje je metoda, ki omogoča poiskati optimalno (maksimalno ali minimalno) vrednost izbranih odločitvenih spremenljivk, ki zadoščajo danim omejitvam. Z definicijo linearnega programa in metodami za njegovo reševanje se ukvarja mnogo učbenikov in spletnih strani, na primer (Vadnal, 1977; Singiresu, 1996; Usenik, 2007). V gradivu se pri definiciji opiramo na nekatere definicije in oznake, ki jih je v učbeniku *Kvantitativne metode v logistiki* (2007) uporabil zasl. prof. ddr. Janez Usenik. V večini učbenikov se oznake in definicije med seboj ne razlikujejo več kot v posameznih podrobnostih. Razlikujejo pa se koncepti približevanja obravnavane tematike.

Vsak linearni program sestavljajo tri osnovne komponente:

- namenska funkcija;
- odločitvene spremenljivke;
- omejitve.

**Namenska funkcija linearnega programa[11]**

predstavlja cilj, ki ga želimo doseči z optimizacijo. Cilj linearnega programa je maksimirati (npr. količino prepeljanega tovora, dobiček pri prodaji, …) ali minimirati (npr. stroške v podjetju, število zaposlenih v izmeni, …) neko številčno vrednost.

[10] Constrained optimization
[11] Objective function

Namenska funkcija kaže, koliko vsaka spremenljivka prispeva k vrednosti, ki jo je potrebno optimizirati. Splošna oblika namenske funkcije $z$ je:

$$\text{min ali max}\, z\,(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

pri čemer $c_i$ predstavlja koeficient funkcije, ki ustreza odločitveni spremenljivki $x_i$ in $x_i$ predstavlja odločitveno spremenljivko problema.

**Odločitvene spremenljivke**[12]

predstavljajo nabor količin, ki jih je potrebno določiti, da rešimo problem. Po navadi so to tiste količine, na katere lahko vplivamo. Problem je rešen, ko so ugotovljene najboljše vrednosti spremenljivk. Običajno spremenljivke predstavljajo količino uporabljenega vira, količino potrebnih izdelkov, ki jih je potrebno proizvesti, količino koristi itd.

**Omejitve**

V večini primerov so možne le nekatere vrednosti spremenljivk, zato je potrebno postaviti (spodnje in/ali zgornje) meje, v katerih se lahko gibajo vrednosti spremenljivk. Omejitve izražajo realne omejitve glede proizvodne zmogljivosti, tržnega povpraševanja itd. V primerih, ko linearni program predstavlja realni problem, se pojavi še pogoj nenegativnosti, saj je nemogoče proizvesti ali prepeljati na nek kraj negativno število izdelkov.

Večina avtorjev linearni program v matematični obliki zapiše na naslednji način:

$$\begin{aligned}
\text{Optimum namenske funkcije: } & \text{opt}\, z(x_1, x_2, \dots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{pri omejitvah: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lesseqgtr b_2 \\
& \qquad \dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lesseqgtr b_m
\end{aligned}$$

[12] Variables

pogoj nenegativnosti: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

kjer $opt$ predstavlja ali minimum ali maksimum funkcije, znak $\lesseqqgtr$ pa pomeni ali $<$, $\leq$, $\geq$, $>$ ali $=$. Kateri znak nastopa v omejitvah, je odvisno od problema, ki ga linearni program obravnava.

Linearni program lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\text{opt}\, z = \mathrm{C} \cdot \mathrm{X}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} \lesseqqgtr \mathrm{B}$$

$$\mathrm{X} \geq 0$$

kjer je:

$\mathrm{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$ vrstični vektor koeficientov namenske funkcije,

$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ stolpični vektor odločitvenih spremenljivk,

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ osnovna matrika sistema neenačb, ki predstavlja koeficiente omejitev linearnega programa in

$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ stolpični vektor prostih členov neenačb, ki predstavlja vrednosti omejitev linearnega programa.

Osnovna značilnost linearnega programa je, da je namenska funkcija linearna in da so tudi vse omejitvene neenačbe oz. enačbe linearne. Ravno zaradi te lastnosti metodo imenujemo linearno programiranje.

Z linearnim programiranjem sta povezana dva osnovna koncepta: dopustna rešitev in optimalna rešitev.

Dopustna rešitev linearnega programa je množica vseh rešitev, ki rešijo linearni program tako, da zadovoljijo vsem pogojem. Kot bomo videli v nadaljevanju, je množica dopustnih rešitev lahko:

- neomejeno konveksno področje na grafu (ali pa neomejena množica števil) ali
- omejeno konveksno področje na grafu (ali omejena množica števil).

V primeru iskanja maksimuma namenske funkcije je optimalna rešitev območje, kjer funkcija zavzame največjo vrednost. V primeru iskanja minimuma namenske funkcije pa je optimalna rešitev v točki, kjer funkcija zavzame najmanjšo vrednost. V nadaljevanju predstavljamo nekaj primerov linearnega programiranja, s katerimi se v logistiki pogostokrat srečujemo:

- proizvodni problem;
- prehrambeni problem ali problem mešanja;
- investicijski problem;
- problem nahrbtnika;
- problem trezorja;
- lokacijski problem;
- transportni problem.

# 4 PROIZVODNI PROBLEM

Podjetja, ki proizvajajo široko paleto izdelkov, imajo pogosto težave pri določanju optimalnega proizvodnega programa. Optimalni proizvodni ali prodajni program pomeni kombinacijo izdelkov, oziroma količino posameznih izdelkov, ki bo podjetju prinesla največji dobiček. Podjetje je običajno odvisno od različnih omejitev pri surovinah, delovni sili in proizvodnih zmogljivosti, razpoložljivih v proizvodnem procesu.

V tem poglavju predstavljamo probleme, pri katerih bo cilj ugotoviti, koliko kosov posameznega izdelka iz prodajnega programa naj podjetja proizvedejo, da bo ob danih omejitvah njihov dobiček največji. Tak problem imenujemo proizvodni problem. Seveda z nazivom proizvodni problem ne imenujemo samo problemov iz proizvodnje, ampak tudi ostale probleme sorodne narave, kjer iščemo maksimum namenske funkcije.

Proizvodni problem[13] obravnava mnogo učbenikov (Vadnal, 1977, Usenik, 2007). Kljub temu, da se poimenovanje problema pri različnih avtorjih razlikuje, avtorji opisujejo enak problem in uporabljajo podobne primere. Formulacijo proizvodnega problema bomo predstavili z naslednjim zgledom.

**Primer 26:** (povzeto po Usenik, 2007)
Podjetje Logistika, d.o.o., pakira vložene paprike in kumarice. Oboje poteka v dveh fazah: polnjenje kozarcev in opremljanje kozarcev z etiketo. Za kozarec vložene paprike potrebujejo: 1 minuto za polnjenje in 2 minuti za opremljanje. Za kozarec vloženih kumaric pa potrebujejo: 2 minuti za polnjenje in 1 minuto za opremljanje.

Delavec, ki polni kozarce, je na razpolago 35 minut v vsaki uri; delavec, ki opremlja kozarce pa je na razpolago 40 minut v vsaki uri.

Podjetje ima pri prodaji kozarca paprike po odštetih vseh stroških dobiček 30 centov in pri prodaji kozarca kumaric 20 centov. Koliko kozarcev vložene paprike

[13] Production problem

in koliko kozarcev kumaric naj podjetje proizvaja v eni seriji (eni uri), če želi doseči čim večji dobiček?

Uredimo dane podatke v preglednico:

| | Paprike | Kumarice | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Polnjenje [min] | 1 | 2 | 35 |
| Opremljanje [min] | 2 | 1 | 40 |
| Dobiček [€] | 0,30 | 0,20 | |
| Količina izdelkov [število kosov] | $x$ | $y$ | |

Reševanja proizvodnega problema se lotimo po naslednjem postopku:
1. korak: določimo odločitvene spremenljivke in določimo namensko funkcijo,
2. korak: formuliramo linearni program,
3. korak: določimo omejitve,
4. korak: rešimo linearni program.

***Določitev odločitvenih spremenljivk***

V vsakem linearnem programu morajo odločitvene spremenljivke v celoti opisati odločitev, ki jo želimo z linearnim programom sprejeti. V danem primeru želimo določiti število kozarcev posamezne vrste zelenjave, ki naj jih podjetje Logistika, d.o.o., napolni:

$$x - število\ kozarcev\ vložene\ paprike$$

$$y - število\ kozarcev\ vloženih\ kumaric$$

***Določitev namenske funkcije***

Odločevalec želi s pomočjo linearnega programa za proizvodni problem maksimirati (običajno dobiček) funkcijo odločitvenih spremenljivk. Namenska funkcija v predstavljenem primeru predstavlja skupni dobiček pri prodaji vložene paprike in kumaric:

- dobiček z enim kozarcem vložene paprike je 30 centov, torej je dobiček z $x$ kozarci vložene paprike $30x$;
- dobiček z enim kozarcem vloženih kumaric je 20 centov, torej je dobiček z $y$ kozarci kumaric $20y$;

- dobiček z polnjenjem $x$ kozarcev paprike in $y$ kozarcev kumaric je (v primeru, da se vsi kozarci tudi prodajo) torej:

$$30x + 20y$$

Ker želijo v podjetju čim večji zaslužek s polnjenjem, iščemo maksimum namenske funkcije:

$$\max z(x, y) = 30x + 20y$$

***Določitev omejitev***

Pri proizvodnji vseh vrst izdelkov so podjetja in posamezniki omejeni. Omejitve se lahko nanašajo na število ur, ko so delavci na delovnem mestu, s številom izdelkov, ki so jih zaradi pogodbe dolžni dobaviti do določenega datuma, ravno tako v podjetjih nimajo neskončnega števila zalog materiala za izdelke. Vse to je potrebno upoštevati, ko razmišljamo o omejitvah pri zapisu linearnega programa za proizvodni problem. V predstavljenem primeru so v podjetju omejeni s časom, ki ga imata delavca na voljo za izvedbo svojega dela.

Polnjenje kozarcev:

- za polnjenje enega kozarca paprike potrebuje delavec 1 minuto, torej za polnjenje $x$ kozarcev vložene paprike potrebuje $1x$ minut;
- za polnjenje enega kozarca kumaric delavec potrebuje 2 minuti, torej za polnjenje $y$ kozarcev vloženih kumaric potrebuje $2y$ minut;
- za polnjenje $x$ kozarcev paprike in $y$ kozarcev kumaric potrebuje skupno $x + 2y$ minut.

Časa za polnjenje kozarcev je na voljo le 35 minut v eni uri – torej lahko delavec polnjenju kozarcev nameni 35 minut ali manj, zato je omejitev za polnjenje kozarcev enaka: $x + 2y \leq 35$.

Opremljanje kozarcev:

- za opremljanje enega kozarca paprike delavec potrebuje 2 minuti, torej za opremljanje $x$ kozarcev vložene paprike potrebuje $2x$ minut;

- za opremljanje enega kozarca kumaric delavec potrebuje 1 minuto, torej za opremljanje $y$ kozarcev vloženih kumaric potrebuje $1y$ minut;
- za opremljanje $x$ kozarcev paprike in $y$ kozarcev kumaric delavec potrebuje skupno $2x+ \ y$ minut.

Časa za opremljanje kozarcev je na voljo le 40 minut v eni uri – torej lahko delavec opremljanju kozarcev nameni 40 minut ali manj, zato je omejitev za opremljanje kozarcev enaka: $2x+ \ y \leq 40$.

***Pogoj nenegativnosti***

Preden zaključimo linearni program, moramo odgovoriti na vprašanje o nenegativnosti vsake izmed odločitvenih spremenljivk. Lahko odločitvene spremenljivke zavzamejo tudi negativne vrednosti ali morajo biti strogo pozitivne?

V proizvodnem problemu nastopata spremenljivki $x$ in $y$, ki predstavljata število napolnjenih kozarcev posamezne vrste zelenjave. Ker ni mogoče napolniti negativnega števila kozarcev z zelenjavo, je to potrebno zapisati še v obliki pogoja za nenegativnost odločitvenih spremenljivk. Ker se lahko zgodi, da nekega izdelka ni smiselno proizvajati (npr. zaradi prevelike porabe sredstev in premajhnega zaslužka), ni nujno da so odločitvene spremenljivke strogo pozitivne, temveč so lahko tudi enake 0:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Linearni program** danega problema je torej:

$$\begin{aligned} & \max z\ (x,y) = 30x + 20y \\ \text{pri omejitvah:} \quad & x+\ 2y \leq 35 \\ & 2x+\ y \leq 40 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

## 4.1 Grafično reševanje proizvodnega problema

Probleme linearnega programiranja, v katerih nastopata le dve odločitveni spremenljivki, lahko rešimo z grafično metodo. Za primer vzemimo kar linearni program, ki smo ga zapisali za primer 26.

$$\max z(x, y) = 30x + 20y$$

pri omejitvah: $x + 2y \leq 35$

$$2x + y \leq 40$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

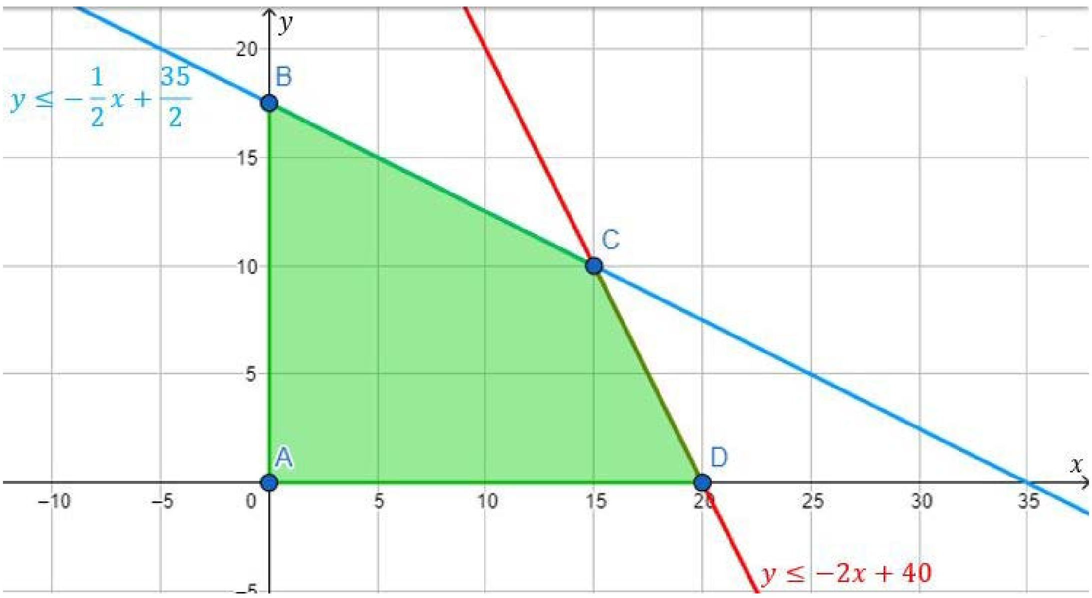
V koordinatni sistem narišemo množico vseh rešitev sistema linearnih neenačb, ki ga sestavljajo omejitve in pogoj nenegativnosti danega linearnega programa:

$$x + 2y = 35$$

$$2x + y = 40$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Slika 25: Množica rešitev sistema linearnih neenačb proizvodnega problema




Množica vseh rešitev danega sistema je konveksni lik $ABCD$. Vse točke znotraj konveksnega lika in na njegovih mejah zadoščajo vsem zapisanim omejitvam. Predstavljajo dopustne rešitve linearnega programa. Potrebno pa je poiskati tisto rešitev, ki hkrati zadošča tudi namenski funkciji.

Namenska funkcija $z(x, y) = 30x + 20y$ doseže maksimum v eni izmed ekstremnih točk (oglišč) konveksnega lika. V kateri točki pa se pojavi maksimum namenske funkcije, lahko določimo na računski (a) ali grafični način (b).

**a) Računski način**

Določimo koordinate vseh oglišč konveksnega lika. Koordinate točk $A$, $B$, in $D$ razberemo iz grafa:

$$A(0\ ,0)$$

$$B(0,\frac{35}{2})$$

$$D(20{,}0)$$

Točka $C$ pa se nahaja na presečišču premic $x +\ 2y = 35$ in $2x +\ y = 40$. Iz prve linearne enačbe izrazimo $y = \frac{35-x}{2}$ in ga vstavimo v drugo linearno enačbo:

$$\frac{35-x}{2} = 40 - 2x$$

$$35 - x = 80 - 4x$$

$$-x + 4x = 80 - 35$$

$$3x = 45$$

$$x = 15$$

Dobljeno vrednost $x$ vstavimo v eno izmed enačb premic:

$$40 - 2 \cdot 15 = 10$$

Dobimo točko $C(15{,}10)$.

Izračunamo vrednost namenske funkcije $z(x, y) = 30x + 20y$ v vsakem oglišču, saj se ekstrem nahaja le v ogliščih konveksnega lika:

$$z(A) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$$

$$z(B) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{35}{2} = 350$$

$$z(C) = 30 \cdot 15 + 20 \cdot 10 = 650$$

$$z(D) = 30 \cdot 20 + 20 \cdot 0 = 600$$

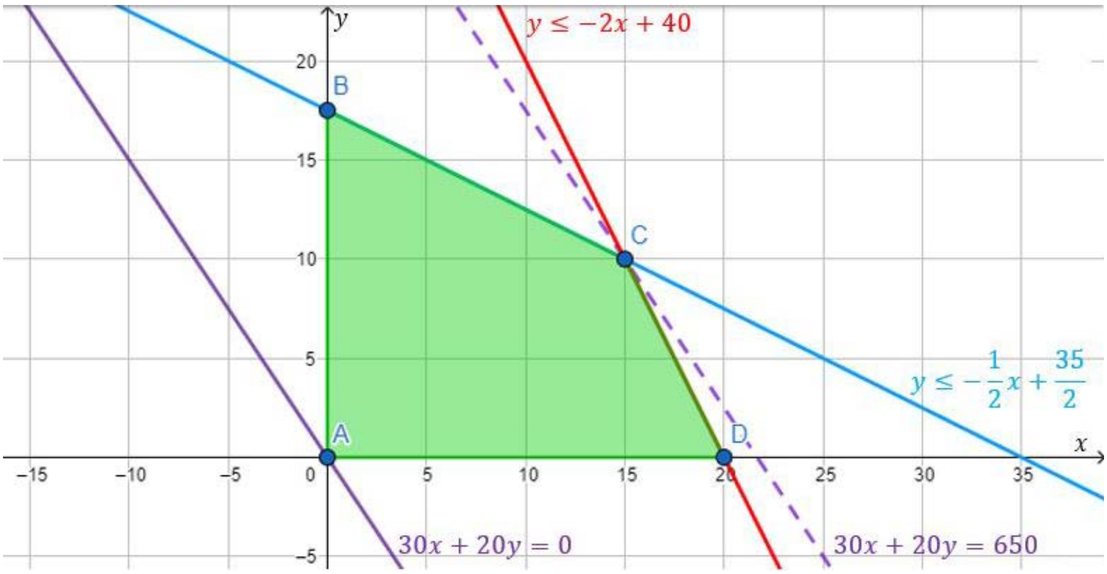
**Določimo maksimum namenske funkcije**

Namenska funkcija doseže maksimalno vrednost $650$ v točki $C(15,10)$.To pomeni, da bo imelo podjetje Logistika d.o.o. največji dobiček v primeru, ko bo v eni uri napolnilo 15 kozarcev vložene paprike in 10 kozarcev kumaric. Dobiček bo v tem primeru znašal 650 centov.

**b) Grafični način**

V koordinatni sistem s konveksnim likom $ABCD$ narišemo še namensko funkcijo z enačbo $z(x,y)=0$, torej $30x+20y=0$. Ker iščemo maksimum namenske funkcije, moramo to premico vzporedno premakniti čim višje (bolj v desno), vendar tako, da bo imela z likom $ABCD$ vsaj še eno skupno točko (na sliki 26 je vzporednica premice namenske funkcije narisana z vijolično črtkano premico).

Slika 26: Z vzporednim premikanjem namenske funkcije poiščemo maksimum




Vzporednica premice $z(x,y)=0$, se množice, omejene s točkami $ABCD$, dotika v točki $C$. To pomeni, da namenska funkcija doseže maksimum v točki $C$. Izračunamo koordinate točke $C$.

$C$ je presečišče premic $x + 2y = 35$ in $2x + y = 40$. Iz prve linearne enačbe izrazimo $y = \frac{35-x}{2}$ in ga vstavimo v drugo linearno enačbo. Dobimo enako rešitev, kot pri računskem delu: točko $C(15,10)$.

Maksimum namenske funkcije je enak $z(C) = 30 \cdot 15 + 20 \cdot 10 = 650$ . To pomeni, da bo imelo podjetje Logistika, d.o.o., največji dobiček v primeru, ko bo v eni uri napolnilo 15 kozarcev vložene paprike in 10 kozarcev kumaric. Dobiček bo v tem primeru znašal 650 centov.

## 4.2 Dodatne analize rešitve linearnega programa

### 4.2.1 Analiza optimalne rešitve proizvodnega problema

Ko smo zapisali omejitve linearnega programa za dani problem, smo dopustili možnost, da se nekateri viri ne porabijo do konca (poraba virov je lahko manjša ali enaka razpoložljivi količini). Čas za opremljanje kozarcev je v predstavljenem problemu omejen na 40 minut, čas za polnjenje pa na 35 minut.

Pomembno vprašanje, ki se zastavlja je, ali je čas, ki ga imajo delavci v podjetju na razpolago za posamezno dejavnost, v celoti porabljen. Izračunati je potrebno torej dejanski čas, ki je porabljen za izdelavo optimalnega števila izdelkov, ki ga pokaže rešitev linearnega programa.

Optimalna rešitev primera je, da naj podjetje napolni 15 kozarcev vložene paprike in 10 kozarcev kumaric v eni uri. To pomeni, da bodo za polnjenje porabili skupno $15 + 2 \cdot 10 = 35$ minut (test 1. omejitve problema), kar je točno toliko, kolikor časa ima na voljo delavec za polnjenje kozarcev v eni uri. Preostanek časa za polnjenje kozarcev je torej enak 0.

Na isti način ugotovimo, da je tudi ostanek časa za opremljanje kozarcev enak 0, saj je skupni čas za opremljanje enak $2 \cdot 15 + 10 = 40$ minut (test 2. omejitve problema), kar je enako času, ki ga ima delavec na razpolago za opremljanje v eni uri. Tudi preostanek časa za opremljanje kozarcev je torej enak 0.

To pomeni, da sta obe omejitvi aktivni, saj so viri (v tem primeru čas za izvedbo dejavnosti) porabljeni do konca. Za spremembo vrednosti namenske funkcije bi bilo potrebno spremeniti vrednost omejitve, torej količini časa, ki ga imata delavca na voljo. Ali povedano drugače: če želimo drugačno vrednost namenske funkcije, moramo spremeniti desne strani neenakosti pri omejitvah. V nasprotnem primeru – ko pri optimalnem proizvodnem planu niso porabljeni vsi viri, ki so na voljo, pravimo, da so omejitve neaktivne.

### 4.2.2 Analiza občutljivosti optimalne rešitve

Ko linearni program uspešno rešimo in dobimo optimalno rešitev problema, se pojavi vprašanje ali je ta optimalna rešitev občutljiva na spremembe vhodnih parametrov in kako spremembe vplivajo na optimalno rešitev.

Vzroki za pojav tega vprašanja so lahko različni. Vhodni parametri kot so omejitve časa, surovin ali števila delavcev so navadno samo ocene, ki so lahko bolj ali manj natančne. Zato je med tekom proizvodnje pričakovati njihove spremembe. Tudi dobiček ali stroški se lahko pri proizvodnji spreminjajo, zato je pri planiranju proizvodnje dobro predvideti takšne spremembe.

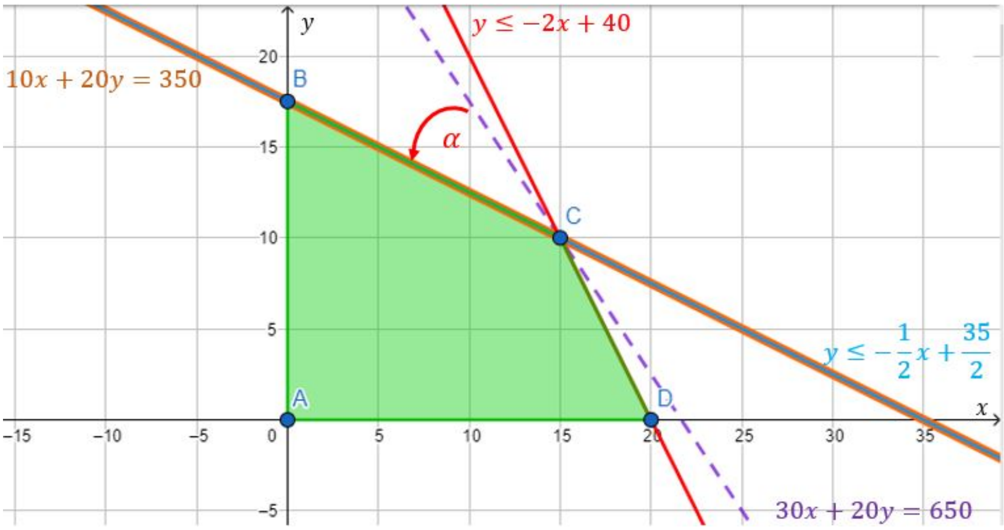
Ogledali si bomo dve vrsti analize občutljivosti in sicer: analizo koeficientov namenske funkcije in analizo desnih strani neenakosti pri omejitvah.

#### 4.2.2.1 Analiza koeficientov namenske funkcije

Optimalna rešitev linearnega programa bo navkljub spremembam koeficientov namenske funkcije ostala nespremenjena tako dolgo, dokler se bo posamezni koeficient nahajal v t. i. območju optimalnosti, drugi parametri programa pa se ne bodo spreminjali. Seveda se bo s spreminjanjem koeficientov spreminjala tudi vrednost namenske funkcije.

Oglejmo si sliko z rešitvijo obravnavanega proizvodnega problema. Na njej vidimo, da namenska funkcija ob postavljenih omejitvah doseže maksimum 650 centov v točki $C$. Kaj se zgodi, če koeficiente namenske funkcije spremenimo?
Spomnimo, da koeficienti v enačbi premice določajo strmino (naklon) premice. S spremembo koeficientov namenske funkcije spreminjamo naklon premice namenske funkcije.

Slika 27: Spreminjanje naklona (bolj položna) namenske funkcije

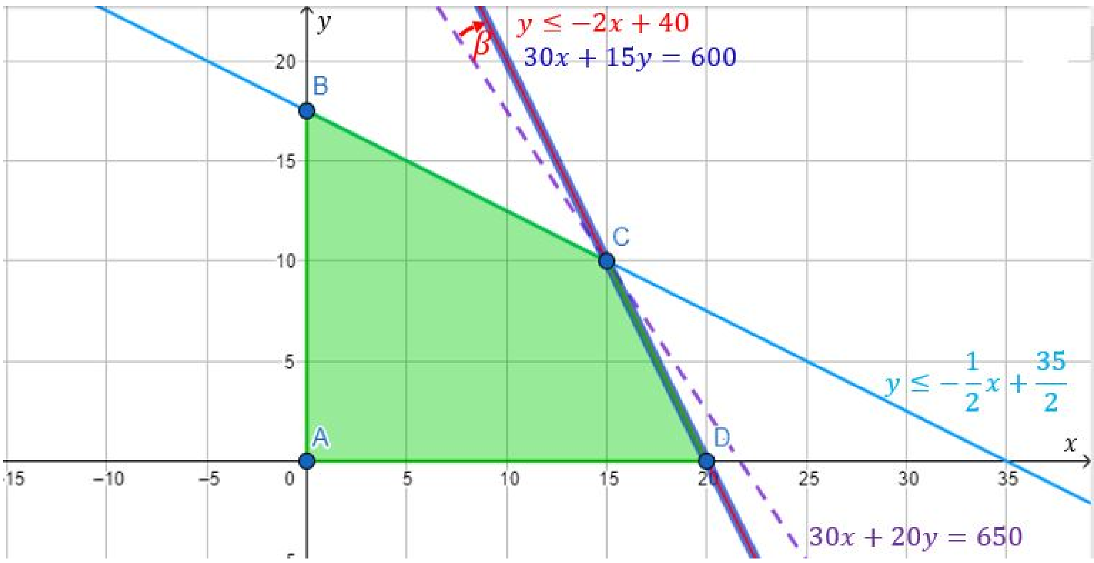



Do katerih vrednosti se lahko koeficienti namenske funkcije spreminjajo, da bo točka $C$ še vedno optimalna rešitev problema?

Premico namenske funkcije zavrtimo v točki $C$ tako, da postaja vedno bolj položna. Če premico zavrtimo za kot $\alpha$, ugotovimo, da bo premica namenske funkcije v nekem trenutku prekrila premico, ki poteka skozi točko $B$, in predstavlja eno izmed podanih omejitev. V tem trenutku točka $C$ ni več edina optimalna rešitev problema. Rešitev je postala tudi točka $B$ in vse točke med $B$ in $C$. Če želimo premico, ki bi bila še bolj položna, premice ne vrtimo več v točki $C$, temveč v točki $B$. Tako postane točka $B$ edina rešitev problema. Posledično se spremeni tudi optimalna rešitev linearnega programa.

Isto lahko sedaj naredimo še v drugo smer. Premico namenske funkcije obračamo okoli točke $C$ tako, da bo vedno bolj strma. Premico zavrtimo za kot $\beta$, dokler premica namenske funkcije ne prekriva premice, ki poteka skozi točko $D$ in predstavlja drugo omejitev problema.

Slika 28: Spreminjanje naklona (bolj strma) namenske funkcije




Iz zgornjih dveh slik vidimo, da smo koeficiente premice v obeh primerih spremenili, tako da so zavzeli vrednost izven območja optimalnosti. Toda kakšne so njihove vrednosti?

Posvetimo se koeficientu pri odločitveni spremenljivki $x$. Izračunati je potrebno, kolikšna je vrednost tega koeficienta v primeru, ko premica namenske funkcije poteka skozi točko $B$. Pri tem upoštevamo, da mora koeficient pri odločitveni spremenljivki $y$ ostati nespremenjen, torej želimo poiskati enačbo oblike

$$0 = kx + 20y,$$

kjer bo $k$ nov spremenjeni koeficient.

Na sliki 27 vidimo, da premica poteka skozi točki $B$ in $C$. Da dobimo enačbo premice, ki poteka skozi ti dve točki, najprej izračunamo njen smerni koeficient. Računamo po enačbi:

$$k^{14} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

[14] Splošni izraz za izračun smernega koeficienta premice je $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. V primeru točk s koordinatama $(x_1, y_1)$ in $(x_2, y_2)$ izračunamo $k$ kot razliko med drugo in prvo točko: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

V primeru, kjer sta $B(0,\frac{35}{2})$ in $C(15{,}10)$ velja

$$k = \frac{10 - \frac{35}{2}}{15 - 0} = \frac{-\frac{15}{2}}{15} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Enačba nove premice je tako: $y = -0{,}5x + n$.

Iz grafa vidimo, da premica $y$ seka ordinatno os v točki $\frac{35}{2}$. To pomeni, da je začetna vrednost premice $n = \frac{35}{2} = 17{,}5$.

Končna enačba nove premice je torej: $y = -0{,}5x + 17{,}5$.

Enačbo preoblikujemo v obliko $0{,}5x + y = 17{,}5$.

Ker je cilj dobiti desno stran enačbe oblike $kx + 20y$, celotno enačbo pomnožimo z 20:

$$0{,}5x + y = 17{,}5 \ /\cdot 20$$
$$10x + 20y = 350.$$

Postopek ponovimo za primer na sliki 28, ko premica namenske funkcije poteka skozi točko $D$.

Za izračun smernega koeficienta uporabimo točki $C(15{,}10)$ in $D(20{,}0)$:

$$k = \frac{0 - 10}{20 - 15} = \frac{-10}{5} = -2$$

Premica seka ordinatno os v točki $(0{,}40)$, zato je njena začetna vrednost $n = 40$.

Enačba premice je tako: $y = -2x + 40$.

Oziroma zapisano v primernejši obliki: $2x + y = 40$.

Ker je cilj dobiti desno stran enačbe oblike $kx + 20y$, celotno enačbo pomnožimo z 20:

$$40x + 20y = 800.$$

Če pogledamo rezultate izračunov, ugotovimo, da se koeficient pri spremenljivki $x$ (torej dobiček pri proizvodnji paprike) lahko spreminja med 10 in 40 centov. Če bi dobiček padel pod 10 ali zrasel nad 40 centov, bi se optimalna rešitev spremenila. V primeru podjetja Logistika, d.o.o., ne bi več vlagali obeh vrst zelenjave. Če bi dobiček paprike padel pod 10 centov, bi vlagali samo vložene kumarice, če pa bi zrasel na 40 centov, bi vlagali samo papriko.

Enako sedaj naredimo še za koeficiente pri spremenljivki $y$.

Obe enačbi, za primer ko se premica dotika točke $B$ in za primer, ko se dotika $D$, moramo preoblikovati tako, da dobimo desno stran enačbe oblike $30x + ky$, kjer $k$ predstavlja spremenjen koeficient pri spremenljivki $y$:

$$0{,}5x + y = 17{,}5 \ /\cdot 60$$

$$30x + 60y = 1050$$

$$2x + y = 40 \ /\cdot 15$$

$$30x + 15y = 600$$

Dobiček pri polnjenju vloženih kumaric se lahko giblje med 15 in 60 centov, da optimalna rešitev še vedno ostane ista.

#### 4.2.2.2 Analiza desnih strani neenakosti pri omejitvah

Pri analizi občutljivosti desnih strani neenakosti pri omejitvah želimo odgovoriti na naslednji vprašanji:

- za koliko se spremeni vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenakosti pri eni izmed aktivnih omejitev spremeni za eno enoto, vsi ostali parametri pa ostanejo enaki?
- za koliko dodanih ali odvzetih enot na desni strani neenačaja bo izračunana sprememba na enoto ostala veljavna?

Pri analizi desnih strani neenakosti pri omejitvah moramo upoštevati dejstvo, da vsaka sprememba desne strani aktivne omejitve povzroči spremembo vrednosti namenske funkcije, medtem ko sprememba neaktivne omejitve, ki je manjša od preostale vrednosti posamezne omejitve, ne povzroči nobene spremembe.

Izračunajmo najprej, za koliko se spremeni vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenakosti pri enem izmed pogojev spremeni za eno enoto.

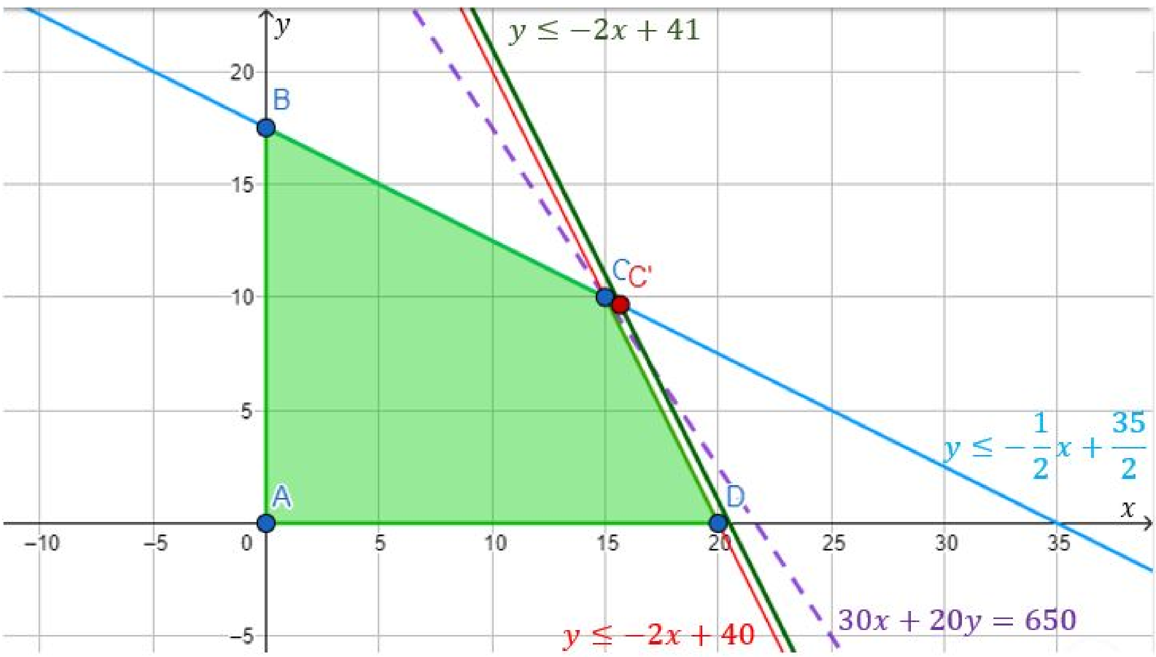
**Sprememba desne strani neenačbe pri omejitvi za opremljanje kozarcev**

Omejitev, izraženo s premico $2x + y = 40$, spremenimo tako, da desno stran enačbe povečamo za 1 – torej drugemu delavcu namenimo eno minuto več časa za opremljanje kozarcev:

$$2x + y = 41$$

Dobimo novo rešitev ekstremne točke, za katero izračunamo vrednost namenske funkcije.

Slika 29: Senčna cena omejitve za opremljanja kozarcev




Izračunamo novo optimalno rešitev, s pomočjo presečišča med premicama

$2x + y = 41$ in $x + 2y = 35$. Rešitev nato vstavimo v namensko funkcijo $z(x, y) = 30x + 20y$.

Optimalna rešitev s spremenjeno omejitvijo je $C'(\frac{47}{3}, \frac{29}{3})$. Točko vstavimo v namensko funkcijo:

$$30 \cdot \frac{47}{3} + 20 \cdot \frac{29}{3} = 663{,}33$$

Vrednost namenske funkcije v točki $C'$ je 663,33. Vrednost namenske funkcije pri prvotni rešitvi $C$ pa je 650. Nova rešitev je višja za 13,33. Vrednost 13,33 je ***senčna cena*** *ali* ***dualna cena***[15]. Senčna cena določene omejitve pove za koliko se bo spremenila optimalna vrednost namenske funkcije linearnega programa, če povišamo desno stran izbrane omejitve (neenačbe) za 1 enoto. Ali drugače, za koliko se bodo skupni stroški proizvodnje spremenili, če bomo spremenili količino virov, ki so na voljo za 1 enoto.

V danem primeru se vrednost namenske funkcije poveča za 13,33 centov, če se vrednost na desni strani neenačbe pri danem pogoju spremeni za 1 enoto, oziroma če za 1 enoto povečamo število minut, ki jih ima na voljo delavec za opremljanje kozarcev.

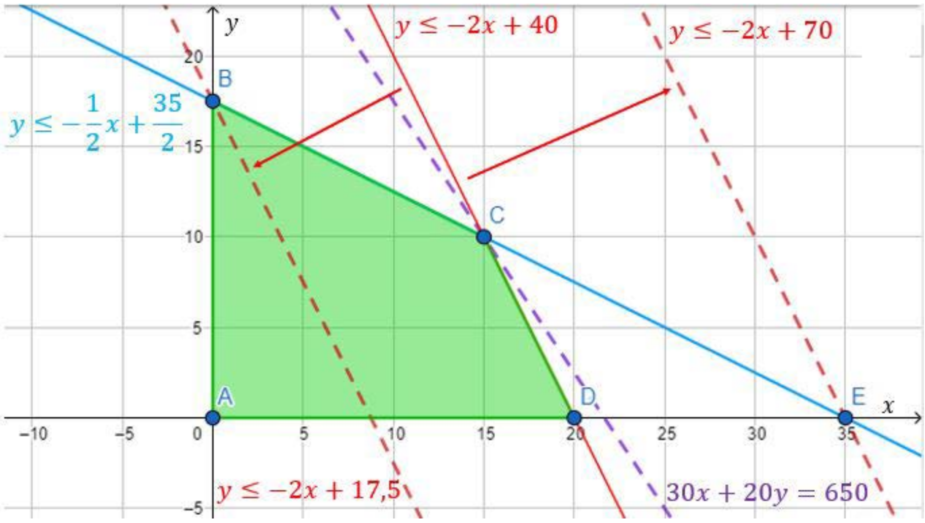
Preverimo še, do katere vrednosti lahko povečujemo čas opremljanja kozarcev, da ostane izračunana senčna cena veljavna. Zanima nas torej, do katere vrednosti je še smiselno večati čas opremljanja kozarcev.

Na sliki 30 je vidno, da je čas opremljanja kozarcev smiselno večati do tiste vrednosti, ko premico, ki predstavlja omejitev časa za opremljanja kozarcev premaknemo na grafu tako daleč v desno, da se premica dotika točke $E$. V tem trenutku omejitev časa za opremljanje kozarcev, ki smo jo do sedaj spreminjali, ni več aktivna, saj je prešla preko presečišča funkcij $y = 0$ in $x + 2y = 35$, ki predstavljata omejitvi (zapustila je konveksni lik, ki ga tvorijo vse omejitve problema).

[15] shadow price / marginal value / pi value / dual value

Izračunamo enačbo premice omejitve, ki poteka skozi točko $E$. Koeficient na desni strani neenačbe se je povečal na 70 ($2x + y = 70$). Dodatno večanje koeficienta pa se ne odraža na vrednosti namenske funkcije, saj rešitev ostaja točka $E$.

Slika 30: Določanje mej za omejitev opremljanja kozarcev




Da bi določili najmanjšo vrednost omejitve časa za opremljanje kozarcev, premico omejitve za opremljanja kozarcev vzporedno premikamo v levo, vse dokler ne seka točke $B$. V tem trenutku omejitev časa za opremljanje kozarcev, ki smo jo do sedaj spreminjali, ni več aktivna, saj je prešla preko presečišča funkcij $x = 0$ in $x + 2y = 35$, ki predstavljata omejitvi (zapustila je konveksni lik, ki ga tvorijo vse omejitve problema).

Čas, ki ga ima na voljo delavec za opremljanje kozarcev, je torej smiselno spreminjati le v intervalu od $17{,}5$ minut do $70$ minut.

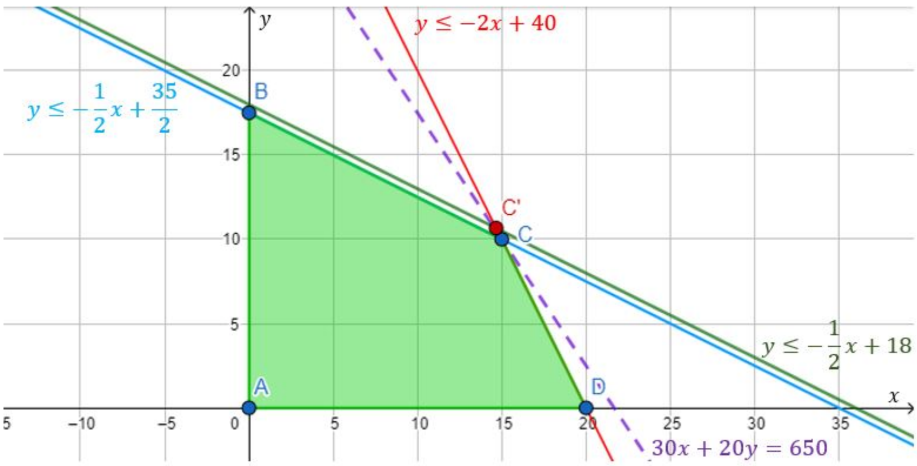
### Sprememba desne strani neenačbe pri omejitvi za polnjenje kozarcev

Omejitev, izraženo s premico $x + 2y = 35$ spremenimo tako, da desno stran enačbe povečamo za 1 – torej prvemu delavcu namenimo 1 minuto več časa za polnjenje kozarcev:

$$x + 2y = 36$$

Dobimo novo rešitev ekstremne točke, za katero izračunamo vrednost namenske funkcije.

Slika 31: Senčna cena omejitve za polnjenje kozarcev




Izračunamo novo optimalno rešitev, s pomočjo presečišča med premicama $2x + y = 40$ in $x + 2y = 36$. Rešitev pa nato vstavimo v namensko funkcijo $z(x, y) = 30x + 20y$.

Presečišče premic se nahaja v točki $C'(\frac{44}{3}, \frac{32}{3})$.

Novo optimalno rešitev vstavimo v namensko funkcijo:

$$30 \cdot \frac{44}{3} + 20 \cdot \frac{32}{3} = 653{,}33$$

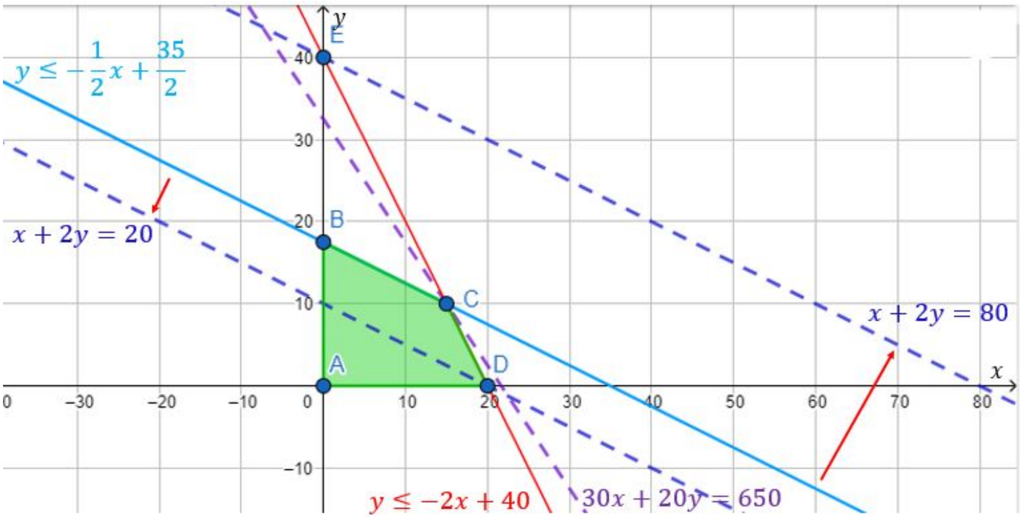
Vrednost namenske funkcije v točki $C'$ je 653,33. Vrednost namenske funkcije pri prvotni rešitvi $C$ pa je 650.

V danem primeru se vrednost namenske funkcije poveča za 3,33 centov, če se vrednost na desni strani neenačbe pri danem pogoju spremeni za 1 enoto, oz. če za 1 enoto povečamo število minut, ki jih ima delavec na voljo za polnjenje kozarcev na voljo.

Preverimo še, do katere vrednosti lahko povečujemo čas polnjenja kozarcev, da izračunana senčna cena ostane veljavna.

Na sliki 32 je vidno, da je čas polnjenja kozarcev smiselno večati do tiste vrednosti, ko premico, ki predstavlja omejitev časa za polnjenje kozarcev, premaknemo na grafu tako daleč v desno, da se premica na $y$ osi dotika točke $E$. V tem trenutku omejitev časa za opremljanje kozarcev, ki smo jo do sedaj spreminjali, ni več aktivna, saj je prešla preko presečišča funkcij $x = 0$ in $2x + y = 40$, ki predstavljata omejitvi (zapustila je konveksni lik, ki ga tvorijo vse omejitve problema).

Slika 32: Določanje mej za omejitev polnjenja kozarcev




Da bi določili najmanjšo vrednost omejitve časa za polnjenje kozarcev, premico omejitve za polnjenje kozarcev premikamo vzporedno v levo, vse dokler ne bo sekala točke $D$. V tem trenutku omejitev časa za polnjenje kozarcev ne bo več aktivna, saj je prešla preko presečišča funkcij $y = 0$ in $2x + y = 40$, ki predstavljata omejitvi.

Delavcu, ki polni kozarce vložene zelenjave je smiselno spreminjati čas le v intervalu od 20 do 80 minut.

## 4.3 Dualni problem proizvodnega problema

Vsakemu linearnemu programu lahko priredimo dualni linearni program. Prvotni linearni program, iz katerega izpeljemo dualni program imenujemo primarni linearni program.

Pomen dualnosti se kaže predvsem v tem, da omogoča preprosto preverjanje optimalnosti rešitve. Med primarnim in dualnim linearnim programom namreč obstaja močna povezava. Velja t.i. krepki izrek o dualnosti: če ima primarni linearni program optimalno rešitev, jo ima tudi dualni linearni program. Njuni vrednosti pa sta enaki.

Optimalno rešitev duala lahko uporabimo za analizo optimalne rešitve primarnega programa, saj omogoča boljši vpogled v obnašanje omejitev (za koliko se spremeni optimalna vrednost pri majhnih spremembah danih omejitev).

Ravno tako v nekaterih primerih dualni program prihrani čas za reševanje problema. Predvsem v primerih, ko je v primarnem programu omejitev veliko več kot odločitvenih spremenljivk.

Obstajajo tri zveze med primarnim in dualnim linearnim programom:

1. Kadar v primarnem linearnem programu iščemo maksimum namenske funkcije, v dualnem linearnem programu iščemo minimum namenske funkcije. Velja tudi obratno: kadar v primarnem linearnem programu iščemo minimum namenske funkcije, v dualnem linearnem programu iščemo maksimum.
2. Dualni linearni program ima toliko odločitvenih spremenljivk, kot ima primarni linearni program omejitev.
3. Dualni linearni program ima toliko omejitev, kot ima primarni linearni program odločitvenih spremenljivk.

Na podlagi opisanih lastnosti lahko zapišemo relacijo med primarnim linearnim programom in njegovim dualnim linearnim programom.

Osnovni linearni program (kadar iščemo maksimum funkcije) je zapisan v obliki:

$$\max z = C \cdot X$$
$$A \cdot X \leq B$$
$$X \geq 0$$

Dualni linearni program pa v obliki:

$$\min f = B^T \cdot Y$$
$$A^T \cdot Y \geq C^T$$
$$Y \geq 0$$

Osnovni linearni program (kadar iščemo minimum funkcije) je zapisan v obliki:

$$\min z = C \cdot X$$
$$A \cdot X \geq B$$
$$X \geq 0$$

Dualni linearni program pa v obliki:

$$\max f = B^T \cdot Y$$
$$A^T \cdot Y \leq C^T$$
$$Y \geq 0$$

Pojem dualnega linearnega programa bomo razložili na primeru proizvodnega problema. Proizvodni problem, ki smo ga rešili glede na maksimalni dohodek napolnjenih $x$ kozarcev vložene paprike in $y$ kozarcev kumaric v eni uri proizvodnje, bomo obravnavali še iz drugega zornega kota.

Proizvodnja želi tak proizvodni načrt, pri katerem bo vrednost porabljenih virov[16] najmanjša. Naj bo $u$ vrednost (v centih) 1 ure dela delavca za polnjenje kozarcev in $v$ vrednost (v centih) 1 ure dela delavca za opremljanje kozarcev v proizvodnem procesu. Optimalna rešitev primarnega linearnega programa je, da v eni uri izdelajo 15 kozarcev vložene paprike in 10 kozarcev kumaric. S tem dosežejo maksimalni dohodek (650 centov).

Pri izdelavi 1 kozarca vložene paprike imajo porabljeni resursi vrednost $u + 2v$. Ker pa naj podjetje ne bi delalo izgube, ta vrednost ne more biti manjša od čistega dohodka enega kozarca paprike, ki znaša 30 centov.

[16] resource

Skupni izdatek virov, ki jih podjetje potrebuje za izdelavo enega kozarca kislih kumaric znaša $35u + 40v$. Podjetje seveda želi, da bi bil strošek čim manjši. Poglejmo, kaj velja za relacijo med primarnim linearnim programom proizvodnega problema in njegovim dualnim linearnim programom.

Osnovni linearni program proizvodnega problema je zapisan v obliki:

$$\max z = C \cdot X$$
$$A \cdot X \leq B$$
$$X \geq 0$$

Dualni linearni program proizvodnega problema pa preide obliko:

$$\min f = B^T \cdot Y$$
$$A^T \cdot Y \geq C^T$$
$$Y \geq 0$$

Odločitvene spremenljivke v dualnem linearnem programu ne predstavlja več vektor odločitvenih spremenljivk $X$, kot v primarnem programu, temveč določimo nov vektor odločitvenih spremenljivk. V dualnem programu namreč ne iščemo več števila napolnjenih kozarcev zelenjave, ki jih predstavlja vektor $X$, temveč iščemo vrednost 1 ure delavčevega časa.

Velja, da je v dualnem linearnem programu toliko spremenljivk, kot je v primarnem omejitev, saj vsaki omejitvi primarnega linearnega programa pripada ena dualna spremenljivka.

Tabelo problema, ki smo jo zapisali na začetku obravnave proizvodnega problema transponiramo in dobimo:

| | Polnjenje [min] | Opremljanje [min] | Dobiček [€] |
|---|---|---|---|
| Paprike | 1 | 2 | 0,30 |
| Kumarice | 2 | 1 | 0,20 |
| Omejitve | 35 | 40 | |
| Vrednost resursov | $u$ | $v$ | |

Pri takem načinu načrtovanja proizvodnje je dualni linearni program oblike:

$$\min f(u,v) = 35u + 40v$$

pri omejitvah: $u + 2v \geq 30$

$$2u + v \geq 20$$

$$u \geq 0, v \geq 0$$

### 4.3.1 Grafično reševanje dualnega problema

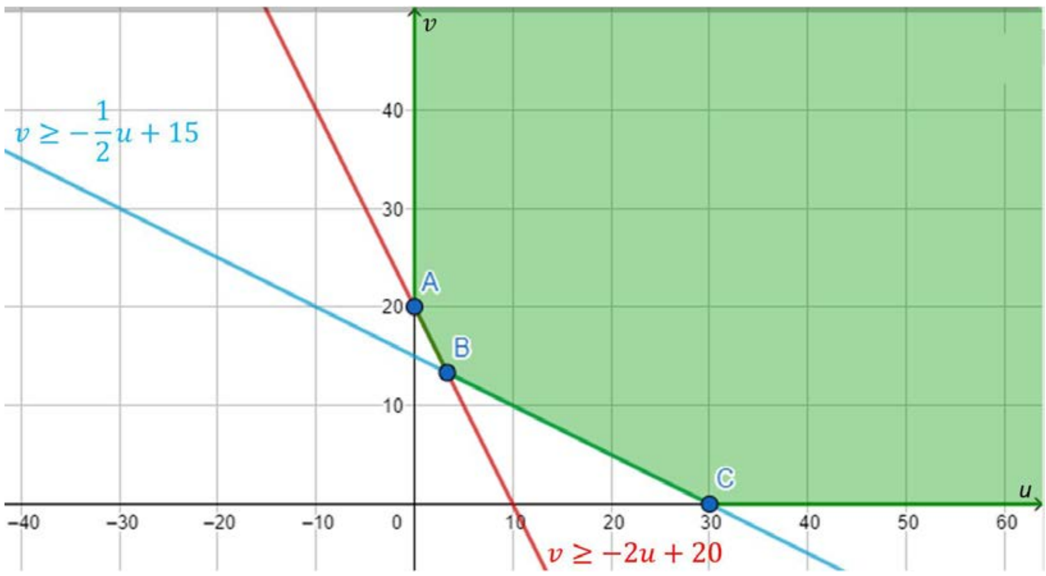
Dualni linearni program danega problema lahko rešimo grafično, saj v njem nastopata samo dve odločitveni spremenljivki: $u$ in $v$. V koordinatni sistem narišemo premici:

$$u + 2v = 30$$

$$2u + v = 20$$

in upoštevamo pogoj nenegativnosti odločitvenih spremenljivk: $u \geq 0, v \geq 0$.

Slika 33: Grafična rešitev dualnega proizvodnega problema




Določimo ekstremne točke in njihove koordinate. Iz slike je razvidno, da imata točki $A$ in $C$ koordinate:

$$A(0,20)$$

$$C(30,0)$$

Določiti je potrebno še koordinate točke $B$. To naredimo z izračunom presečišč dveh premic $u + 2v = 30$ in $2u + v = 20$. Točka $B$ ima koordinate $B\left(3\frac{1}{3}, 13\frac{1}{3}\right)$.

Izračunamo še vrednost namenske funkcije $f(u, v) = 35u + 40v$ v ekstremnih točkah:

$$f(A) = 35 \cdot 0 + 40 \cdot 20 = 800$$

$$f(B) = 35 \cdot 3\frac{1}{3} + 40 \cdot 13\frac{1}{3} = 650$$

$$f(C) = 35 \cdot 30 + 40 \cdot 0 = 1050$$

Analizirajmo točko $B$, ki je rešitev dualnega linearnega programa, podrobneje. Ker $u \neq 0$, so resursi za polnjenje kozarcev 100 % izkoriščeni. Povečanje resursa za 1 enoto bi povečalo dobiček za $u$ centov.

Če pa bi bila vrednost $u = 0$ v optimalni rešitvi dualnega linearnega programa, resursi za polnjenje kozarcev ne bi bili izkoriščeni in povečanje kapacitet ne bi povečalo skupnega dobička.

Enako velja za dualno spremenljivko $v$. Ker $v \neq 0$, so resursi za opremljanje kozarcev 100 % izkoriščeni. Povečanje resursa za 1 enoto bi povečalo dobiček za $v$ centov.

V tabeli prikazujemo strnjene rezultate primarnega in dualnega linearnega programa na primeru vložene zelenjave.

| | Primarni linearni program | Dualni linearni program |
|---|---|---|
| Optimalna rešitev odločitvenih spremenljivk | 15 | $13\frac{1}{3}$ |
| | 10 | $3\frac{1}{3}$ |
| Vrednost namenske funkcije | 650 | 650 |
| Senčna cena | $13\frac{1}{3}$ | 15 |
| | $3\frac{1}{3}$ | 10 |

V splošnem velja, da vrednosti spremenljivk dualnega problema predstavljajo senčno ceno za omejitve iz primarnega problema. To dejstvo smo pokazali tudi na danem primeru. Če primerjamo senčno ceno osnovnega problema in optimalno rešitev dualnega problema, ugotovimo, da smo dobili enake vrednoti.

## 4.4 Reševanje proizvodnega problema s programom LINGO

Linearne programe, v katerih nastopata le dve odločitveni spremenljivki najpogosteje rešujemo grafično. Takoj, ko problem preseže dve spremenljivki, ga je potrebno rešiti s pomočjo računalniškega programa. Vsi programi, ki omogočajo reševanje linearnih programov, za reševanje uporabljajo simpleksno metodo, ki je predstavljena na koncu poglavja o proizvodnem problemu. V tem poglavju bomo predstavili kako rešimo linearni program s pomočjo programa LINGO.

Reševanje bo prikazano na problemu zelenjave, ki smo ga predstavili kot primer proizvodnega problema. Linearni program problema je sledeč:

$$\max z(x,y) = 30x + 20y$$

pri omejitvah:

$$x + 2y \leq 35$$

$$2x + y \leq 40$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Linearni program zapišemo v sintaksi programa (več o tem kako zapisati program v LINGU v poglavju na koncu gradiva):

```
!Namenska funkcija;
max = 30*x + 20*y;
!Omejitve;
[Polnjenje] x + 2*y <= 35;
[Opremljanje] 2*x + y <= 40;
```

Pogojev o nenegativnosti odločitvenih spremenljivk ni potrebno pisati v program, saj je to privzeta nastavitev in jo program samodejno upošteva, ko izvaja izračun.

Program LINGO izpiše rešitev linearnega programa v obliki Poročila o rešitvi[17]:

```
 Global optimal solution found.
   Objective value:                              650.0000
   Infeasibilities:                              0.000000
   Total solver iterations:                             2
   Elapsed runtime seconds:                          0.04

   Model Class:                                        LP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                       X        15.00000            0.000000
                                       Y        10.00000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        650.0000            1.000000
                               POLNJENJE        0.000000            3.333333
                             OPREMLJANJE        0.000000            13.33333
```

***Vrednost namenske funkcije[18]:*** predstavlja optimalno vrednost namenske funkcije. V danem primeru je ta vrednost enaka 650. Maksimalni dobiček podjetja Logistika, d.o.o., pri pakiranju obeh vrst zelenjave znaša 650 centov v eni uri.

***Vrednost[19]***: predstavlja vrednosti odločitvenih spremenljivk $x = 15$ in $y = 10$. Podjetje mora torej v eni uri napolniti 15 kozarcev paprike in 10 kozarcev kumaric, da bo njihov dobiček maksimalen.

***Reducirani strošek[20]:*** pove za koliko bi bilo potrebno spremeniti vrednost koeficienta neke nebazne[21] spremenljivke v namenski funkciji, da bi se tudi ta spremenljivka pojavila v optimalni rešitvi oziroma postala bazna. V danem primeru se obe spremenljivki (vrsti zelenjave) pojavita v optimalni rešitvi, zato je reducirani strošek pri obeh spremenljivkah enak 0.

***Dopolnilna spremenljivka[22]:*** predstavlja vrednost povečanja ali zmanjšanja leve strani v omejitvenih neenačbah, da bi bile omejitve namesto z neenačbami

[17] Solution Report
[18] Objective Value
[19] Value
[20] Reduced Cost
[21] Nebazna spremenljivka je odločitvena spremenljivka, katere vrednost je enaka 0. Bazne spremenljivke pa so vse tiste spremenljivke, ki imajo vrednost večjo od 0.
[22] Slack or Surplus

izražene kot enačbe. V primeru, ko so neenačbe oblike ≥ to pomeni presežek (surplus) virov. Obratno velja za manjko (slack) - ≤.

V prvi vrstici se še enkrat pojavi optimalna vrednost namenske funkcije. V drugi vrstici danega primera, ki predstavlja polnjenje kozarcev, se nahaja vrednost 0. Presežek časa pri polnjenju kozarcev je enak 0. Čas delavca za polnjenje kozarcev je tako 100 % izkoriščen. V tretji vrstici, ki prikazuje opremljanje kozarcev, je presežek enak 0. Tudi čas delavca za zapiranje kozarcev je 100 % izkoriščen.

***Senčna cena[23]:*** predstavlja vrednost spremembe optimalne vrednosti namenske funkcije, če bi se omejitev v ustrezni neenačbi spremenila za 1 enoto. Pri omejitvah, kjer je možnost izrabe virov manjša ali enaka količini (≤), ki je na voljo, je senčna cena vedno nenegativna.

V prvi vrstici, ki se nanaša na namensko funkcijo je vrednost vedno 1, saj delamo spremembe za 1 enoto.

V drugi vrstici je vrednost senčne cene enaka 3,33. V primeru, da bi bil delavec za polnjenje kozarcev na razpolago 1 minuto dlje (torej 36 minut v vsaki uri), bi se optimalna vrednost namenske funkcije povečala za 3,33 centov. Nova optimalna vrednost namenske funkcije bi bila v tem primeru 653,33 centov.

Preverimo, ali je to res. V program LINGO vnesemo naslednjo sintakso:

```
!Namenska funkcija;
max = 30*x + 20*y;
!Omejitve;
[Polnjenje] x + 2*y <= 36;
[Opremljanje] 2*x + y <= 40;
```

[23] Dual Price

Rešitev spremenjenega linearnega programa:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              653.3333
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
Elapsed runtime seconds:                          0.03

Model Class:                                        LP


                    Variable           Value        Reduced Cost
                           X        14.66667            0.000000
                           Y        10.66667            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        653.3333            1.000000
                   POLNJENJE        0.000000            3.333333
                 OPREMLJANJE        0.000000            13.33333
```

Optimalna vrednost namenske funkcije se je res povečala za 3,33 centov.

V tretji vrstici prvotnega poročila je senčna cena enaka 13,33. V primeru, da bi bil delavec za opremljanje kozarcev na razpolago 1 minuto več (torej 41 minut v vsaki uri), bi se optimalna vrednost namenske funkcije povečala za 13,33 centov. Nova optimalna vrednost namenske funkcije bi v tem primeru bila 663,33 centov. Preverimo, ali je to res.

V program LINGO vnesemo naslednjo sintakso:

```
!Namenska funkcija;
max = 30*x + 20*y;
!Omejitve;
[Polnjenje] x + 2*y <= 35;
[Opremljanje] 2*x + y <= 41;
```

Rešitev pri spremenjeni omejitvi:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              663.3333
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
Elapsed runtime seconds:                          0.03

Model Class:                                        LP


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        15.66667            0.000000
                              Y        9.666667            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        663.3333            1.000000
                      POLNJENJE        0.000000            3.333333
                    OPREMLJANJE        0.000000            13.33333
```

Optimalna vrednost namenske funkcije se je res povečala za 13,33 (iz 650 centov na 663,33 centov).

### 4.4.1 Analiza občutljivosti opravljena s pomočjo računalniškega programa LINGO

Oglejmo si poročilo, ki ga izdela LINGO za analizo občutljivosti, ki smo jo v enem izmed prejšnjih poglavij izvedli s pomočjo grafične metode. Seveda tudi zdaj ločimo med analizo koeficientov namenske funkcije in analizo desnih strani neenakosti.

Analiza občutljivosti[24]:

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                               Objective Coefficient Ranges:

                              Current        Allowable        Allowable
             Variable     Coefficient         Increase         Decrease
                    X        30.00000         10.00000         20.00000
                    Y        20.00000         40.00000         5.000000

                                   Righthand Side Ranges:

                              Current        Allowable        Allowable
                  Row             RHS         Increase         Decrease
            POLNJENJE        35.00000         45.00000         15.00000
          OPREMLJANJE        40.00000         30.00000         22.50000
```

[24] Range report

***Obseg koeficientov namenske funkcije*[25]*:*** koeficienti namenske funkcije se lahko spreminjajo znotraj območja optimalnosti. Koeficient odločitvene spremenljivke $x$ v namenski funkciji je enak 30, dovoljeno povečanje je za 10 enot in zmanjšanje za 20. Koeficient odločitvene spremenljivke $y$, ima dovoljeno povečanje za 40 enot in zmanjšanje za 5. Dobiček z enim kozarcem vložene paprike se lahko giba med 10 in 40 centov, dobiček z enim kozarcem kislih kumar pa med 15 in 60 centov.

***Razpon desnih strani neenačb*[26]*:*** pri času za opremljanje kozarcev je dovoljeno povečanje za 30 minut. Dovoljeno zmanjšanje pa za 22,5 minut. Ker je osnovna količina časa, ki je na voljo za opremljanje kozarcev 40 minut, to pomeni, da se lahko čas, ki ga ima delavec na voljo, spreminja na intervalu od 17,5 minut do 70 minut. Na enak način pridobimo rezultate analize za drugo omejitev. Čas, ki ga ima delavec za polnjenje kozarcev sedaj na voljo znaša 35 minut. Največje dovoljeno povišanje je 45 minut, zmanjšanje pa 15 minut. Čas za polnjenje kozarcev se lahko torej spreminja na intervalu od 20 do 80 minut.

## 4.5 Reševanje proizvodnega problema s programom EXCEL

Linearne probleme z več spremenljivkami lahko rešujemo tudi s pomočjo računalniškega programa Microsoft Excel. Poglejmo, kako rešujemo primere proizvodnega problema.

Najprej v prazen delovni list v programu prepišemo tabelo z vsemi podatki.

Slika 34: Tabela v programu Excel

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Paprika | Kumarice | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | | |
| 3 | | Polnjenje | 1 | 2 | | <= | 35 | | x | | |
| 4 | | Opremljanje | 2 | 1 | | <= | 40 | | y | | |
| 5 | | Dobiček | 30 | 20 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |

[25] Objective Coefficient Ranges
[26] Righthand Side Ranges

Poleg tega pripravimo še celici, kamor bo Excel izpisal optimalno rešitev za odločitveni spremenljivki $x$ (število kozarcev vložene paprike) in $y$ (število kozarcev vloženih kamric). Ti dve celici pustimo prazni.

Pod vrednost omejitve v pripravljeni tabeli s podatki nastavimo formuli za definirani omejitvi:

$$x + 2y \leq 35$$

$$2x + y \leq 40$$

Slika 35: Vnos omejitev linearnega programa

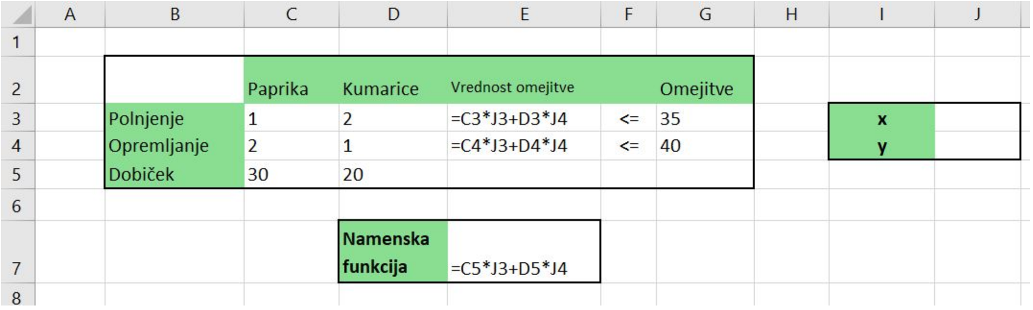
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Paprika | Kumarice | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | |
| 3 | | Polnjenje | 1 | 2 | =C3*J3+D3*J4 | <= | 35 | | x | |
| 4 | | Opremljanje | 2 | 1 | =C4*J3+D4*J4 | <= | 40 | | y | |
| 5 | | Dobiček | 30 | 20 | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |

Omejitev za polnjenje kozarcev kot formulo vnesemo tako, da označimo celico, v kateri je definirano trajanje polnjenja kozarca paprike (C3) ter ga z znakom * pomnožimo s celico, pripravljeno za optimalno rešitev števila kozarcev vložene paprike (J3). Temu produktu prištejemo še produkt celice trajanja polnjenja kumaric (D3) in celice, pripravljene za optimalno rešitev števila kozarcev kislih kumaric (J4).

Omejitev za opremljanje kozarcev kot formulo vnesemo tako, da označimo celico, v kateri je definirano trajanje opremljanja kozarca paprike (C4) ter jo z znakom * pomnožimo s celico, ki je pripravljena za optimalno rešitev števila kozarcev vložene paprike (J3). Temu produktu prištejemo še produkt celice trajanja opremljanja kozarca kumar (D4) in celice, pripravljene za optimalno rešitev števila kozarcev kislih kumaric (J4).

V ločeno prazno celico vpišemo enačbo za namensko funkcijo. Namenska funkcija linearnega programa je: $\max z(x, y) = 30x + 20y$.

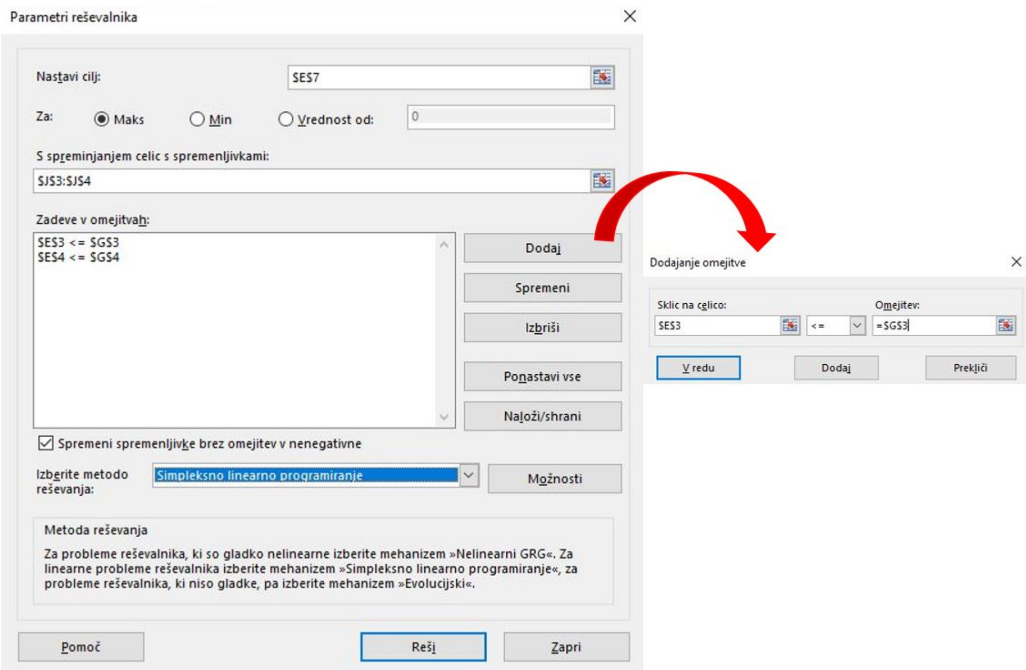
Slika 36: Vnos namenske funkcije




V Excelu definiramo namensko funkcijo tako, da označimo celico s podatkom o dobičku pri prodaji paprike (C5), ter jo pomnožimo s celico, pripravljeno za izpis optimalne rešitve za spremenljivko $x$ (J3). Prištejemo še produkt dobička s prodajo paprike (D5) in celice, pripravljene za izpis optimalne rešitve za spremenljivko $y$ (J4).

V zavihku podatki[27] najdemo orodje Reševalnik[28], ki odpre okno, v katero vnesemo vse potrebne parametre za rešitev problema:

Slika 37: Nastavitev parametrov za rešitev proizvodnega problema v Excelu




[27] Data

[28] Solver

Pod parameter **Nastavi cilj**[29] označimo celico, ki smo jo pripravili za izpis vrednosti namenske funkcije (E7).

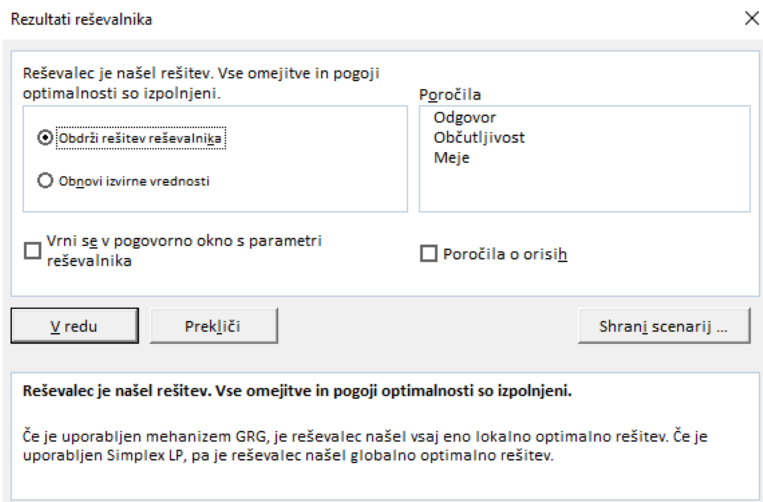
Namensko funkcijo maksimiramo.

Pod parametrom **s spreminjanjem celic s spremenljivkami**[30] označimo celici, ki sta pripravljeni za izpis optimalne rešitve $x$ in $y$ (J3 in J4).

Vnesemo omejitve tako, da v polje **Sklic na celico**[31] vnesemo celico, v kateri je definirana enačba za omejitev, nastavimo pravilni neenačaj in v polje **Omejitev**[32] dodamo celico, v kateri je definirana vrednost omejitve.

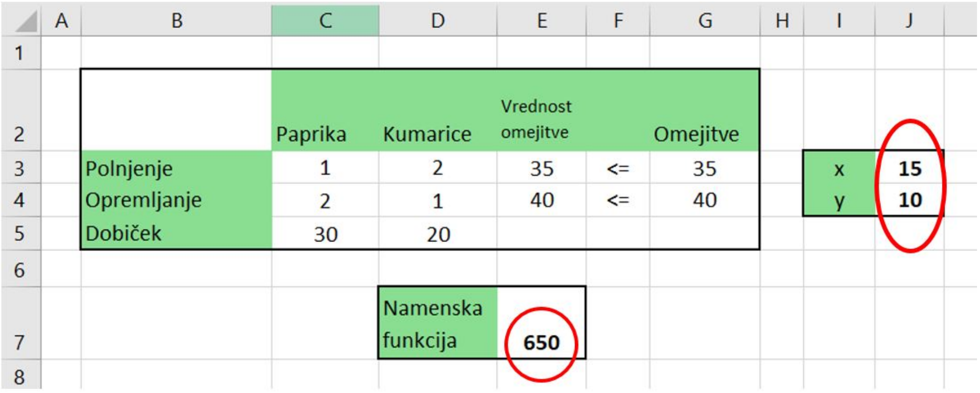
Kot metodo za izračun izberemo simpleksno linearno programiranje[33]. Program ponudi možnost izbire katera poročila naj izpiše.

Slika 38: Izbira poročil v Excelu




29 Set Objective
30 By Changing Variabe Cells
31 Cell Reference
32 Constraint
33 Simplex LP

Slika 39: Rešitev proizvodnega problema v Excelu



| | Paprika | Kumarice | Vrednost omejitve | | Omejitve | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Polnjenje | 1 | 2 | 35 | <= | 35 | x | 15 |
| Opremljanje | 2 | 1 | 40 | <= | 40 | y | 10 |
| Dobiček | 30 | 20 | | | | | |
| | | Namenska funkcija | 650 | | | | |

Program izpolni celici za optimalno rešitev na delovnem listu – torej koliko kozarcev kumaric in koliko kozarcev paprike naj podjetje Logistika, d.o.o., napolni, da bo imelo največji dobiček. Prav tako je program izračunal vrednost namenske funkcije, ki smo jo prej definirali. Podjetje naj napolni 15 kozarcev paprike in 10 kozarcev kumaric. Pri tem pa bo imelo 650 centov dobička.

Poročilo o odgovorih Excel[34]:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $E$7 | Namenska funkcija Vrednost omejitve | 0 | 650 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $J$3 | x | 0 | 15 | Contin |
| $J$4 | y | 0 | 10 | Contin |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$3 | Polnjenje Vrednost omejitve | 35 | $E$3<=$G$3 | Vpenjanje | 0 |
| $E$4 | Opremljanje Vrednost omejitve | 40 | $E$4<=$G$4 | Vpenjanje | 0 |

Enake rezultate, kot jih program izpiše v pripravljen delovni list, izpiše tudi v *Poročilu o odgovorih*. V tabeli **Celica s cilji[35]** izpiše vrednost namenske funkcije - 650.

[34] Answer Report
[35] Objective Cell

V tabeli **Celice s spremenljivkami**[36] izpiše končno vrednost spremenljivk oziroma optimalno rešitev programa. Izdelek, ki ga predstavlja spremenljivka $x$ naj torej polnijo v 15 kosih, izdelek s spremenljivko $y$ pa v 10 kosih.

V tabeli **Omejitve** je najprej definirana vrednost posameznih omejitev, definirano pa je tudi, koliko rezerve imajo še na voljo v podjetju, ko izpeljejo predlagani proizvodni program. V danem primeru so porabljene vse minute dela, ki jih imata delavca na voljo, zato je pri obeh omejitvah vrednost rezerve enaka 0.

Poročilo o občutljivosti Excel[37]:

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| \$J\$3 | x | 15 | 0 | 30 | 10 | 20 |
| \$J\$4 | y | 10 | 0 | 20 | 40 | 5 |

Omejitve

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Senca Cena | Omejitev Stran R.H. | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| \$E\$3 | Polnjenje Vrednost omejitve | 35 | 3,333333333 | 35 | 45 | 15 |
| \$E\$4 | Opremljanje Vrednost omejitve | 40 | 13,33333333 | 40 | 30 | 22,5 |

V tabeli **Celice s spremenljivkami** v *Poročilu o občutljivosti* je definirano, v katerih mejah se lahko giblje dobiček s posameznim produktom, da se optimalna rešitev ne bo spremenila. Dobiček z izdelkom, ki ga predstavlja spremenljivka $x$, se lahko poveča za 10 in zmanjša za 20, torej se dobiček s kozarcem vložene paprike lahko giba na intervalu od 10 do 40 centov.

Pri spremenljivki $y$ se dobiček lahko poveča za 40 in zmanjša za 5, torej se lahko dobiček s kozarcem kislih kumar giblje na intervalu od 15 do 60 centov.

V tabeli **Omejitve** se nahajajo podatki o vrednostih, za katere se lahko spreminjajo desne strani neenačb oz. za koliko se lahko spremenijo vrednosti virov, da bo optimalna rešitev ostala nespremenjena.

[36] Variable Cells
[37] Sensitivity Report

Čas, ki ga ima na voljo delavec za polnjenje kozarcev, se lahko poveča za 45 minut in skrajša za 15 minut. Čas, ki ga ima na voljo delavec za opremljanje kozarcev, pa se lahko poveča za 30 in zmanjša za 22,5 minut.

V isti tabeli lahko razberemo še senčni ceni omejitev. Za koliko se bo spremenila vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenačbe spremeni za 1. Če se čas za polnjenje kozarcev poveča za 1 minuto, se bo vrednost namenske funkcije povečala za 3,33 centov. V primeru, da se poveča čas za opremljanje kozarcev za 1 minuto, pa za 13,33 centov.

## 4.6 Simpleksna metoda reševanja proizvodnega problema

Poglavje povzeto po Usenik, 2007

Zapisali smo, da računalniški programi za reševanje linearnih programov uporabljajo metodo simpleksov. Grafična metoda ima namreč omejitev, da jo lahko za reševanje linearnega programa uporabimo le v primeru, ko imamo opravka samo z dvema odločitvenima spremenljivkama. Takoj, ko v problemu nastopa več spremenljivk, se grafičnega načina reševanja ne moremo več lotiti, lahko pa linearni program rešimo z metodo simpleksov.

V primeru, ko ima linearni program več spremenljivk, je tudi oglišč konveksnega lika, ki ga omejujejo omejitve linearnega programa, več. Simpleksna metoda na sistematični način poišče ekstrem konveksnega lika, kjer je vrednost namenske funkcije optimalna.

Ideja simpleksne metode je, da v prvem koraku najdemo bazno rešitev $Ax = b$ ali pa dokažemo, da rešitve ni. V drugem koraku najdemo optimalno bazno[38] rešitev ali dokažemo da je ni. V drugem koraku postopoma izboljšujemo bazno rešitev in ko ne obstaja še boljša bazna rešitev, smo našli optimalno (bazno) rešitev.

[38] Naj bo dan linearni program $Ax = b$ in $x > 0$ naj bo dopustna rešitev tega programa. Potem $b$ predstavlja linearno kombinacijo stolpcev $A$, ki ustrezajo neničelnim komponentam $x$. V primeru, da so ti stolpci med seboj linearno neodvisni, je $x$ bazna rešitev linearnega programa. V primeru, da je $b = 0$ definiramo $x = 0$ kot edino bazno rešitev danega linearnega programa.

Metodo simpleksnega reševanja bomo predstavili na primeru polnjenja kozarcev zelenjave.

Podjetje Logistika, d.o.o., pakira vložene paprike in kisle kumare namenjene zahtevnejšim kupcem. Pakiranje obeh vrst zelenjave poteka v treh fazah: polnjenje kozarcev, zapiranje kozarcev in lepljenje nalepk na kozarce. Za kozarec vložene paprike potrebujejo 1 minuto za polnjenje, 2 minuti za zapiranje in 1 minuto za nalepko. Za kozarec kislih kumaric pa potrebujejo 2 minuti za polnjenje, 1 minuto za zapiranje in 1 minuto za nalepko. Stroj, ki polni kozarce, je na razpolago 40 minut v vsaki uri; stroj, ki zapira kozarce je tudi na razpolago 40 minut v vsaki uri; stroj, ki lepi nalepke, pa je na razpolago le 25 minut v vsaki uri. Podjetje ima pri prodaji kozarca vložene paprike dobiček 30 centov in pri prodaji kozarca kislih kumaric 20 centov dobička. Podjetje želi doseči čim večji dobiček.

Linearni program za predstavljeni primer je:

$$\max z\ (x, y) = 30x + 20y$$

pri omejitvah:

$$x + 2y \leq 40$$
$$2x + y \leq 40$$
$$x + y \leq 25$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

***Neenačbe s pomočjo dopolnilnih spremenljivk pretvorimo v enačbe***

Dopolnilne spremenljivke $(u, v, w)$ uvedemo, da izenačimo vrednost desnih in levih strani neenačb. Trenutno so leve strani neenačb namreč manjše od desnih strani neenačb. Če v neenačbe dodamo dopopolnilne spremenljivke s tem izenačimo vrednosti desnih in levih strani v neenačbah in tako neenačbe postanejo enačbe.

$$x + 2y + u = 40$$
$$2x + y + v = 40$$
$$x + y + w = 25$$

Dopolnilne spremenljivke v linearni program dodamo le zaradi pretvorbe omejitvenih neenačb v enačbe, pomenijo pa presežek na eni strani neenačbe. Zanje ne želimo, da bi se pojavile v optimalni rešitvi. Da se dopolnilne spremenljivke ne bi pojavile v optimalni rešitvi, poskusimo doseči na način, da v namenski funkciji predpišemo za koeficiente teh spremenljivk vrednost nič, s tem čemer, da dodane spremenljivke ne doprinesejo k iskanemu maksimumu.

Na novo uvedene spremenljivke v omejitvah moramo upoštevati tudi v namenski funkciji:

$$\max z = 30x + 20y + 0u + 0v + 0w$$

oziroma:

$$\max z - 30x - 20y - 0u - 0v - 0w = 0$$

Vse odločitvene spremenljivke osnovnega linearnega programa in na novo uvedene spremenljivke pa morajo biti večje ali enake 0:

$$x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$$

***Koeficiente sistema uredimo v začetno simpleksno matriko***

$$\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]$$

V prvi vrsti začetne simpleksne matrike so zapisani koeficienti namenske funkcije, v ostalih treh vrsticah pa so zapisani koeficienti iz omejitev.

Vsaka simpleksna matrika vsebuje dve vrsti spremenljivk: bazne spremenljivke so tiste spremenljivke, ki imajo v pripadajočem stolpcu samo en pozitiven element (v danem primeru so bazne spremenljivke naslednje: $u, v$ in $w$) in nebazne spremenljivke, ki so vse ostale spremenljivke v začetni simpleksni matriki ($x$ in $y$).

***Poiščemo ključni oz. pivot element***

- izberemo stolpec, ki ima v vrstici koeficientov namenske funkcije (prva vrstica simpleksne matrike) najmanjšo vrednost

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} z & x & y & u & v & w & b \end{array}\\ \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]\end{array}$$

- v vsaki (razen v prvi) vrstici izračunamo količnik med vrednostjo v stolpcu količnika $b$ in vrednostjo v izbranem stolpcu. Izberemo tisto vrstico, v kateri je ta količnik najmanjši

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} z & x & y & u & v & w & b \end{array}\\ \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 40 : 1 = 40\\ 40 : 2 = 20\\ 25 : 1 = 25 \end{array}$$

- element, ki ga dobimo po izvedbi prejšnjih korakov se imenuje pivot element

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} z & x & y & u & v & w & b \end{array}\\ \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]\end{array}$$

- količnik na mestu pivota mora biti 1. Pri transformaciji količnika si pomagamo tako, da celo vrstico, v kateri se pivot element nahaja pomnožimo z izrazom $\frac{1}{pivot}$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} z & x & y & u & v & w & b \end{array}\\ \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c} 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]\end{array}$$

- na vseh ostalih mestih v izbranem stolpcu s pomočjo linearnih transformacij ustvarimo ničle (v predstavljenem primeru tretjo vrstico pomnožimo s 30 in jo prištejemo k prvi vrstici, tretjo vrstico pomnožimo z (−1) in jo prištejemo k drugi vrstici, tretjo vrstico pomnožimo z (−1) in jo prištejemo k zadnji vrstici).

$$\begin{array}{c|c|c|ccc|c} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & -5 & 0 & 15 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5 \end{array}$$

- *po istem postopku poiščemo drugi pivot element*

$$\begin{array}{c|c|c|ccc|c} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & -5 & 0 & 15 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|ccc|c} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & -5 & 0 & 15 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 650 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 10 \end{array}$$

- opisan postopek ponavljamo, dokler so v vrstici koeficientov namenske funkcije še negativne vrednosti.

V danem primeru v prvi vrstici ni več negativnih vrednosti, torej je postopek končan in matrika, ki smo jo dobili postane končna simpleksna matrika.

Iz matrike preberemo rešitev:

- v zadnjem stolpcu prve vrstice preberemo maksimalno vrednost namenske funkcije: 650.
- v stolpcu, ki predstavlja odločitveno spremenljivko $x$ (drugi stolpec), poiščemo vrednost 1. Iz zadnjega stolpca te vrstice preberemo optimalno vrednost spremenljivke $x$:

$$x = 15.$$

$$\begin{bmatrix} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 650 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

- v stolpcu, ki predstavlja neodvisno spremenljivko $y$ (tretji stolpec), poiščemo vrednost 1. Iz zadnjega stolpca te vrstice preberemo optimalno vrednost spremenljivke $y$: $y = 10$.

$$\begin{bmatrix} z & x & y & u & v & w & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 650 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

To pomeni, da bo imelo podjetje Logistika, d.o.o., maksimalni dobiček v primeru, če bo zapakiralo 15 kozarcev vložene paprike in 10 kozarcev kislih kumaric na uro. Dobiček bo v tem primeru znašal 650 centov.

## 4.7 Dodatni primeri

**Primer 27:**

IZDELKI DVEH RAZLIČNIH KAKOVOSTI

Podjetnik izdeluje izdelke 1. in 2. kakovosti. Za en izdelek 1. kakovosti, potrebuje 100 kg surovin in 5 ur dela, proda pa ga za 130 €. Za en izdelek 2. kakovosti, potrebuje 80 kg surovin in 3 ure dela, proda ga za 90 €. Naslednji mesec ima na razpolago 420 delovnih ur in 10.000 kg surovin.

- Zapišite namensko funkcijo in omejitve.
- Koliko izdelkov posamezne kvalitete naj izdela, da bo dobiček maksimalen? Kolikšen je ta maksimalen zaslužek?
- Ali pri optimalni rešitvi porabi vse surovine in ves čas, ki ga ima na voljo?
- Za koliko se spremeni dobiček, če se količina surovin spremeni za 1 kg in za koliko se spremeni dobiček, če se število delovnih ur spremeni za 1 uro?
- Za dani problem obstaja optimalno število izdelkov 1. in 2. kakovosti, pri kateri bo zaslužek maksimalen. Za koliko se lahko spremeni zaslužek pri posameznem izdelku, da ostane omenjeno optimalno število izdelkov enako?

**Rešitev:**

| | 1. kakovost | 2. kakovost | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Surovine [kg] | 100 | 80 | 10.000 |
| Čas [h] | 5 | 3 | 420 |
| Zaslužek [€] | 130 | 90 | |
| Število izdelkov | $x$ | $y$ | |

- **Linearni program**

Namenska funkcija $z$ predstavlja skupni dobiček pri prodaji izdelkov, zato velja:

$$z(x,y) = 130x + 90y$$

Ker želi podjetnik na koncu meseca imeti maksimalni zaslužek, iščemo maksimum funkcije:

$$\max z(x,y) = 130x + 90y$$

Omejitve linearnega programa predstavljajo omejitve surovin in časa. Skupno je na voljo 10.000 kg surovin, zato velja:

$$100x + 80y \leq 10.000$$

Časa, ki ga ima podjetnik za izdelavo izdelkov, je na voljo 420 ur, zato omejitev za čas dobi obliko:

$$5x + 3y \leq 420$$

Upoštevati je potrebno še nenegativnost odločitvenih spremenljivk, ki predstavljata izdelke dveh različnih kakovosti:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- **Grafična rešitev**

Poiščimo grafično rešitev danega linearnega programa:

$$\max z(x, y) = 130x + 90y$$

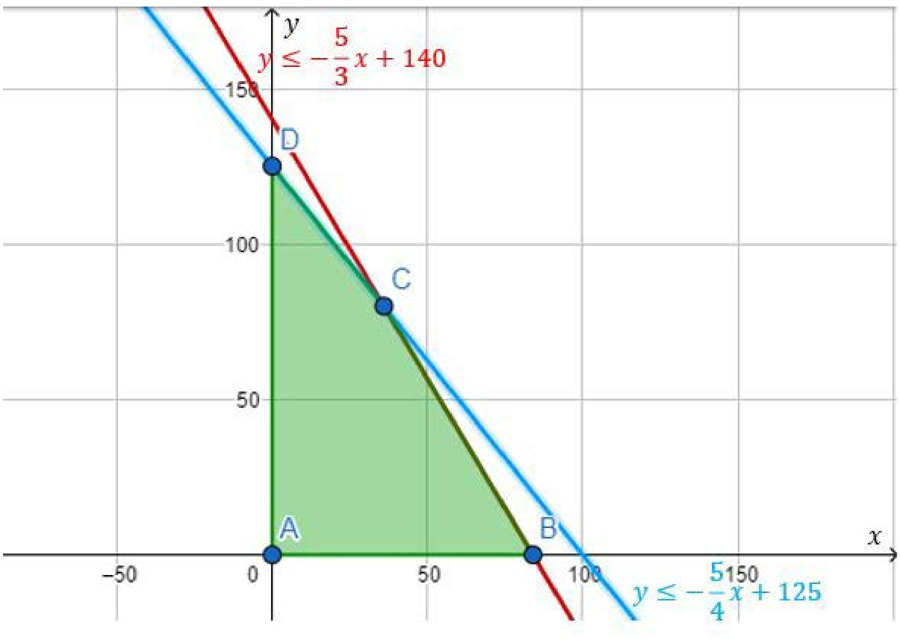
pri omejitvah: $100x + 80y \leq 10.000$

$$5x + 3y \leq 420$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

V koordinatni sistem narišemo množico vseh rešitev sistema linearnih neenačb, ki ga sestavljajo omejitve v linearnem programu.

Slika 40: Grafična rešitev primera izdelkov dveh različnih kakovosti




Omejitve tvorijo konveksno množico $ABCD$. Določimo koordinate ekstremnih točk te množice. Točka $A$ je izhodišče koordinatnega sistema, torej so njene koordinate $A\ (0{,}0)$.

Točka $B$ je presečišče abscisne osi $x$ in premice $5x + 3y = 420$ s koordinatami točke $B(84, 0)$.

Ker točka $D$ leži na presečišču $y$ osi in enačbe $100x + 80y = 10.000$ so koordinate točke $D(0, 125)$.

Točka $C$ je presečišče premic $5x + 3y = 420$ in $100x + 80y = 10.000$ in ima koordinate $C(36,80)$.

V eni izmed danih ekstremnih točk ima dani linearni problem svoj maksimum. V spodnji tabeli so zapisane vrednosti namenske funkcije v vsaki ekstremni točki. Vrednost namenske funkcije izračunamo tako, da koordinati $x$ in $y$ vsake izmed ekstremnih točk vstavimo v namensko funkcijo $z(x, y) = 130x + 90y$.

| Točka | Namenska funkcija | Vrednost namenske funkcije | |
|---|---|---|---|
| $A(0,0)$ | $z(0,0) = 130 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$ | 0 | |
| $B(84,0)$ | $z(84, 0) = 130 \cdot 84 + 90 \cdot 0 = 10.920$ | 10.920 | |
| $C(36,80)$ | $z(36, 80) = 130 \cdot 36 + 90 \cdot 80 = 11.880$ | 11.880 | $maksimum$ |
| $D(0,125)$ | $z(0,125) = 130 \cdot 0 + 90 \cdot 125 = 11.250$ | 11.250 | |

Namenska funkcija doseže svoj maksimum v točki $C(36,80)$, kjer je vrednost namenske funkcije 11.880. Glede na izračunano lahko zaključimo, da mora podjetnik izdelati 36 izdelkov 1. kakovosti in 80 izdelkov 2. kakovosti, da bo njegov zaslužek maksimalen. Zaslužek bo v tem primeru znašal 11.880 €.

- **Izkoriščenost surovin in časa**

Izkoriščenost surovin in časa preverimo tako, da dobljeno optimalno rešitev za število izdelanih posameznih izdelkov vstavimo v postavljene omejitve.

Izkoriščenost surovin:

$$100x + 80y \leq 10.000$$

$$100 \cdot 36 + 80 \cdot 80 = 10.000$$

S proizvodnjo 36 izdelkov 1. kakovosti in 80 izdelkov 2. kakovosti podjetju ne ostane nič neizkoriščenih surovin.

Izkoriščenost časa:

$$5x + 3y \leq 420$$

$$5 \cdot 36 + 3 \cdot 80 = 420$$

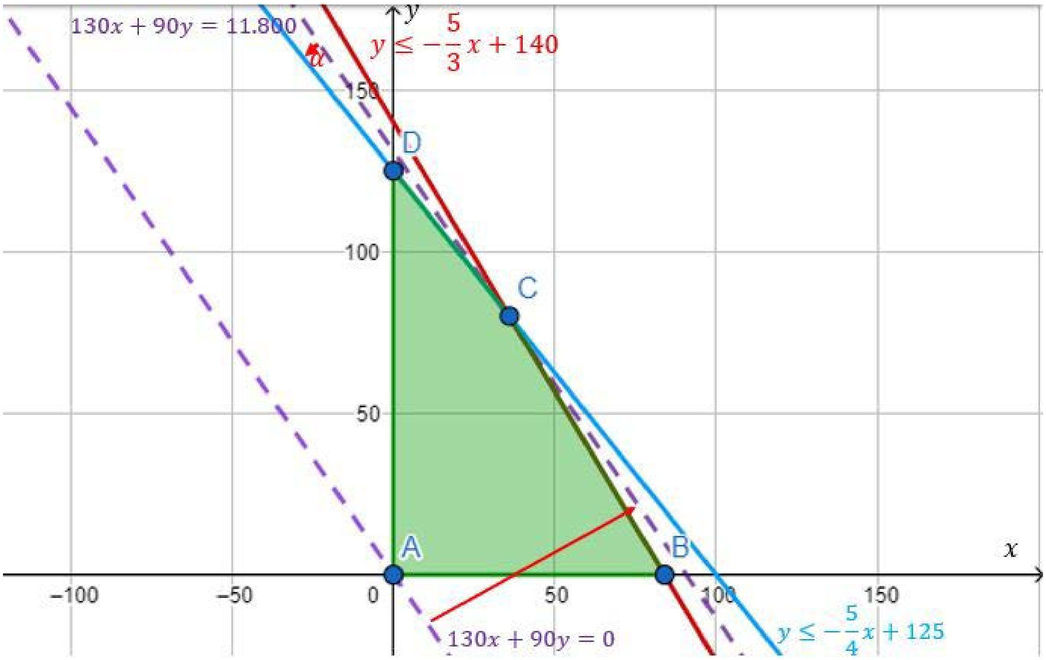
Podjetje 100 % izkoristi ves čas, ki ga ima na voljo za izdelavo izdelkov.

- **Dovoljena sprememba zaslužka pri posameznem izdelku**

Za koliko se lahko spremeni zaslužek pri posameznem izdelku, da ostane izračunano optimalno število izdelkov za proizvodnjo enako, preverimo z analizo koeficientov namenske funkcije linearnega programa.

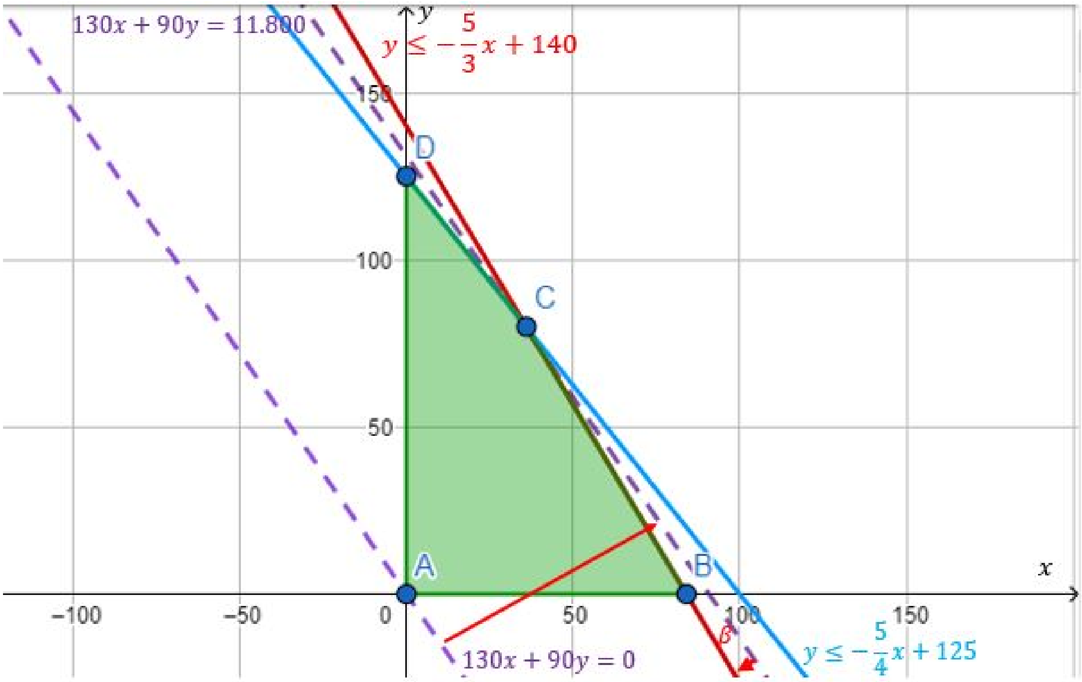
Optimalna rešitev linearnega programa ostaja optimalna navkljub spremembi koeficientov tako dolgo, dokler se posamezni koeficient namenske funkcije nahaja v tako imenovanem območju optimalnosti. Na spodnji sliki je še enkrat predstavljena grafična rešitev danega proizvodnega problema. Iz slike je razvidno, da doseže namenska funkcija maksimum, ki je 11.880 € v točki $C$. Na sliko je dodana namenska funkcija $z(x, y) = 130x + 90y$ in njena vzporednica $z(x, y) = 130x + 90y - 11.880$, ki poteka skozi točko $C$ (točka $C$ predstavlja optimalno rešitev problema).

Slika 41: Spreminjanje naklona (bolj položna namenska funkcija)




Če se vrednost koeficientov v enačbi namenske funkcije $130x + 90y - 11.880 = 0$ spreminja, se bo spreminjal naklon premice. Če premico, ki poteka skozi točko $C$ in predstavlja vzporednico namenske funkcije, zavrtimo za kot $\alpha$, bo postajala vedno bolj položna in v nekem trenutku prekrila daljico $CD$. Točka $C$ v primeru prekrivanja premic ni več edina optimalna rešitev problema. V optimalno rešitev vstopa tudi točka $D$ in vse točke med $C$ in $D$. Z vsakim nadaljnjim zasukom postane točka $D$ edina optimalna rešitev danega linearnega programa. S spreminjanjem naklona premice namenske funkcije se spreminja optimalna rešitev danega linearnega programa. Sprememba naklona premice pa pomeni spremembo koeficientov enačbe namenske funkcije.

Slika 42: Spreminjanje naklona (bolj strma namenska funkcija)




Sedaj premico namenske funkcije zavrtimo še za kot $\beta$, da prekrije daljico $CB$. V trenutku, ko premica poteka skozi točko $B$, točka $C$ ni več edina optimalna rešitev problema.

Preverimo kolikšne so vrednosti posameznih odločitvenih spremenljivk v primerih, ko premico namenske funkcije zavrtimo za kot $\alpha$ in kot $\beta$.

Enačba premice namenske funkcije, ki poteka skozi točko $C$ je:

$$130x + 90y - 11.880 = 0.$$

Poiskati je potrebno enačbo premice, ki poteka skozi točki $C(36, 80)$ in $D(0, 125)$. Pomagamo si z eksplicitno obliko enačbe premice $y = kx + n$.

Koordinati točk $C$ in $D$ vstavimo v enačbo za izračun koeficienta premice, ki poteka skozi dve točki:

$$k = \frac{125 - 80}{0 - 36} = -\frac{45}{36} = -1{,}25$$

Iskana premica seka $y$ os v točki $D(0{,}125)$, torej je njena začetna vrednost 125. Enačba iskane premice skozi točki $C$ in $D$ je torej:

$$y = -1{,}25x + 125$$

Enačbo premice preoblikujemo v implicitno obliko enačbe premice:
$1{,}25 + y - 125 = 0$ in pomnožimo z 90, da ostane koeficient spremenljivke $y$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen:

$$112{,}5x + 90y - 11.250 = 0$$

Iz nove enačbe premice lahko razberemo novi (najmanjši) koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji.

Če je $k > 112{,}5$ bo točka $C$ edina optimalna rešitev.

Iz enačbe premice, ki poteka skozi točki $C$ in $D$ lahko razberemo tudi največjo vrednost koeficienta spremenljivke $y$, da bo optimalna rešitev ostala enaka. Enačbo premice, ki poteka skozi točki $C$ in $D$ $(1{,}25 + y - 125 = 0)$ sedaj pomnožimo s 104, da ostane koeficient spremenljivke $x$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen:

$$130x + 104y - 13.000 = 0$$

Iz nove enačbe premice lahko razberemo novi (največji) koeficient spremenljivke $y$ v namenski funkciji. Če bo $k < 104$, bo $C$ ostala edina optimalna rešitev.

Poiščimo sedaj največjo vrednost koeficienta spremenljivke $x$ in najmanjšo vrednost koeficienta spremenljivke $y$. Ti vrednosti se skrivata v enačbi premice, ki poteka skozi točki $C$ in $B$. Po enakem postopku kot zgoraj izračunamo smerni koeficient in začetno vrednost enačbe te premice in dobimo, da je $k = -\frac{5}{3}$ in $n = 140$. Tako je enačba iskane premice enaka: $y = -\frac{5}{3}x + 140$.

Preoblikujemo enačbo premice v implicitno obliko premice: $5x + 3y - 420 = 0$. Enačbo pomnožimo s 30, da ostane koeficient spremenljivke $y$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen: $150x + 90y - 12.600 = 0$,

iz katere lahko razberemo novi (največji) koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji. Če bo $k < 150$, bo $C$ edina optimalna rešitev.
Iz enačbe premice, ki poteka skozi točki $C$ in $D$ lahko razberemo tudi največjo vrednost koeficienta spremenljivke $y$, da bo ostala optimalna rešitev enaka. Enačbo premice, ki poteka skozi točki $C$ in $D$ $(5x + 3y - 420 = 0)$ pomnožimo s 26, da ostane koeficient spremenljivke $x$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen. Dobimo enačbo: $130x + 78y - 10.920 = 0$,
iz katere lahko razberemo novi (najmanjši) koeficient spremenljivke $y$ v namenski funkciji. Če bo $k > 78$, bo $C$ ostala edina optimalna rešitev.

Glede na zgornje izračune lahko zaključimo, da se lahko zaslužek pri izdelku 1. kakovosti giba med 112,5 € in 150 €, zaslužek pri izdelku 2. kakovosti pa med 78 € in 104 €, da bo optimalna rešitev še vedno ostala enaka, torej da bo maksimalni zaslužek še vedno pri izdelanih 36 izdelkih 1. kakovosti in 80 izdelkih 2. kakovosti.

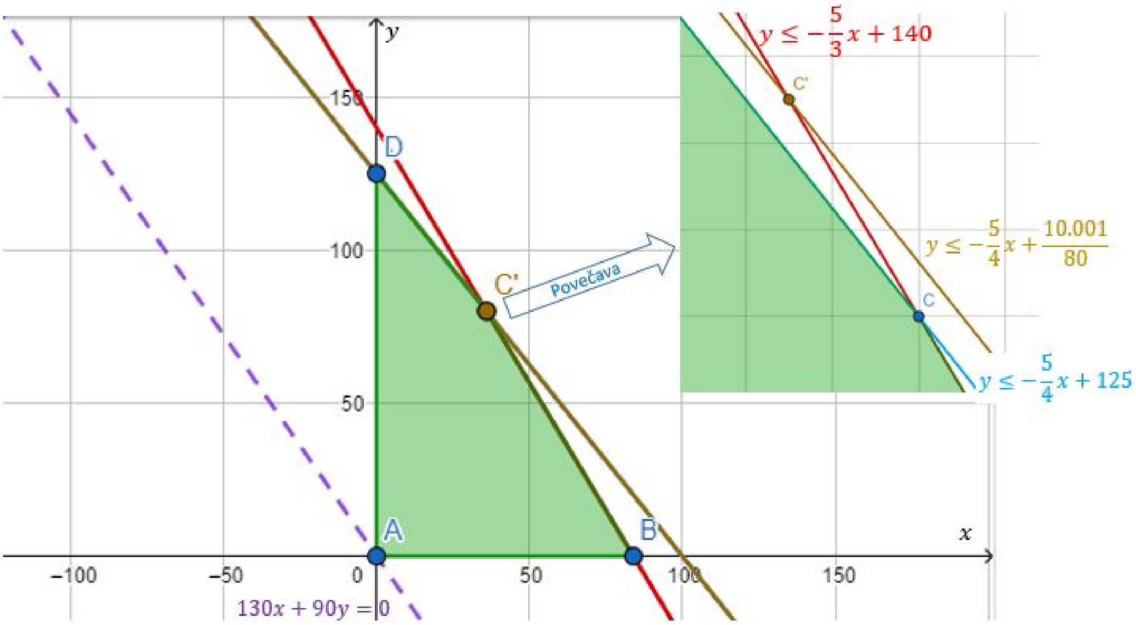
Poleg analize koeficientov namenske funkcije izvedemo še analizo koeficientov desnih strani neenakosti pri omejitvah. Na ta način lahko izračunamo, za koliko se spremeni vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenakosti pri eni izmed omejitev spremeni za eno enoto, medtem ko ostali parametri ostanejo enaki. Spomnimo, da smo že zgoraj zapisali omejitve primarnega linearnega sistema v obliki:

$$100x + 80y \leq 10.000$$

$$5x + 3y \leq 420$$

Najprej poglejmo omejitev $100x + 80y \leq 10.000$ (omejitev surovin). Povečamo desno stran neenačbe za 1: $100x + 80y \leq 10.001$ in izračunamo novo vrednost namenske funkcije v novi rešitvi, ki jo predstavlja točka $C'$, prikazana na sliki 43.

Slika 43: Analiza desnih strani neenakosti primera izdelkov dveh kakovosti



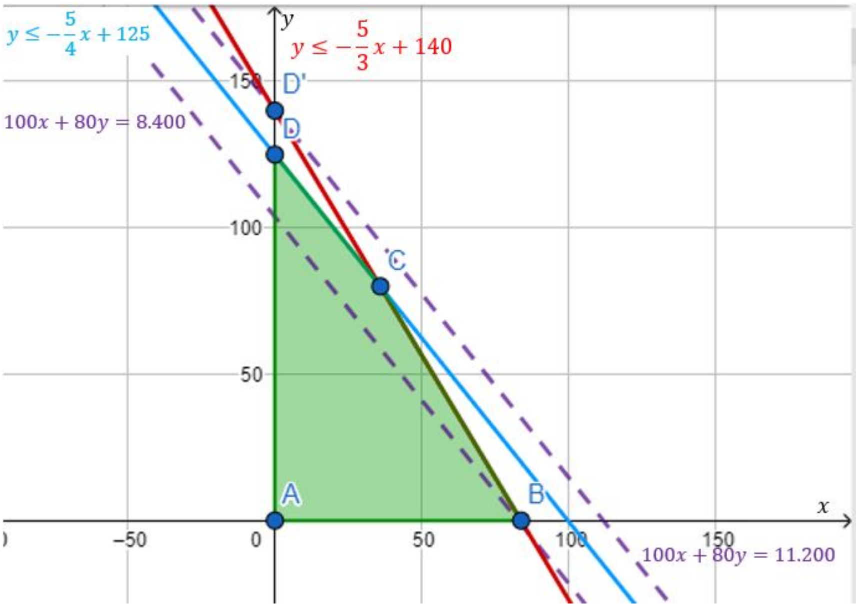

Koordinate točke $C'$ dobimo tako, da enačimo funkcijska predpisa premic, ki se v tej točki sekata. To sta $100x + 80y \leq 10.001$ in $5x + 3y \leq 420$. Točka $C'$ ima koordinate $C'\left(\frac{3.597}{100}, \frac{1601}{20}\right)$, ki jih vstavimo v namensko funkcijo:

$$z(x, y) = 130x + 90y$$
$$z(C') = 130 \cdot \frac{3.597}{100} + 90 \cdot \frac{1601}{20}$$
$$z(C') = 11.880{,}06$$

Glede na prvotno optimalno vrednost namenske funkcije (v točki $C$), ki je 11.880, se pri spremembi desne strani omejitve $100x + 80y \geq 10.000$ za 1 enoto vrednost namenske funkcije spremeni za 0,6 enote (iz 11.880 na 11.880,6). Povedano drugače: če spremenimo količino surovin, ki so na voljo za 1 kg, se bo vrednost zaslužka spremenila za $0{,}6$ €.

Sedaj se postavlja še vprašanje za koliko dodanih ali odvzetih enot na desni strani neenačaja bo izračunana sprememba ostala veljavna. Iz spodnje slike je razvidno, da lahko premikamo premico, ki predstavlja omejitev $100x + 80y \geq 10.000$ proti desni le tako daleč, da poteka skozi točko $D'$, proti levi pa tako daleč, da poteka skozi točko $B$.

Slika 44: Analiza desnih strani neenakosti




Enačba premice, ki poteka skozi točko $D'$ je $100x + 80y = 11.200$. Izračunana sprememba dobička za 0,6 € bo ostala veljavna, če se bo vrednost desne strani neenačbe višala do vrednosti 11.200.

Enačba premice, ki poteka skozi točko $B$ je $100x + 80y = 8.400$, torej bo sprememba dobička za 0,6 € ostala veljavna le, če se bo vrednost desne strani neenačbe spreminjala do vrednosti 8.400.

**Primer 28:**

LESARSTVO HRAST, s. p.

V lesarstvu Hrast, s. p., med drugim izdelujejo lesena okna in vrata. Za obdelavo lesa uporabljajo žago in stroj za oblanje. Žaga je na voljo 30 minut na uro, stroj za oblanje pa 40 minut na uro. Za eno okno je les nažagan v 1 minuti, pooblan pa v 2 minutah. Za ena vrata je les nažagan v 4 minutah in pooblan v 4 minutah. Pri enem oknu ima podjetje 200 €, pri vratih pa 500 € dobička. Koliko oken in vrat naj na uro izdelajo pri podjetju Hrast, s. p., da bo zaslužek maksimalen? Jim pri optimalnem programu ostane kaj resursov? V kakšnih mejah se sme gibati zaslužek s posameznim izdelkom, da bo optimalna rešitev ostala enaka?

**Rešitev**

| | Okna | Vrata | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Žaga [min] | 1 | 4 | 30 |
| Oblanje [min] | 2 | 4 | 40 |
| Zaslužek [€] | 200 | 500 | |
| Število izdelkov | $x$ | $y$ | |

- **Linearni program**

Namenska funkcija $z$ predstavlja skupni dobiček pri prodaji izdelkov, zato velja:

$$\mathrm{z}(x,y) = 200x + 500y$$

Ker želi imeti podjetje na koncu meseca maksimalni zaslužek, iščemo maksimum namenske funkcije:

$$\max z(x,y) = 200x + 500y$$

Omejitve linearnega programa predstavljajo omejitve časa, ko imajo v podjetju na voljo stroj za žaganje in oblanje. Skupno je na voljo 30 minut v eni uri za uporabo stroja za žaganje, zato velja:

$$1\mathrm{x} + 4y \leq 30$$

Stroj za oblanje pa je na voljo 40 minut na uro, zato lahko zapišemo omejitev v obliki:

$$2x + 4y \leq 40$$

Upoštevati je treba še nenegativnost spremenljivk:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

**LINGO rešitev**

Predstavili bomo reševanje problema s programom LINGO. Najprej zapišemo linearni program v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
max = 200*x + 500*y;
!Omejitve;
[Zaga] x + 4*y <= 30;
[Oblanje] 2*x + 4*y <= 40;
```

Poročilo o rešitvi:

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              4500.000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                        LP

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                     X        10.00000            0.000000
                                     Y        5.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        4500.000            1.000000
                                  ZAGA        0.000000            50.00000
                               OBLANJE        0.000000            75.00000
```

Podjetje Hrast, s. p., naj izdeluje 10 kosov oken in 5 kosov vrat, da bo imelo maksimalni zaslužek. Zaslužek bo v tem primeru znašal 4.500 €. Pri optimalnem proizvodnem planu jim ne ostane nič neizkoriščenih resursov.

Analiza občutljivosti:

```
  Ranges in which the basis is unchanged:

                                   Objective Coefficient Ranges:

                                 Current        Allowable        Allowable
                 Variable    Coefficient         Increase         Decrease
                        X       200.0000         50.00000         75.00000
                        Y       500.0000         300.0000         100.0000

                                       Righthand Side Ranges:

                                 Current        Allowable        Allowable
                      Row            RHS         Increase         Decrease
                     ZAGA       30.00000         10.00000         10.00000
                  OBLANJE       40.00000         20.00000         10.00000
```

Zaslužek z enim kosom okna se sme gibati med 125 in 250 €, zaslužek z enim kosom vrat pa med 400 in 800 €, da se optimalna rešitev proizvodnega programa ne bo spremenila.

**Primer 29:**

DVA KIPARJA

Dva kiparja izdelujeta marmorne in lesene kipe. Za grobo oblikovanje marmornega kipa porabi prvi kipar 4 dni, za lesenega pa 2 dni. Za fino glajenje marmornega ali lesenega kipa porabi drugi kipar 2 dni. Cena za marmorni kip je 1.000 €, za leseni pa 400 €. Koliko posameznih vrst kipov naj kiparja izdelata, da bo zaslužek maksimalen, če upoštevamo, da je v letu 300 delovnih dni? Ali delata oba kiparja ves čas? Za koliko se poveča dobiček, če posamezni kipar dela 1 dodatni dan na leto?

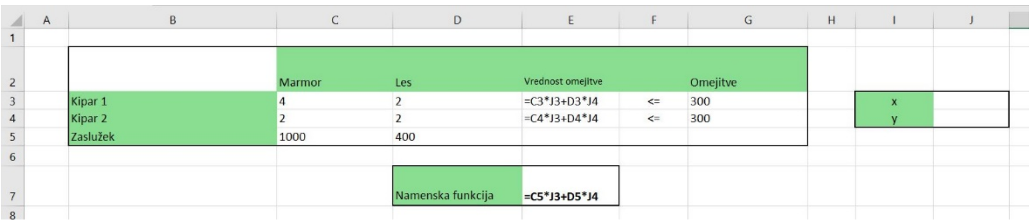
**Rešitev:**

| | Marmor | Les | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Kipar 1 [število dni] | 4 | 2 | 300 |
| Kipar 2 [število dni] | 2 | 2 | 300 |
| Zaslužek [€] | 1.000 | 400 | |
| Število izdelkov | $x$ | $y$ | |

Tabelo prenesemo na prazen delovni list v Excelu. Nastavimo enačbo za namensko funkcijo:

$$\max z\,(x, y) = 1.000x + 400y$$

Slika 45: Priprava za reševanje v Excelu




Omejitve linearnega programa predstavljajo omejitve časa, ko kiparja izdelujeta kipe. Skupno kipar 1 dela 300 dni na leto, zato velja:

$$4x + 2y \leq 300$$

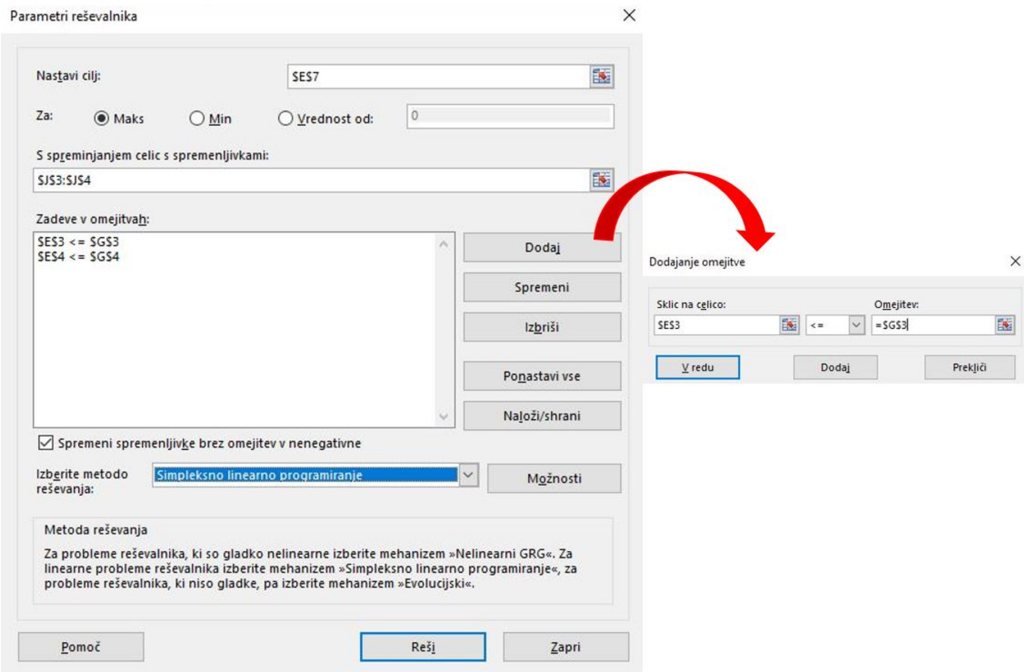
Prav tako kipar 2 dela 300 dni na leto, zato lahko zapišemo omejitev zanj v obliki:

$$2x + 2y \leq 300$$

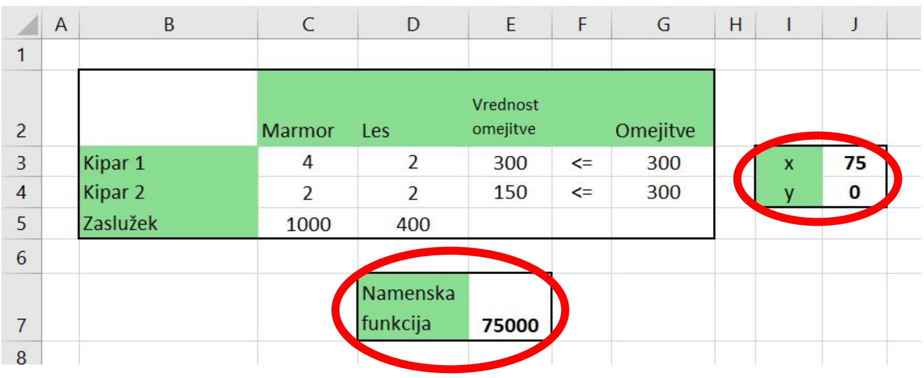
Omejitvi vnesemo v stolpec Vrednost omejitve, vnesemo še formulo namenske funkcije ($1.000x + 400y$).

Ko so vnesene vse enačbe, odpremo orodje Reševalnik in izpolnimo potrebne parametre.

Slika 46: Reševalnik




Slika 47: Rešitev problema



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Marmor | Les | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | |
| 3 | | Kipar 1 | 4 | 2 | 300 | <= | 300 | | x | 75 |
| 4 | | Kipar 2 | 2 | 2 | 150 | <= | 300 | | y | 0 |
| 5 | | Zaslužek | 1000 | 400 | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Namenska funkcija | 75000 | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |

Kiparja naj izdelata 75 marmornih kipov, da bo njun zaslužek največji. V tem primeru bosta zaslužila 75.000 €. Lesenih kipov naj ne izdelujeta.

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $E$7 | Namenska funkcija Vrednost omejitve | 75000 | 75000 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $J$3 | x | 75 | 75 | Contin |
| $J$4 | y | 0 | 0 | Contin |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$3 | Kipar 1 Vrednost omejitve | 300 | $E$3<=$G$3 | Vpenjanje | 0 |
| $E$4 | Kipar 2 Vrednost omejitve | 150 | $E$4<=$G$4 | Brez vpenjanja | 150 |

Pri optimalnem planu izdelovanja kipov bo prvi kipar delal vse dni v letu, drugi kipar pa bo imel prostih 150 dni.

Poročilo o občutljivosti:

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$3 | x | 75 | 0 | 1000 | 1E+30 | 200 |
| $J$4 | y | 0 | -100 | 400 | 100 | 1E+30 |

Omejitve

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Senca Cena | Omejitev Stran R.H. | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$3 | Kipar 1 Vrednost omejitve | 300 | 250 | 300 | 300 | 300 |
| $E$4 | Kipar 2 Vrednost omejitve | 150 | 0 | 300 | 1E+30 | 150 |

Če kipar 1 dela en dan v letu več/manj, se dobiček poveča/zmanjša za 250 €. Spreminjanje delovnih dni drugega kiparja na dobiček ne vpliva, saj je njegova omejitev neaktivna (ob delu mu ostane še nekaj prostih dni).

**Primer 30:**

TISKARNA[39]

V tiskarni tiskajo zgibanke, revije ter knjige. Za pripravo knjige za tisk porabijo 20 dni, za tiskanje knjige pa 5 dni. Za pripravo revije za tisk porabijo 5 dni, za tiskanje pa 2 dni. V enem dnevu za tisk pripravijo eno zgibanko in prav toliko časa porabijo, da to zgibanko natisnejo. Priprava na tisk poteka 360 dni v letu, stroji za tisk pa so na voljo 120 dni na leto. Pri tisku ene serije zgibank zaslužijo 40 €, pri eni seriji revij 270 € in seriji knjig 1.000 €.
Koliko serij zgibank, revij in knjig naj natisnejo na leto, da bo zaslužek maksimalen? Ali so stroji za tisk 100 % izkoriščeni?

**Rešitev:**

Natisniti morajo 8 knjig in 40 revij, da bo zaslužek maksimalen in bo znašal 18.800 €. Stroji za tisk so 100 % izkoriščeni.

**Primer 31:**

AVTOLIČARSKA DELAVNICA

V avtoličarski delavnici popravljajo, barvajo in sušijo poškodovane avtomobile, kombije in tovornjake. V povprečju popravljajo en avtomobil 2 uri, kombi 3 ure, tovornjak pa 4 ure. Barvanje avtomobila jim v povprečju vzame 1 uro, barvanje kombija ali tovornjaka pa 2 uri. Sušenje vsakega vozila traja 1 uro. Delavci delajo na izmene, tako da se vozila popravljajo 16 ur na dan, barvajo 9 ur, sušijo pa 6 ur. Pri celotni storitvi za avtomobil je zaslužek v povprečju 400 €, za kombi 600 € in za tovornjak 700 €.

Koliko avtomobilov, kombijev in tovornjakov naj popravijo na dan, da bo zaslužek maksimalen? Za koliko se poveča zaslužek, če so delavci iz vsake skupine (popravljanje, barvanje in sušenje) na voljo 1 uro več na dan?

[39] Primer Tiskarna ni več rešljiv z grafično metodo, saj vsebuje tri odločitvene spremenljivke (zgibanka - $x_1$, revija - $x_2$ in knjiga $x_3$).

**Rešitev:**

Zaslužek bo maksimalen (to je 3.100 €), če popravijo 3 avtomobile, 2 kombija in 1 tovornjak dnevno. Vsaka skupina delavcev, ki dela 1 dodatno uro dnevno, poveča dobiček za 100 €.

**Primer 32:**

PEKARNA

V pekarni pečejo poleg vseh ostalih proizvodov tudi črni in polnozrnati kruh. Prvi pek ima zjutraj eno uro časa, da zamesi maso za ti dve vrsti kruha, drugi pek pa ima tri ure časa, da ti dve vrsti kruha speče. Za mesenje enega hleba polnozrnatega kruha porabi pek v povprečju 3 minute, za črnega pa 2 minuti. Za peko polnozrnatega kruha porabi drugi pek v povprečju 6 minut, za črnega pa 8 minut. Tako pri polnozrnatem kot pri črnem kruhu ima pekarna 2 € dobička na hleb.

Koliko polnozrnatih in črnih hlebov kruha naj pripravita peka, da bo dobiček pekarne maksimalen (v primeru, da vse hlebe kruha tudi prodajo)? Kolikšen je dobiček v tem primeru? Ali delata oba peka ves čas? Za koliko se poveča dobiček, če damo posameznemu peku 1 minuto več časa? Za koliko lahko posameznemu peku največ podaljšamo in za koliko skrajšamo delovni čas, da bo sprememba dobička, ki smo jo izračunali veljala? Za koliko se lahko spremeni dobiček pri posameznem hlebu kruha, da se optimalna rešitev ne spremeni?

**Rešitev:**

Maksimalni dobiček 50 € bodo v pekarni dosegli, če spečeta 10 polnozrnatih in 15 črnih kruhov. Pri tem oba peka delata ves čas, ki ga imata na voljo. Če bi imel pek za mesenje 1 minuto več časa, bi se dobiček povečal za $\frac{1}{3}$ €, če pa bi imel drugi pek 1 minuto več časa, bi se vrednost namenske funkcije povečala za $\frac{1}{6}$ €.

Prvemu peku lahko iz trenutnih 60 minut delovni čas podaljšamo največ za 30 min in skrajšamo za 15 min, drugemu peku pa lahko iz trenutnih 180 minut delovni čas podaljšamo ali skrajšamo največ za 60 min. Pri polnozrnatem kruhu se lahko dobiček giblje med 1,5 in 3 € na hleb, pri črnem pa med 1,33 in 2,67 €.

# 5 PROBLEM MEŠANJA

Problem mešanja je problem linearnega programiranja, katerega cilj je najti najcenejšo zmes s predpisanimi lastnostmi. Problemi mešanja so še posebej pomembni v naftni industriji, kemijski industriji in proizvodnji hrane, torej na področjih, kjer je želena oziroma zahtevana določena raven kvalitete, ki jo proizvajalci želijo pridobiti z minimalnimi stroški. Problem mešanja je, kljub široki uporabi v različnih industrijah, zaradi svoje pogoste aplikacije v živilski industriji pogosto imenovan kot prehrambeni problem.

Problem mešanja ali prehrambenim problem[40] v gradivu imenujemo vse tiste vrste problemov, kjer je cilj poiskati zmes, pri kateri so, ob upoštevanju določene kvalitete, stroški izdelave zmesi najnižji. Pri tovrstnih problemih iščemo minimum namenske funkcije.

**Primer 33:**

DVD-ji in KNJIGE

Na razprodaji so ponujali komplete knjig in DVD-jev. Kuharski komplet vsebuje 6 knjig in 3 DVD-je ter stane 60 €. Izobraževalni komplet pa vsebuje 2 knjigi in 6 DVD-jev ter stane 100 €. Bine želi za darila ob koncu leta imeti vsaj 28 knjig in 24 DVD-jev. Koliko kompletov s kuharsko vsebino in koliko kompletov z izobraževalno vsebino naj Bine kupi, da bo zadovoljil svoje želje in bo pri tem imel najnižje stroške?

[40] Diet problem

Uredimo dane podatke v preglednico:

| | Kuharski komplet | Izobraževalni paket | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Knjige [kos] | 6 | 2 | 28 |
| DVD-ji [kos] | 3 | 6 | 24 |
| Strošek [€] | 60 | 100 | |
| Število kompletov | $x$ | $y$ | |

***Določitev odločitvenih spremenljivk***

Bine želi kupiti dva različna kompleta, sestavljena iz kuharskih in izobraževalnih knjig ter DVD-jev. Določiti je potrebno koliko posameznih paketov naj kupi:

$$x - število\ kuharskih\ kompletov$$

$$y - število\ izobraževalnih\ kompletov$$

***Določitev namenske funkcije***

Namenska funkcija predstavlja skupni strošek pri nakupu kompletov knjig in DVD-jev:

- strošek z nakupom enega kuharskega kompleta je 60, torej je strošek z nakupom $x$ kuharskih kompletov $60x$,
- strošek z nakupom enega izobraževalnega kompleta je 100, torej je strošek z nakupom $y$ izobraževalnih kompletov $100y$.

Strošek z nakupom $x$ kuharskih kompletov in $y$ izobraževalnih kompletov je torej enak $60x + 100y$.

Ker želi Bine čim manjše stroške nakupa, iščemo minimum namenske funkcije:

$$\min z(x, y) = 60x + 100y$$

### *Določitev omejitev*

Omejitve v primeru problema mešanja predstavljajo potrebe po številu izdelkov ali kvaliteti zmesi. Vedno stremimo k cilju, da omejitev (zahtevo ali željo po nečem) vsaj dosežemo ali pa jo presežemo. V predstavljenem primeru omejitve predstavlja želja po številu knjig in DVD-jev, ki jih Bine želi kupiti.

Knjige:

- v enem kuharskem kompletu je 6 knjig, torej je v $x$ kuharskih kompletih $6x$ knjig,
- v enem izobraževalnem kompletu sta 2 knjigi, torej je v $y$ izobraževalnih kompletih $2y$ knjig,
- v $x$ kuharskih in v $y$ izobraževalnih kompletih je skupaj $6x + 2y$ knjig.

Bine želi kupiti vsaj 28 knjig, zato je zapis omejitve: $6x + 2y \geq 28$.

DVD-ji:

- v enem kuharskem kompletu so 3 DVD-ji, torej je v $x$ kuharskih kompletih $3x$ DVD-jev,
- v enem izobraževalnem kompletu je 6 DVD-jev, torej je v $y$ izobraževalnih kompletih $6y$ DVD-jev,
- v $x$ kuharskih in v $y$ izobraževalnih kompletih skupaj $3x + 6y$ DVD-jev.

Bine želi kupiti vsaj 24 DVD-jev, zato velja: $3x + 6y \geq 24$.

### *Pogoj nenegativnosti*

Bine ne more kupiti negativnega števila knjig in DVD-jev, zato zapišemo še pogoj nenegativnosti za obe odločitveni spremenljivki:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

**Linearni program** danega problema je torej naslednji:

$$\min z(x,y) = 60x + 100y$$

pri omejitvah:

$$6x + 2y \geq 28$$
$$3x + 6y \geq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

## 5.1 Grafično reševanje problema mešanja

Probleme mešanja v katerih nastopata le dve spremenljivki lahko rešimo z grafično metodo. Za zgled, kako grafično rešujemo probleme mešanja uporabimo kar prej opisani problem nakupa kompletov s knjigami in DVD-ji.

$$\min z(x,y) = 60x + 100y$$

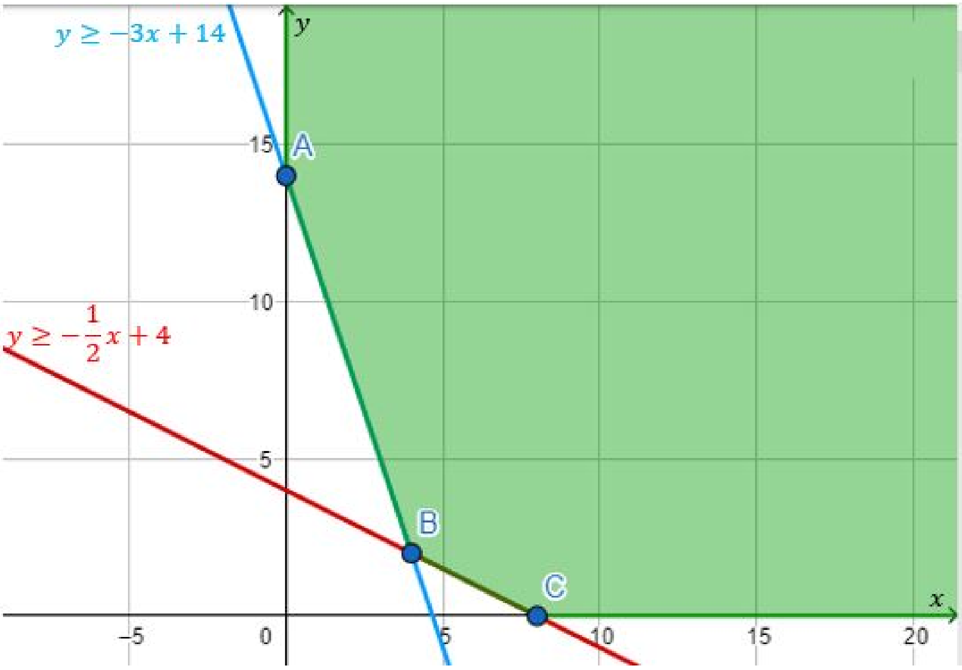
pri omejitvah:

$$6x + 2y \geq 28$$
$$3x + 6y \geq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

V koordinatni sistem narišemo množico vseh rešitev sistema linearnih neenačb, ki ga sestavljajo omejitve in pogoj nenegativnosti v linearnem programu:

$$6x + 2y \geq 28$$
$$3x + 6y \geq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Slika 48: Množica rešitev sistema linearnih neenačb problema mešanja




Množica vseh rešitev danega sistema je obarvana konveksna množica. Namenska funkcija $z(x, y) = 60x + 100y$ doseže minimum v eni izmed ekstremnih točk (oglišč) konveksnega lika. V kateri točki ga doseže, lahko določimo na računski (a) ali grafični način (b).

**a) Računski način**

Določimo koordinate vseh oglišč konveksne množice točk. Koordinate točk $A$ in $C$ razberemo iz grafa:

$$A(0,14)$$
$$C(8,0)$$

Točka $B$ se nahaja na presečišču premic $6x + 2y = 28$ in $3x + 6y = 24$. Izračunamo njene koordinate in dobimo točko $B(4,2)$.

Izračunamo vrednost namenske funkcije $z(x, y) = 60x + 100y$ v vsakem oglišču konveksnega lika:

$$z(A) = 60 \cdot 0 + 100 \cdot 14 = 1400$$
$$z(B) = 60 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 440$$

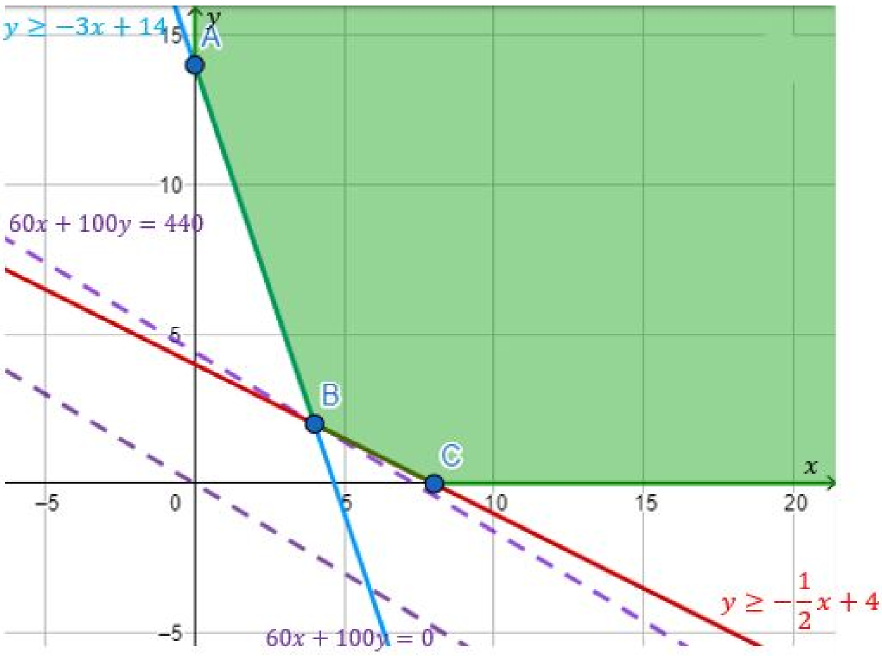
$$z(C) = 60 \cdot 8 + 100 \cdot 0 = 480$$

Namenska funkcija doseže minimalno vrednost 440 v točki $B(4,2)$. To pomeni, da bo imel Bine najmanjše stroške, če bo kupil 4 kuharske in 2 izobraževalna kompleta. Stroški, ki jih bo pri tem imel, bodo znašali 440 €.

### b) Grafični način

V koordinatni sistem s konveksno množico narišemo še (vijolično) premico z enačbo $z(x, y) = 0$, torej $60x + 100y = 0$. Iščemo minimum namenske funkcije, zato moramo to premico vzporedno premakniti čim nižje na grafu, vendar tako, da bo imela s konveksno množico vsaj še eno skupno točko.

Slika 49: Iskanje minimuma z vzporednim premikanjem premice




Vzporednica premice $z(x, y) = 0$ se konveksne množice dotakne v točki $B$. To pomeni, da namenska funkcija doseže minimum v točki $B$. Da bi ugotovili, kakšno vrednost doseže funkcija v točki, moramo najprej določiti koordinate točke $B(4,2)$.

Minimum namenske funkcije je enak $z(B) = 60 \cdot 14 + 100 \cdot 2 = 440$. To pomeni, da bo imel Bine najmanjše stroške z nakupom, če bo kupil 4 kuharske in 2 izobraževalna kompleta. Stroški bodo v tem primeru znašali 440 €.

### 5.1.1 Analiza optimalne rešitve problema mešanja

Z zapisom omejitev linearnega programa za dani primer, kjer je uporabljena neenakost, je dopuščeno, da Bine določene izdelke kupi v večji količini, kot je določena. Željena količina nakupa knjig je 28, željena količina DVD-jev pa 24.

Vprašanje, ki se nam zastavi po dobljeni rešitvi je, če z optimalnim nakupom Bine dobi katerega izmed izdelkov v večji količini od željene.

Optimalna rešitev problema je nakup 4 kuharskih in 2 izobraževalnih kompletov. To pomeni, da bo Bine s takšnim nakupom dobil $6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 28$ knjig, kar je točno toliko, kolikor je bila njegova želja. Višek pri nakupu knjig je tako 0.

Na isti način sedaj izračunamo še presežek pri nakupu DVD-jev. Z optimalnim nakupom Bine pridobi $3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 24$ DVD-jev. Višek pri nakupu DVD-jev je prav tako enak 0.

Obe omejitvi sta aktivni, za spremembo vrednosti namenske funkcije je tako potrebno spremeniti vrednost omejitve. Povedano drugače: če želimo drugačno vrednost namenske funkcije, moramo spremeniti desne strani neenakosti pri omejitvah (spremeniti moramo število knjig in DVD-jev, ki jih Bine želi kupiti). V primeru, da bi Bine kupil katerega izdelka v večji količini od željene, bi bile omejitve neaktivne.

### 5.1.2 Analiza občutljivosti optimalne rešitve problema mešanja

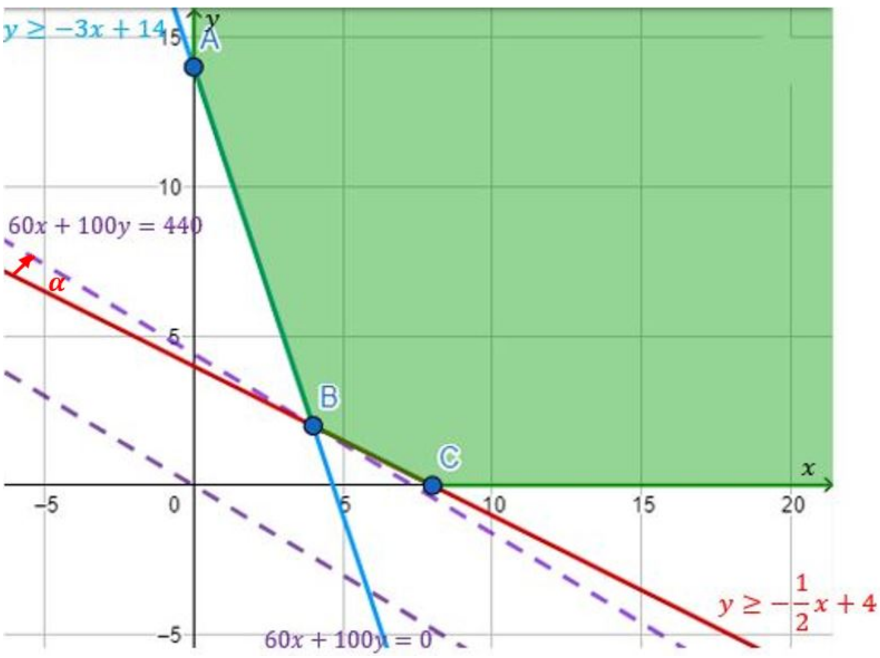
V tem poglavju bomo preverili, ali je optimalna rešitev pridobljena z linearnim programom občutljiva na spremembe vhodnih parametrov ter kako spremembe vplivajo na optimalno rešitev.

#### 5.1.2.1 Analiza koeficientov namenske funkcije

Optimalna rešitev linearnega programa bo navkljub spremembam koeficientov namenske funkcije ostala nespremenjena tako dolgo, dokler se bo posamezni koeficient nahajal v t. i. območju optimalnosti, drugi parametri programa pa se ne bodo spreminjali. S spreminjanjem koeficientov se bo spreminjala tudi vrednost namenske funkcije.

Na sliki 50 je predstavljena grafična rešitev problema mešanja. Iz slike je razvidno, da namenska funkcija doseže minimum (440 €) v točki $B$. S spreminjanjem koeficienta namenske funkcije se spreminja naklon premice namenske funkcije.

Slika 50: Spreminjanje naklona namenske funkcije

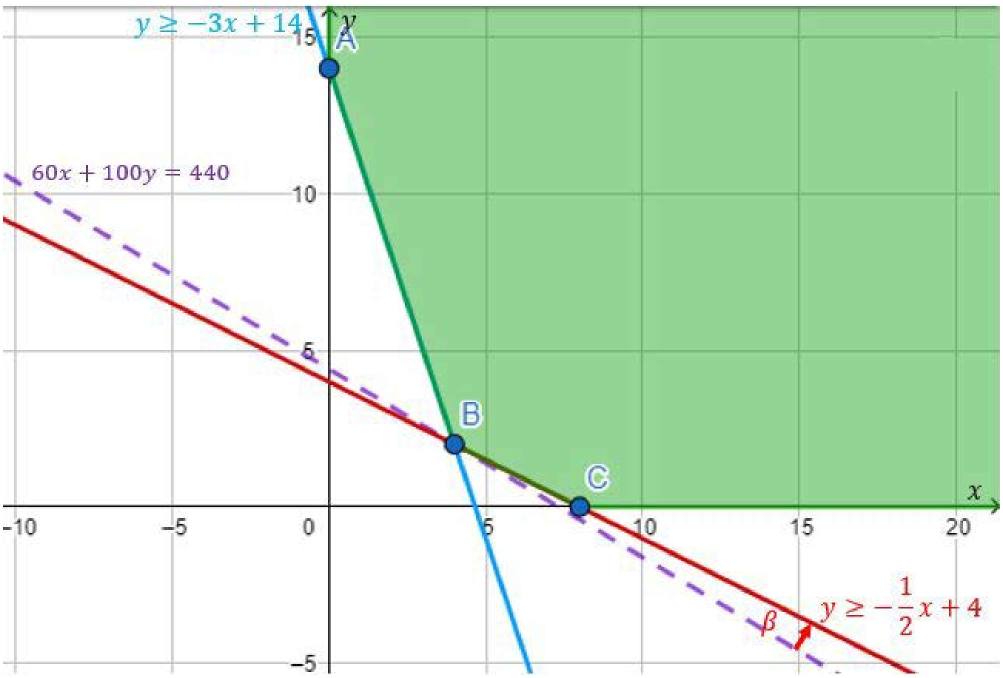



Premico namenske funkcije zavrtimo v točki $B$ za kot $\alpha$. V tem primeru premica namenske funkcije prekriva premico omejitve, ki poteka skozi točko $A$. Tako točka $B$ ni več edina optimalna rešitev problema. Rešitev je postala tudi točka $A$ in vse točke na daljici $AB$.

Z vsakim nadaljnjim zasukom z osjo v točki $A$ postane točka $A$ edina optimalna rešitev danega linearnega programa. Posledično se spremeni tudi optimalna rešitev linearnega programa.

Isto lahko naredimo še v drugo smer. Premico namenske funkcije zavrtimo za kot $\beta$, da bo vedno bolj položna. To lahko počnemo tako dolgo, dokler se premica namenske funkcije in premica omejitve, ki poteka skozi točko $C$, ne prekrivata.

Slika 51: Spreminjanje naklona namenske funkcije




S spreminjanjem naklona premice, ki predstavlja graf namenske funkcije, smo dosegli, da se je optimalna rešitev danega linearnega programa spremenila. Sprememba naklona premice pa pomeni spremembo koeficientov enačbe namenske funkcije. Zanima nas, kakšne so vrednosti koeficientov.

Posvetimo se najprej koeficientu pri odločitveni spremenljivki $x$. Uporabimo enačbo za izračun koeficienta premice, ki poteka skozi dve točki:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

V danem primeru, kjer sta $A(0,14)$ in $B(4,2)$ velja:

$$k = \frac{2-14}{4-0} = \frac{-12}{4} = -3$$

S slike 50 je razvidno, da premica iskane namenske funkcije seka $y$ os pri vrednosti 14, zato je začetna vrednost enačbe premice $n = 14$.

Enačba nove premice je torej: $y = -3x + 14$.

Enačbo preoblikujemo v ustreznejšo obliko za iskanje koeficienta $k$:

$$3x + y = 14.$$

Ker je cilj dobiti enačbo oblike $kx + 100y$, celotno enačbo pomnožimo s 100:

$$3x + y = 14 \ /\cdot 100$$

$$300x + 100y = 1.400$$

Iz novo pridobljene enačbe premice razberemo novi (največji) koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji. Če bo $k \leq 300$, bo točka $B$ še vedno ostala ena izmed optimalnih rešitev linearnega programa. Če bo $k < 300$, bo $B$ edina optimalna rešitev.

Enako naredimo za primer, ko premica namenske funkcije prekriva premico omejitve, ki poteka skozi točko $C$ (slika 47). Poiskati je treba enačbo premice, ki poteka skozi točki $B(4,2)$ in $C(8,0)$. Izračunamo smerni koeficient premice:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{0-2}{8-4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Iskana premica seka os $y$ pri vrednosti 4 (razvidno iz slike 51). Začetna vrednost enačbe premice, je torej $n = 4$.

Enačba nove premice je: $y = -\frac{1}{2}x + 4$

Preoblikujemo jo in pomnožimo s 100, da dobimo enačbo oblike $0 = kx + 100y$:

$$\frac{1}{2}x + y = 4 \;/\cdot 100$$

$$50x + 100y = 400$$

Razberemo lahko najmanjši koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji. Če bo $k \geq 50$, bo točka $B$ še vedno ostala ena izmed optimalnih rešitev linearnega programa. Če bo $k > 50$, bo $B$ edina optimalna rešitev.

Natančnejši vpogled v rezultate pokaže, da se koeficient pri spremenljivki $x$, ki predstavlja strošek nakupa kuharskega kompleta, lahko spreminja med 50 € in 300 €. Če bi strošek padel pod 50 € ali narasel nad 300 €, bi se rešitev linearnega programa spremenila.

Če bi koeficient pri spremenljivki $x$ narasel nad 300, točka $B$ na grafu ne bi bila več optimalna rešitev, ampak bi to postala točka $A$. To bi pomenilo, da je kuharskemu kompletu cena preveč narasla in bi bilo optimalno kupiti le izobraževalne komplete, da bi ob danih omejitvah dosegli minimalne stroške.

Če bi koeficient pri spremenljivki $x$ padel pod 50, bi se optimalna rešitev prestavila v točko $C$. Minimalne stroške z nakupom bi dosegli, če bi kupili le kuharske komplete.

Enako sedaj naredimo še za koeficiente pri spremenljivki y, da ugotovimo kako sprememba koeficienta pred spremenljivko $y$ v namenski funkciji (ob stalnem koeficientu pred $x$) vpliva na optimalno rešitev.

Enačbo premice, ki se dotika točke $A$ in enačbo premice za omejitev, ki poteka skozi točko $C$ moramo preoblikovati tako, da dobimo enačbo oblike $0 = 60x + ky$, kjer $k$ predstavlja spremenjeni koeficient pri spremenljivki $y$.

$$3x + y = 14 \;/\cdot 20$$

$$60x + 20y = 280$$

in

$$\frac{1}{2}x + y = 4 \;/\cdot 120$$

$$60x + 120y = 480$$

Strošek za izobraževalni komplet se lahko giba med 20 € in 120 €, da se optimalna rešitev (točka $B$) ne bo spremenila. Če koeficient pred spremenljivko $y$ pade pod 20, postane optimalna rešitev točka $A$; da bi dosegel minimalne stroške, bi Bine v tem primeru kupil izključno izobraževalne komplete. Če koeficient pred spremenljivko $y$ naraste nad 120, postane optimalna rešitev točka $C$; za minimalne stroške bi Bine kupil izključno kuharske komplete.

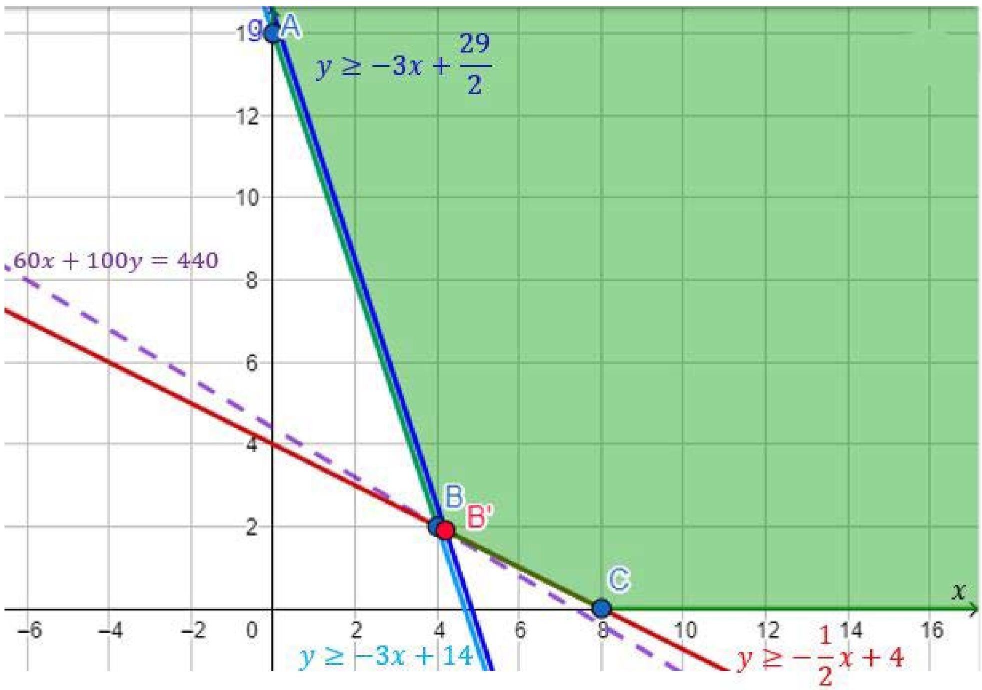
#### 5.1.2.2 Analiza desnih strani neenakosti pri omejitvah

Pri analizi desnih strani neenakosti želimo odgovoriti na dve vprašanji:

- Za koliko se spremeni vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenakosti pri eni izmed aktivnih omejitev spremeni za eno enoto, vsi ostali parametri pa ostanejo enaki?
- Za koliko dodanih ali odvzetih enot na desni strani neenačaja bo izračunana sprememba na enoto ostala veljavna?

Analizirajmo najprej omejitev $6x + 2y \geq 28$ (omejitev števila knjig). Desno stran neenačbe povečamo za eno enoto. Omejitev $6x + 2y \geq 29$ narišemo v graf in izračunamo vrednost namenske funkcije v novi rešitvi, ki jo predstavlja točka $B'$ (slika 52).

Slika 52: Senčna cena omejitve nakupa knjig




Koordinate točke $B'$ izračunamo tako, da izračunamo presečišče premic $6x + 2y = 29$ in $3x + 6y = 24$. Rešitev pa nato vstavimo v namensko funkcijo $z(x, y) = 60x + 100y$.

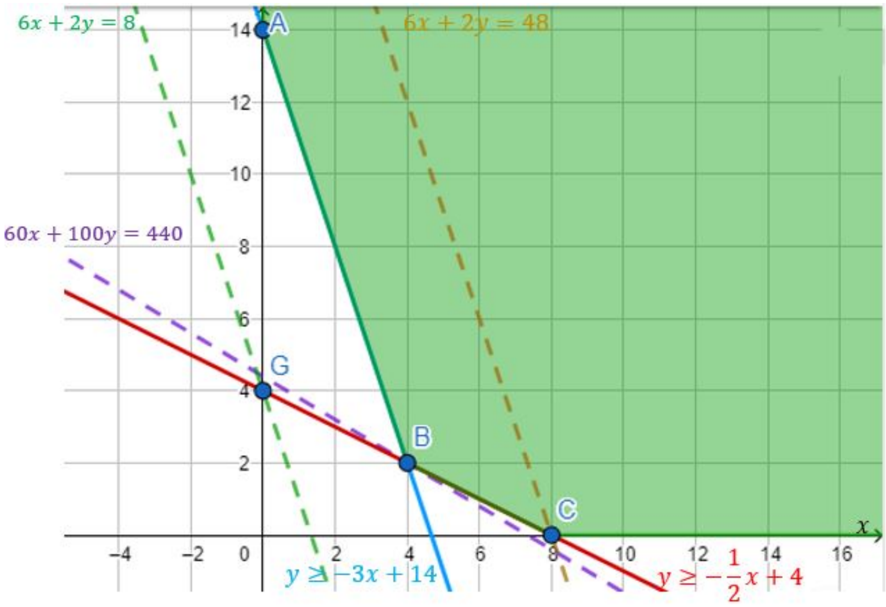
Nova optimalna rešitev je $B'(\frac{21}{5}, \frac{19}{10})$. Koordinati točke vstavimo v namensko funkcijo

$$z(B') = 60 \cdot \frac{21}{5} + 100 \cdot \frac{19}{10} = 442$$

Vrednost namenske funkcije v točki $B'$ je 442. Vrednost namenske funkcije pri prvotni rešitvi $B$ pa je 440. Vrednost namenske funkcije se je spremenila za 2 enoti. Če se omejitev poveča za eno enoto, se tudi vrednost namenske funkcije poveča. Seveda je to povsem logično, saj če povečamo zahtevo po številu knjig, lahko z nakupom pričakujemo višje stroške.

Preverimo še, do katere vrednosti se lahko spreminja število željenih knjig, da bo izračunana sprememba ostala veljavna. Iz slike 53 je razvidno, da lahko premico, ki predstavlja omejitev $6x + 2y = 28$ na desni strani premikamo le tako daleč, da poteka skozi točko $C$, na levi pa tako daleč, da poteka skozi točko $D$.

Slika 53: Analiza desne strani neenakosti (omejitev nakupa knjig)




Enačbo vzporednice, ki poteka skozi točko $G$ dobimo tako, da prvotno enačbo omejitve preoblikujemo v eksplicitno obliko $y = -3x + 14$, da lahko razberemo smerni koeficient. Ker sta premici vzporedni, imata enak smerni koeficient (to je $-3$). Da bi določili začetno vrednost $n$, v enačbo vstavimo koordinati točke $G(0,4)$

$$y = -3x + n$$
$$4 = -3 \cdot 0 + n$$
$$n = 4$$

Enačba v eksplicitni obliki je naslednja: $y = -3x + 4$, v implicitni pa $3x + y - 4 = 0$. Enačbo preuredimo tako, da bo zapis podoben začetnemu ($6x + 2y = 28$). Pomnožimo jo z 2 in jo preuredimo, da dobimo:

$$6x + 2y = 8.$$

Če primerjamo desne strani enačbe začetne omejitve in vzporedne premice vidimo, da se je njena vrednost iz 28 zmanjšala na 8. To je tudi minimalna vrednost, na katero se lahko zmanjša desna stran neenačbe $6x + 2y = 28$, ki predstavlja omejitev nakupa knjig, tako da bo v prejšnjem poglavju izračunana sprememba vrednosti namenske funkcije pri spremembi desne strani neenačbe, še veljavna.

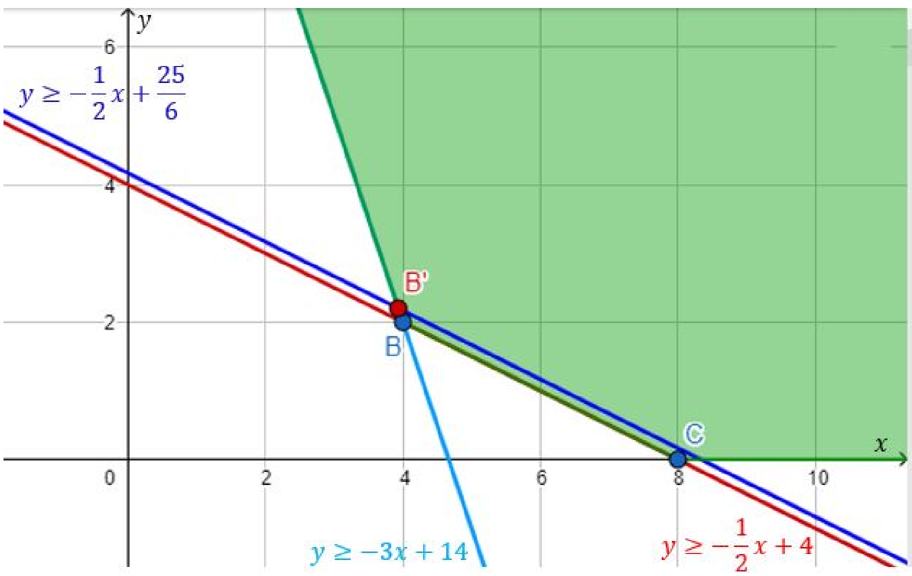
Tudi premica, ki poteka skozi točko $C$ ima smerni koeficient −3. Potrebujemo le še njeno začetno vrednost $n$. Vrednost izračunamo tako, da upoštevamo potek vzporedne premice skozi točko $C(8{,}0)$. Velja:

$$y = -3x + n$$
$$0 = -3 \cdot 8 + n$$
$$n = 24$$

Enačbo vzporedne premice, ki poteka skozi točko $C$ v eksplicitni obliki zapišemo $y = -3x + 24$, v implicitni pa $3x + y - 24 = 0$. Enačbo preuredimo tako, da bo zapis podoben začetnemu ($6x + 2y = 28$). Pomnožimo jo z 2 in jo preuredimo, tako da dobimo $6x + 2y = 48$.

Če primerjamo desne strani enačbe začetne omejitve in vzporedne premice vidimo, da se je vrednost iz 28 povečala na 48. To je tudi maksimalna vrednost, na katero lahko povečamo desno stran neenačbe $6x + 2y = 28$, ki predstavlja omejitev nakupa knjig, da bo v prejšnjem poglavju izračunana sprememba vrednosti namenske funkcije, pri spremembi desne strani neenačbe, še veljavna. Analizirajmo še omejitev števila DVD-jev ($3x + 6y \geq 24$) in spremembo namenske funkcije, če omejitev spremenimo za 1. Narišemo omejitev $3x + 6y \geq 25$ v graf in preverimo novo rešitev v točki $B'$.

Slika 54: Senčna cena omejitve nakupa DVD-jev



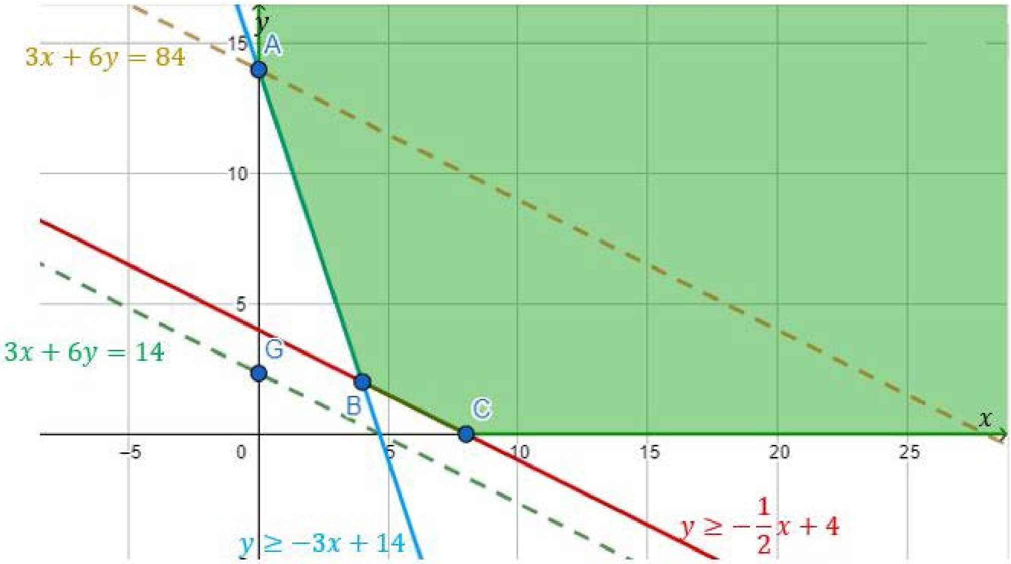
Nova optimalna rešitev je $B'(\frac{59}{15}, \frac{11}{5})$. Koordinati točke vstavimo v namensko funkcijo:

$$z(B') = 60 \cdot \frac{59}{15} + 100 \cdot \frac{11}{5} = 456$$

Vrednost namenske funkcije v točki $B'$ je 456. Vrednost namenske funkcije pri prvotni rešitvi $B$ pa je 440. V primeru, da bi Bine želel kupiti 1 DVD več, bi se vrednost namenske funkcije spremenila za $16$ €.

Preverimo še, do katere vrednosti se lahko spreminja število željenih DVD-jev, da bo izračunana sprememba ostala veljavna. Premico, ki predstavlja omejitev glede števila DVD-jev lahko v desno premikamo tako daleč, da poteka skozi točko $A$ in v levo do točke $G$.

Slika 55: Analiza desne strani neenakosti (omejitev nakupa DVD-jev)




Omejitev glede števila željenih DVD-jev se lahko torej spreminja od 14 do 84 DVD-jev, da bo prej izračunana sprememba vrednosti namenske funkcije, pri spremembi desne strani neenačbe še veljavna.

## 5.2 Dualni program problema mešanja

V primarnem programu problema mešanja smo iskali takšen izbor kuharskih in izobraževalnih kompletov, da je bila skupna nabavna cena najmanjša.

Lahko pa linearni program zastavimo tako, da je cilj kupiti takšno število knjig in DVD-jev, da bo število najbližje zahtevam. V tem primeru vrednost dualne spremenljivke predstavlja vrednost posameznih knjig in DVD-jev. Naj bo $u$ vrednost (v €) nakupa 1 knjige v kompletu in $v$ vrednost (v €) nakupa 1 DVD-ja.

| | Knjige [kos] | DVD-ji [kos] | Strošek [€] |
|---|---|---|---|
| Kuharski | 6 | 3 | 60 |
| Izobraževalni | 2 | 6 | 100 |
| Omejitve | 28 | 24 | |
| Vrednost virov | $u$ | $v$ | |

Ponovimo relacijo med primarnim linearnim programom problema mešanja in njegovim dualnim linearnim programom.

Osnovni linearni program v matrični obliki je zapisan kot:

$$\min z = C \cdot X$$
$$A \cdot X \geq B$$
$$X \geq 0$$

dualni program pa dobi obliko:

$$\max w = B^T \cdot Y$$
$$A^T \cdot Y \leq C^T$$
$$Y \geq 0$$

Vrednost nakupa kuharskih kompletov naj ne bo večja od omejitve 60, torej $6u + 3v \leq 60$. Podobno naj tudi pri nakupu izobraževalnih kompletov - vrednost ne bo večja od 100, torej $2u + 6v \leq 100$.

Dualni linearni program je torej:

$$\max w\,(u,v) \;=\; 28u \;+\; 24v$$

pri omejitvah:

$$6u \;+\; 3v \leq 60$$

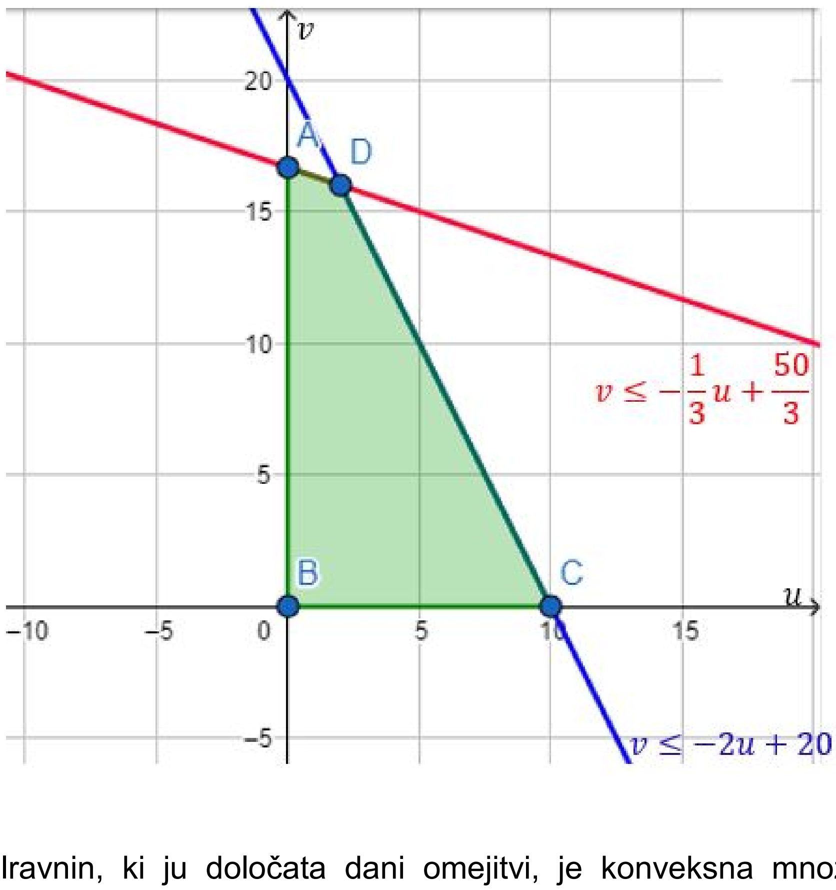
$$2u \;+\; 6v \;\leq\; 100$$

$$u,v \;\geq\; 0$$

### 5.2.1 Grafično reševanje dualnega problema

Ker tudi v dualnem problemu nastopata samo dve spremenljivki, lahko linearni program rešimo grafično. V koordinatni sistem narišemo premici, ki predstavljata omejitvi.

Slika 56: Grafično reševanje dualnega problema




Presek polravnin, ki ju določata dani omejitvi, je konveksna množica $ABCD$. Koordinate ekstremnih točk konveksne množice in vrednost namenske funkcije v vsaki izmed njih so naslednje:

$$A\left(0,\frac{1667}{100}\right) \Rightarrow \; w(A) = \; 400$$

$$B(0,0) \Rightarrow w(B) = 0$$
$$C(10,0) \Rightarrow w(C) = 280$$
$$D(2,16) \Rightarrow w(D) = 440$$

Iz zgornjih izračunov je razvidno, da doseže namenska funkcija dualnega linearnega programa maksimum v točki $B(2,16)$, kjer vrednost znaša 440. Optimalna rešitev dualnega programa je torej enaka optimalni rešitvi osnovnega linearnega programa.

Vrednosti neznank sta $u = 2$ in $v = 16$ in predstavljata senčni ceni knjig in DVD-jev iz primarnega problema.

## 5.3 Reševanje problema mešanja s programom LINGO

V tem poglavju bo prikazano, kako rešimo linearni program problema mešanja s pomočjo računalniškega programa LINGO in kako iz poročil razberemo rezultate. Za zgled bomo vzeli primer z nakupom knjig in DVD-jev, za katerega smo formulirali naslednji linearni program:

$$\min z(x,y) = 60x + 100y$$

pri omejitvah:
$$6x + 2y \geq 28$$
$$3x + 6y \geq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Linearni program zapišemo v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
min = 60*x + 100*y;
!Omejitve;
[Knjige] 6*x + 2*y >= 28;
[DVD] 3*x + 6*y >= 24;
```

Poročilo o rešitvi programa LINGO:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              440.0000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2
  Elapsed runtime seconds:                          0.03

  Model Class:                                        LP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                       X        4.000000            0.000000
                                       Y        2.000000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        440.0000           -1.000000
                                  KNJIGE        0.000000           -2.000000
                                     DVD        0.000000           -16.00000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** optimalna vrednost namenske funkcije v danem primeru je 440. To pomeni, da minimalni stroški, ki jih bo Bine imel pri nakupu, znašajo 440 €.

***Vrednost***: predstavlja vrednosti odločitvenih spremenljivk $x = 4$ in $y = 2$. To pomeni, da mora Bine kupiti 4 kuharske in 2 izobraževalna kompleta.

***Reducirani strošek:*** v predstavljenem primeru se obe spremenljivki pojavita v optimalni rešitvi, zato je reducirani strošek pri obeh spremenljivkah enak 0.

***Dopolnilna spremenljivka:*** v drugi in tretji vrstici konkretnega primera, ki predstavljata kupljene knjige ter DVD-je, je vrednost 0. To pomeni, da bo Bine kupil ravno toliko knjig in DVD-jev, kot jih potrebuje.

***Senčna cena (Dual price):*** v prvi vrstici senčne cene ni smiselno brati. Vrednost, ki se pojavlja je vedno $-1$, saj se vrstica nanaša na namensko funkcijo pri spremembi za 1 enoto.

V drugi vrstici je vrednost senčne cene $-2$. To pomeni, da bi se v primeru, če bi Bine želel kupiti eno knjigo manj (torej 27 knjig namesto 28), optimalna vrednost namenske funkcije zmanjšala za 2. Plačal bi torej 438 € (namesto 440 €). Preverimo, ali je to res.

V program LINGO vstavimo naslednjo sintakso:

```
!Namenska funkcija;
min = 60*x + 100*y;
!Omejitve;
[Knjige] 6*x + 2*y >= 27;
[DVD] 3*x + 6*y >= 24;
```

Rešitev pri preizkusu senčne cene knjig

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              438.0000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                        LP


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        3.800000            0.000000
                              Y        2.100000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        438.0000           -1.000000
                         KNJIGE        0.000000           -2.000000
                            DVD        0.000000           -16.00000
```

Optimalna vrednost namenske funkcije se je res zmanjšala za 2 (iz 440 € na 438 €).

V tretji vrstici osnovne rešitve problema mešanja (DVD) je senčna cena enaka $-16$. Če bi Bine želel kupiti 1 DVD manj (torej 23 DVD-jev namesto 24), bi se optimalna vrednost namenske funkcije zmanjšala za 16. Plačal bi torej 424 € (namesto 440 €). S programom LINGO preverimo še to senčno ceno.

Vstavimo naslednjo sintakso:

```
!Namenska funkcija;
min = 60*x + 100*y;
!Omejitve;
[Knjige] 6*x + 2*y >= 28;
[DVD] 3*x + 6*y >= 23;
```

Rešitev pri preizkusu senčne cene DVD-jev:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              424.0000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
Elapsed runtime seconds:                          0.03

Model Class:                                        LP


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                     X        4.066667            0.000000
                                     Y        1.800000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        424.0000           -1.000000
                                KNJIGE        0.000000           -2.000000
                                   DVD        0.000000           -16.00000
```

Optimalna vrednost namenske funkcije se je res zmanjšala za 16 (iz 440 € na 424 €).

### 5.3.1 Analiza občutljivosti, opravljena s pomočjo računalniškega programa LINGO

Poglejmo sedaj še poročilo, ki ga izdela LINGO, za analizo občutljivosti, ki smo jo prej naredili s pomočjo grafične metode. Tudi sedaj ločimo med analizo koeficientov namenske funkcije in analizo desnih strani neenakosti.

Analiza občutljivosti programa LINGO:

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                              Objective Coefficient Ranges:

                              Current        Allowable        Allowable
           Variable       Coefficient         Increase         Decrease
                  X          60.00000         240.0000         10.00000
                  Y          100.0000         20.00000         80.00000

                                 Righthand Side Ranges:

                              Current        Allowable        Allowable
                Row               RHS         Increase         Decrease
             KNJIGE          28.00000         20.00000         20.00000
                DVD          24.00000         60.00000         10.00000
```

***Obseg koeficientov namenske funkcije:*** koeficienti namenske funkcije se lahko spreminjajo znotraj območja optimalnosti. Koeficient odločitvene spremenljivke $x$ v namenski funkciji je enak 60, dovoljeno povečanje je za 240 enot in zmanjšanje za

10 enot. Cena kuharskega paketa se lahko spreminja med 50 in 300 €, da bo optimalna rešitev ostala enaka. Koeficient odločitvene spremenljivke $y$ ima dovoljeno povečanje za 20 enot in zmanjšanje za 80. Torej se lahko cena izobraževalnega paketa giba med 20 in 120 €, da bo optimalna rešitev ostala nespremenjena.

***Razpon desnih strani neenačb:*** pri številu knjig je dovoljeno povečanje za 20 enot. Dovoljeno zmanjšanje pa za 20 enot. Ker je osnovna količina knjig, ki naj jih Bine kupi 28, to pomeni, da se lahko število knjig spreminja na intervalu od 8 do 48 knjig. Na enak način pridobimo poročilo analize za drugo omejitev.

## 5.4 Reševanje problema mešanja s programom EXCEL

Najprej v prazen delovni list v vnesemo tabelo z vsemi podatki in vnesemo vse potrebne enačbe za izračun optimalne rešitve problema mešanja.

Pripravimo še celici, kamor bo Excel izpisal optimalno rešitev za spremenljivki $x$ in $y$. Ti dve celici pustimo prazni.

Pod vrednost omejitve v pripravljeni tabeli s podatki nastavimo definirane omejitve:

$$6x + \ 2y \geq 28$$

$$3x + \ 6 \geq 23$$

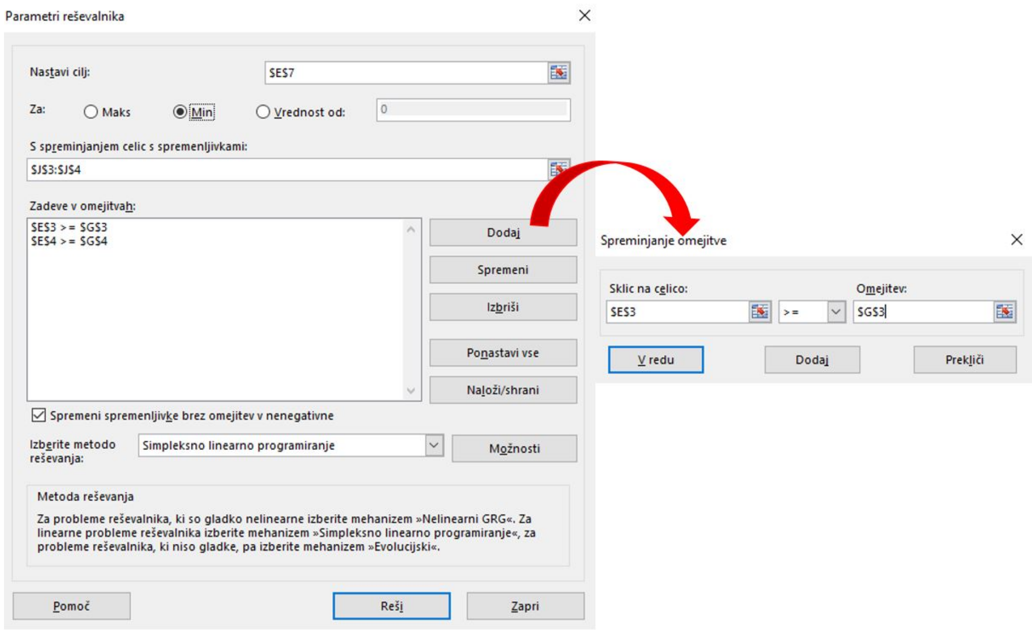
V ločeno prazno celico vpišemo enačbo za namensko funkcijo. Namenska funkcija linearnega programa je: $\min z(x, y) = 60x + 100y$.

Slika 57: Priprava za reševanje problema mešanja v Excelu

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Kuharski paket | Izobraževalni paket | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | |
| 3 | | Knjige | 6 | 2 | =C3*J3+D3*J4 | >= | 28 | | x | |
| 4 | | DVD-ji | 3 | 6 | =C4*J3+D4*J4 | >= | 24 | | y | |
| 5 | | Strošek | 60 | 100 | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Namenska funkcija | =C5*J3+D5*J4 | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |

V zavihku podatki poiščemo Reševalnik, ki odpre okno za vnos parametrov za rešitev problema:

Slika 58: Nastavitev parametrov za rešitev v Excelu



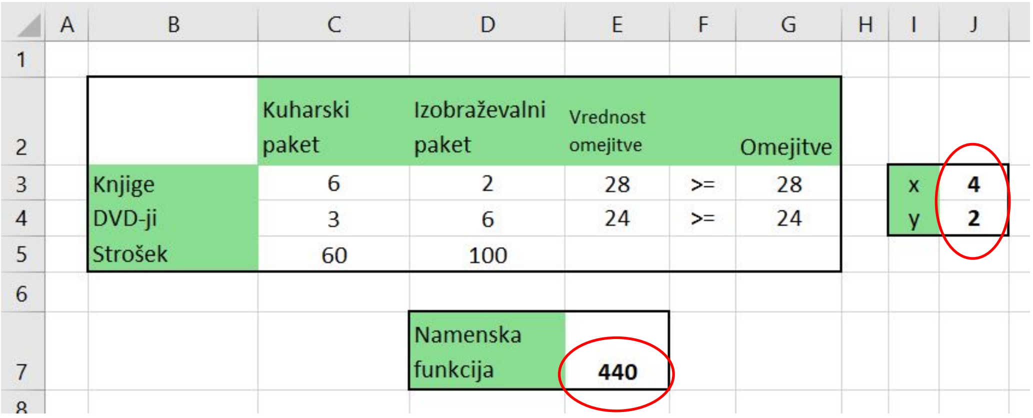

Pod parameter **Nastavi cilj** dodamo celico, pripravljeno za izpis vrednosti namenske funkcije.

Iščemo minimum namenske funkcije.
Pod parametrom **s spreminjanjem celic s spremenljivkami** dodamo celici, pripravljeni za izpis optimalne rešitve $x$ in $y$.

Vnesemo omejitve tako, da pod parameter **sklic na celico** označimo celico, kjer je definirana enačba za omejitev, nastavimo pravilni neenačaj in pod omejitev dodamo celico, kjer je vpisana vrednost omejitev.

Določiti je potrebno še, da program za metodo reševanja uporabi simpleksno linearno programiranje.

Slika 59: Rešitev problema mešanja v Excelu



| | Kuharski paket | Izobraževalni paket | Vrednost omejitve | | Omejitve | | x | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Knjige | 6 | 2 | 28 | >= | 28 | | y | 2 |
| DVD-ji | 3 | 6 | 24 | >= | 24 | | | |
| Strošek | 60 | 100 | | | | | | |
| | | Namenska funkcija | 440 | | | | | |

Program izpolni celici za optimalno rešitev – torej koliko kuharskih in koliko izobraževalnih kompletov naj Bine kupi, da bo imel najnižje stroške ob pogoju, da bo izpolnil svoje želje glede števila izdelkov. Prav tako program izračuna vrednost namenske funkcije, ki smo jo definirali prej. Bine naj kupi 4 kuharske komplete in 2 izobraževalna kompleta, da bo imel najnižje stroške (440 €).

Poročilo o odgovorih Excel:

Celica s cilji (Min)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $E$7 | Namenska funkcija Vrednost omejitve | 0 | 440 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $J$3 | x | 0 | 4 | Contin |
| $J$4 | y | 0 | 2 | Contin |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$3 | Knjige Vrednost omejitve | 28 | $E$3>=$G$3 | Vpenjanje | 0 |
| $E$4 | DVD-ji Vrednost omejitve | 24 | $E$4>=$G$4 | Vpenjanje | 0 |

Iste rezultate, kot jih program izpiše v pripravljen delovni list, izpiše tudi v Poročilu o odgovorih. V tabeli **Celica s cilji** izpiše vrednost namenske funkcije - 440.

V tabeli **Celice s spremenljivkami** izpiše končno vrednost spremenljivk oz. optimalno rešitev programa. Kupi naj torej 4 kuharske komplete (spremenljivka $x$) in 2 izobraževalna kompleta (spremenljivka $y$).

V tabeli **Omejitve** je definirana osnovna vrednost posameznih omejitev in koliko izdelkov je bilo kupljenih več, kot je bila osnovna omejitev. Ker z optimalno rešitvijo Bine dobi natančno toliko knjig in DVD-jev kot jih je potreboval, je vrednost presežka pri obeh omejitvah enaka 0.

Poročilo o občutljivosti Excel:

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$3 | x | 4 | 0 | 60 | 240 | 10 |
| $J$4 | y | 2 | 0 | 100 | 20 | 80 |

Omejitve

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Sencna Cena | Omejitev Stran R.H. | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$3 | Knjige Vrednost omejitve | 28 | 2 | 28 | 20 | 20 |
| $E$4 | DVD-ji Vrednost omejitve | 24 | 16 | 24 | 60 | 10 |

V tabeli **Celice s spremenljivkami** so definirane meje, v katerih se lahko giba cena posameznih paketov, da se optimalna rešitev ne bo spremenila. Vidimo, da se lahko strošek s kuharskim kompletom, ki ga predstavlja spremenljivka $x$ poveča za 240 in zmanjša za 10, to pomeni, da se strošek lahko giblje na intervalu od 50 do 300 €.

Strošek z izobraževalnim paketom, ki ga predstavlja spremenljivka $y$, se lahko poveča za 20 in zmanjša za 80, torej se lahko giblje na intervalu od 20 do 120 €.

Iz tabele **Omejitve** je razvidna vrednost, za katero se lahko spreminjajo desne strani neenačb, oz. za koliko lahko spreminjamo vrednosti željenih količin posameznih izdelkov, da bo optimalna rešitev ostala nespremenjena.

Število željenih knjig se lahko poveča za 20 in zmanjša za 20, število željenih DVD-jev pa se lahko poveča za 60 in zmanjša za 10.

Iz iste tabele lahko razberemo še senčni ceni omejitev. Torej, za koliko se bo spremenila vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenačb spremeni za 1 enoto. Če Bine svojo zahtevo po številu knjig spremeni za 1 (število željenih knjig se zmanjša za 1), se bo vrednost namenske funkcije zmanjšala za 2 €. V primeru, da spremeni svojo zahtevo po številu DVD-jev pa se vrednost namenske funkcije spremeni za 16 €.

## 5.5 Dodatni primeri

**Primer 34:**

ZABOJI IN PALETE

Iz kraja A do kraja B želimo prepeljati 55 zabojev in 71 palet. Na tovorni vagon lahko naložimo 9 zabojev in 5 palet, na tovornjak pa 4 zaboje in 8 palet. Najem vagona stane 100 €, najem tovornjaka pa 120 €.

- Zapišite namensko funkcijo in omejitve.
- Koliko vagonov in tovornjakov moramo najeti, da bo strošek transporta minimalen? Koliko znašajo minimalni stroški?
- Za koliko se spremenijo stroški, če omejitev zabojev ali palet spremenimo za 1 enoto?
- Za koliko se lahko posamezna omejitev spremeni, da bo veljala izračunana sprememba stroška iz prejšnjega primera?
- Za koliko se lahko spremeni cena za vagon ali tovornjak, da ostane izračunana optimalna rešitev enaka?

**Rešitev:**

| | Vagon | Tovornjak | Omejitev |
|---|---|---|---|
| Zaboj [kos] | 9 | 4 | 55 |
| Paleta [kos] | 5 | 8 | 71 |
| Cena [€] | 100 | 120 | |
| Število vozil | $x$ | $y$ | |

- **Linearni program**

Namenska funkcija predstavlja strošek transporta zabojev in palet, zato velja:

$$z(x, y) = 100x + 120y$$

Ker so cilj čim nižji stroški iščemo minimum namenske funkcije:

$$\min z(x, y) = 100x + 120y$$

Omejitve linearnega programa predstavljajo zahteve po številu prepeljanih zabojev in palet. Skupno je potrebno na vagonih in tovornjakih prepeljati 55 zabojev:

$$9x + 4y \geq 55$$

Prepeljati je potrebno tudi 71 palet, zato se omejitev za palete glasi:

$$5x + 8y \geq 71$$

Upoštevati je potrebno še nenegativnost spremenljivk:

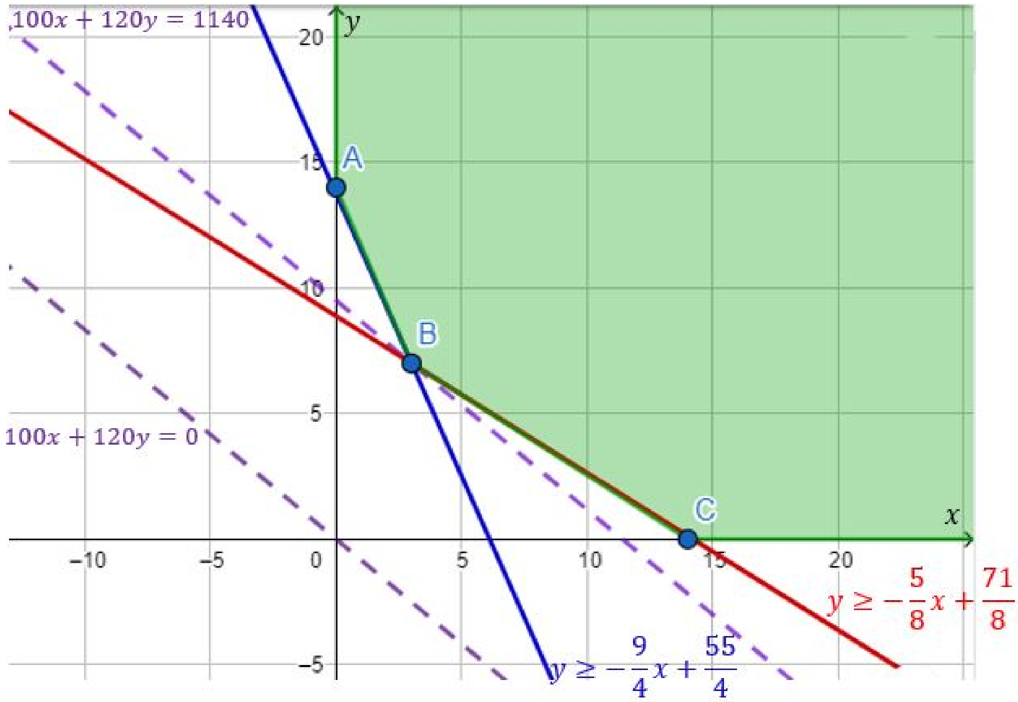
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Linearni program za dani primer:

$$\begin{aligned} & \min z(x, y) = 100x + 120y \\ \text{pri omejitvah:} \quad & 9x + 4y \geq 55 \\ & 5x + 8y \geq 71 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

V koordinatni sistem narišemo množico vseh rešitev sistema linearnih neenačb, ki ga sestavljajo omejitve v linearnem programu.

Slika 60: Grafična rešitev




Na sliki 60 je rešitev predstavljena s konveksno množico, ki je omejena navzdol. Točke $A$, $B$ in $C$ so ekstremne točke te množice. V koordinatni sistem je vrisan tudi graf namenske funkcije $100x + 120y = 0$. Ker iščemo minimum namenske funkcije, premico namenske funkcije premaknemo vzporedno čim nižje na grafu, vendar tako, da bo imela s konveksno množico vsaj eno skupno točko.

Optimalno rešitev predstavlja torej točka $B$. Točka $B$ je presečišče premic $9x + 4y = 55$ in $5x + 8y = 71$. Izračunamo koordinati točk in dobimo točko $B(3,7)$.

Zdaj lahko izračunamo vrednost namenske funkcije $z(x,y) = 100x + 120y$ v točki $B(3,7)$:

$$z(3,7) = 100 \cdot 3 + 120 \cdot 7 = 1140$$

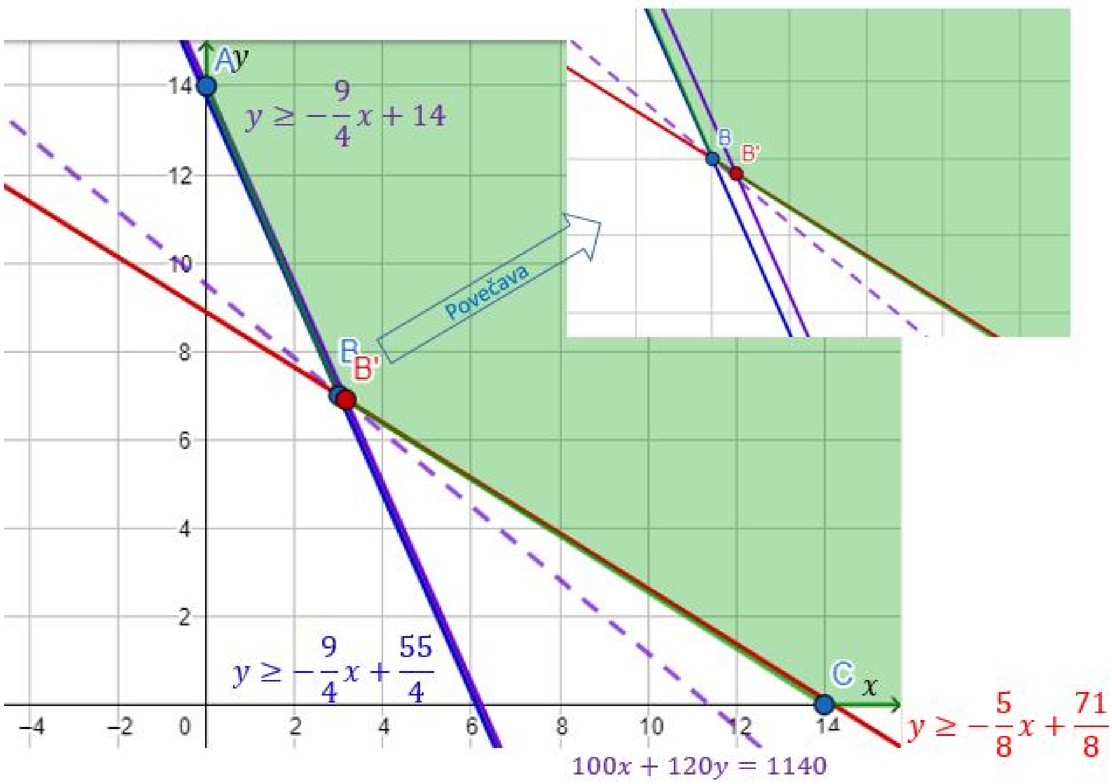
Glede na izračune lahko trdimo, da je vrednost minimalnih stroškov v višini 1.140 €, ob najetju 3 vagonov in 7 tovornjakov.

- **Sprememba stroškov pri spremembi omejitev in analiza koeficientov desnih strani omejitev**

Z analizo koeficientov desnih strani neenakosti v omejitvah izračunamo za koliko se spremeni vrednost namenske funkcije, če se desna stran neenakosti pri eni izmed omejitev spremeni za 1 enoto (ostali parametri pa ostanejo enaki).

Najprej analizirajmo omejitev $9x + 4y \geq 55$ (omejitev zabojev). Povečamo desno stran neenačbe za 1, da dobimo novo enačbo premice $9x + 4y \geq 56$ in izračunajmo novo vrednost namenske funkcije v novi rešitvi, ki jo predstavlja točka $B'$, prikazana na spodnji sliki.

Slika 61: Sprememba desne strani neenačb (omejitev števila zabojev)



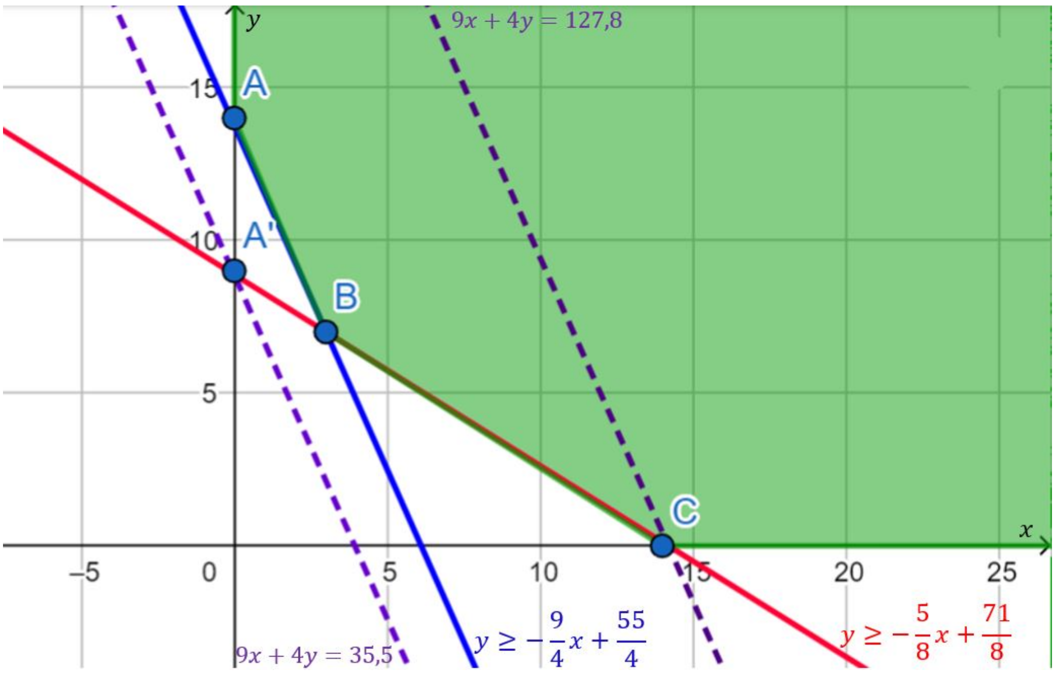

S pomočjo presečišča dveh premic izračunamo koordinate točke $B'(\frac{41}{13}, \frac{359}{52})$ in jih vstavimo v namensko funkcijo, da dobimo novo vrednost namenske funkcije

$$z(\frac{41}{13}, \frac{359}{52}) = 100 \cdot \frac{41}{13} + 120 \cdot \frac{359}{52} = 1143{,}85$$

Prvotna izračunana optimalna vrednost namenske funkcije (v točki $B$) je bila 1.140. Enostavno lahko izračunamo, da se pri spremembi desne strani omejitve zabojev za 1, vrednost namenske funkcije spremeni za 3,85 € (iz 1.140 na 1.143,85).

Odgovoriti moramo še na vprašanje za koliko dodanih ali odvzetih enot na desni strani neenačaja bo izračunana sprememba ostala veljavna. Iz spodnje slike je razvidno, da lahko prestavljamo premico, ki predstavlja omejitev $9x + 4y = 55$ proti desni le tako daleč, da poteka skozi točko $C$, proti levi pa tako daleč, da poteka skozi točko $A'$.

Slika 62: Analiza desnih strani neenakosti (število zabojev)

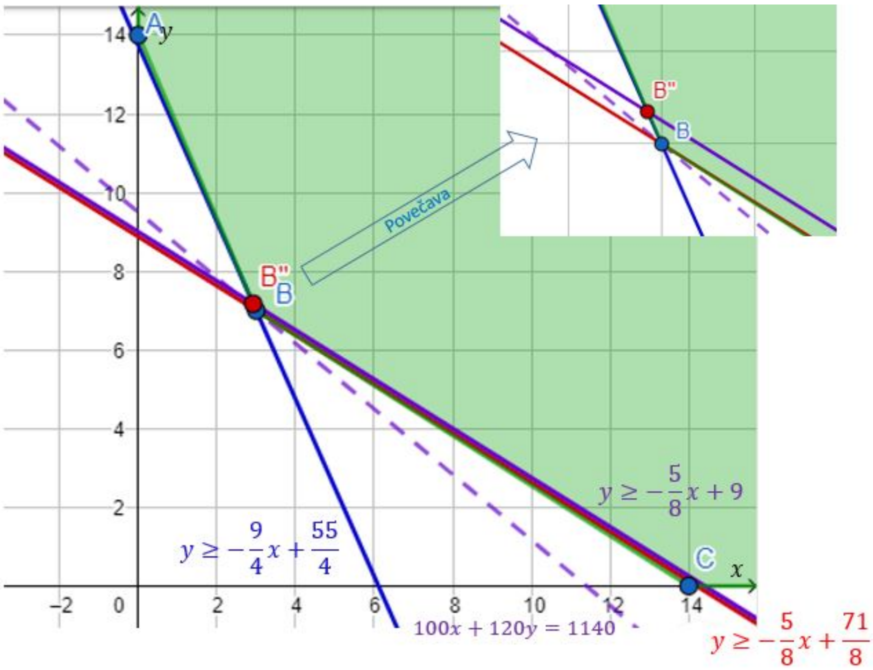



Iz te enačbe premice, ki poteka skozi točko $A''$ lahko razberemo, da bo izračunana sprememba ostala veljavna, če se bo desna stran neenačbe zmanjšala do vrednosti 35,5.

Iz enačbe premice, ki poteka skozi točko $C$ razberemo, da se lahko desna stran neenačbe poveča do vrednosti 127,8.

Preverimo spremembo namenske funkcije še pri omejitvi za palete. Povečamo desno stran neenačbe za 1, da dobimo novo neenačbo omejitve $5x + 8y \geq 72$, jo vrišemo v graf in izračunamo novo vrednost namenske funkcije v novi točki, ki jo predstavlja točka $B''$, prikazana na sliki 60.

Slika 63: Sprememba desne strani neenačbe (omejitev palet)



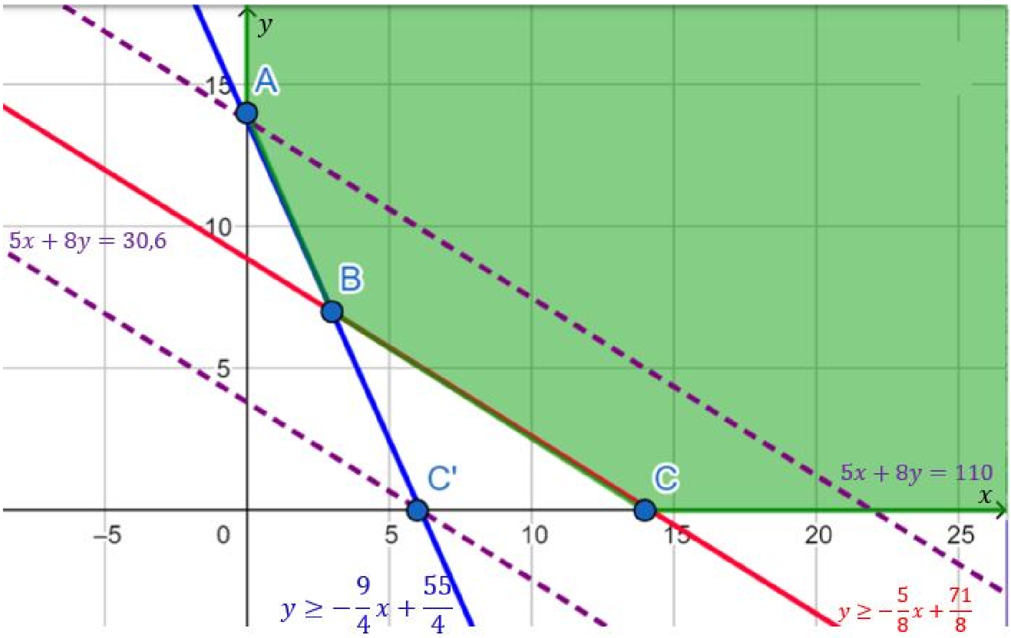

Točka $B''$ ima koordinati $B''(\frac{38}{13}, \frac{373}{52})$, vrednost namenske funkcije v njej pa je:

$$z(\frac{38}{13}, \frac{373}{52}) = 100 \cdot \frac{38}{13} + 120 \cdot \frac{373}{52} = 1153{,}08$$

V primeru spremembe desne strani neenačbe za 1 paleto, bo sprememba namenske funkcije 13,08 €.

Zanima nas tudi za koliko dodanih ali odvzetih enot na desni strani neenačaja bo izračunana sprememba ostala veljavna. Premico, ki predstavlja omejitev $5x + 8y = 71$ lahko prestavljamo navzgor le tako daleč, da poteka skozi točko $A$, navzdol pa tako daleč, da poteka skozi točko $C'$.

Slika 64: Sprememba omejitev



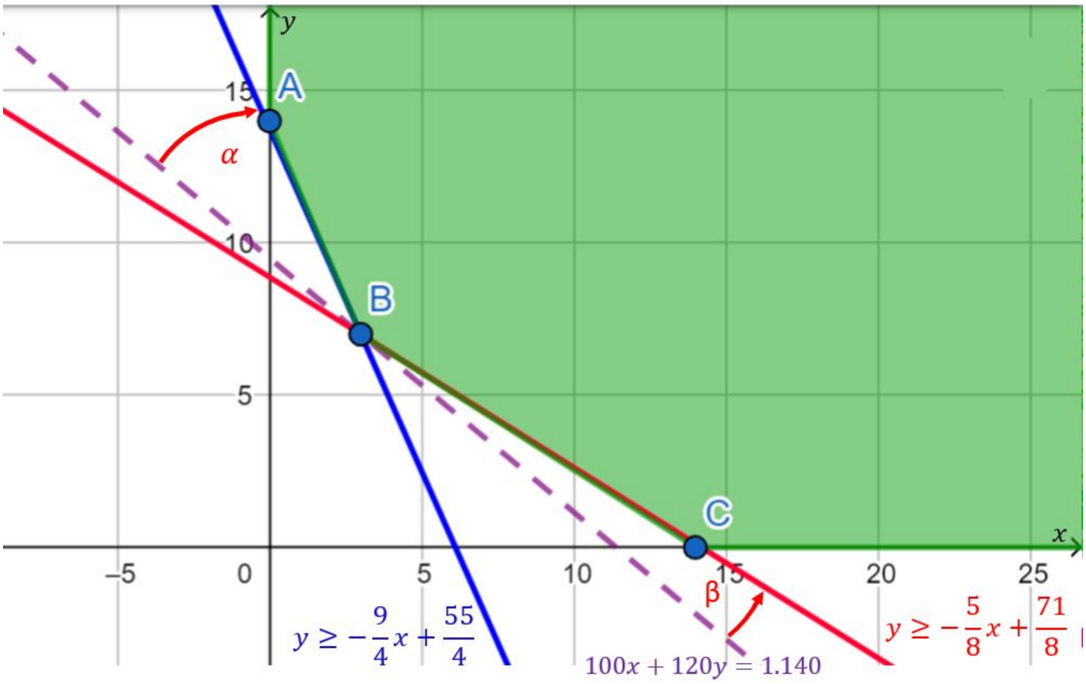

Iz enačbe premice, ki poteka skozi točko $A$, razberemo, da se desna stran neenačbe lahko poveča le do vrednosti 110.

Iz enačbe premice, ki poteka skozi točko $C'$ razberemo, da se lahko desna stran neenačbe zmanjša do vrednosti 30,6, da se bo pri spremembi desne strani za 1 enoto, vrednost namenske funkcije spremenila za 13,08 €.

- **Analiza koeficientov namenske funkcije**

Optimalna rešitev linearnega programa ostaja optimalna navkljub spremembi koeficientov tako dolgo, dokler se posamezni koeficient namenske funkcije nahaja v t. i. območju optimalnosti. Na sliki 65 je še enkrat predstavljena grafična rešitev danega problema mešanja. Če želimo analizirati spremembo koeficientov namenske funkcije, moramo zarotirati premico namenske funkcije, kot je predstavljeno na sliki.

Slika 65: Sprememba koeficientov namenske funkcije




Če se koeficienti v enačbi namenske funkcije $100x + 120y = 1.140$ spreminjajo, se bo spreminjal tudi naklon premice. Če premico, ki poteka skozi točko $B$ in predstavlja graf namenske funkcije, zavrtimo za kot $\alpha$, da postaja vedno bolj strma, v določenem trenutku premica namenske funkcije prekriva daljico omejeno s točkama $AB$. Točka $B$ tako ni več edina optimalna rešitev problema. V optimalno rešitev vstopa tudi točka $A$ in vse točke med njima. Z vsakim nadaljnjim zasukom premice postane točka $A$ edina optimalna rešitev danega linearnega programa.

S spreminjanjem naklona premice, ki predstavlja namensko funkcijo, smo dosegli spremembo optimalne rešitve danega linearnega programa. Poiskati moramo takšno vrednost najema vagonov in tovornjakov, da bo optimalna rešitev najema ostala enaka.

Osnovna enačba premice namenske funkcije je $100x + 120y = 1.140$. Potrebno je izračunati za koliko se lahko spremeni koeficient spremenljivke $x$, pri tem pa je potrebno ohraniti vrednost koeficienta spremenljivke $y$.

Poiskati moramo enačbo premice, ki poteka skozi točki $C(0,\frac{55}{4})$ in $B(3,7)$. Pomagamo si z eksplicitno obliko enačbe premice $y = kx + n$. Uporabimo enačbo za izračun koeficienta premice, ki poteka skozi dve točki:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{7 - \frac{55}{4}}{3 - 0} = \frac{-\frac{27}{4}}{3} = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

Iskana premica seka os $y$ v točki $C\left(0,\frac{55}{4}\right)$. Iz njenih koordinat lahko razberemo, da znaša začetna vrednost premice $n = 13{,}75$.

Enačba iskane premice je $y = -2{,}25x + 13{,}75$.

Preoblikujemo jo v implicitno obliko $2{,}25x + y = 13{,}75$ in pomnožimo s 120, da ostane koeficient spremenljivke $y$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen.

Dobimo enačbo $270x + 120y = 1.650$, iz katere razberemo novi (največji) koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji.

Če bo $k \leq 270$, bo točka B še vedno ostala ena izmed optimalnih rešitev linearnega programa.

Iz enačbe premice, ki poteka skozi točki $A$ in $B$ lahko razberemo tudi najmanjšo vrednost koeficienta spremenljivke $y$, da bo izračunana optimalna rešitev ostala enaka. Eksplicitno obliko enačbe premice, ki poteka skozi $A$ in $B$ $2{,}25x + y - 13{,}75 = 0$ pomnožimo s $\frac{100}{2{,}25}$, da ostane koeficient spremenljivke $x$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen.

Dobimo enačbo $100x + 44{,}4y = 611$, iz katere lahko razberemo novi (najmanjši) koeficient spremenljivke $y$ v namenski funkciji.

Če bo $k > 44{,}4$, bo točka $B$ ostala edina optimalna rešitev.

Poiskati moramo še največjo vrednost koeficienta spremenljivke $x$ in najmanjšo vrednost koeficienta spremenljivke $y$. Ti dve vrednosti se skrivata v enačbi premice, ki poteka skozi točki $C$ in $B$. Po enakem postopku kot prej izračunamo smerni koeficient in začetno vrednost enačbe te premice. Iskani vrednosti sta $k = -0{,}625$ in $n = 8{,}875$. Enačba iskane premice je tako $y = -0{,}625x + 8{,}875$, zapisana v implicitni obliki pa $0{,}625x + y - 8{,}875 = 0$.

Da izračunamo novi koeficient spremenljivke $x$, bomo dobljeno enačbo pomnožili s 120, da ostane koeficient spremenljivke $y$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen:

$$75x + 120y - 1.065 = 0$$

Iz enačbe lahko razberemo novi (najmanjši) koeficient spremenljivke $x$ v namenski funkciji.

Če bo $k > 75$, bo $B$ edina optimalna rešitev. Iz enačbe premice, ki poteka skozi točki $C$ in $B$ lahko razberemo tudi največjo vrednost koeficienta spremenljivke $y$, da bo optimalna rešitev ostala enaka. Implicitno obliko enačbe premice, ki poteka skozi $C$ in $B$ sedaj pomnožimo s 160, da ostane koeficient spremenljivke $x$ glede na prvotno enačbo namenske funkcije nespremenjen.

Dobimo enačbo $100x + 160y = 1.420$, iz katere lahko razberemo novi (največji) koeficient spremenljivke $y$ v namenski funkciji.

Če bo $k < 160$, bo $B$ ostala edina optimalna rešitev. Glede na zgornje izračune lahko zaključimo, da se lahko cena za transportni vagon giblje med 75 in 270 €, cena za tovornjak pa med 44,5 € in 160 €, da bo optimalna rešitev še vedno enaka, kar pomeni, da bodo minimalni stroški prevoza še vedno za najem 3 vagonov in 7 tovornjakov.

**Primer 35:**

PRIBOR ZA PIKNIK

Že spomladi želimo kupiti pribor za piknike za celotno poletje. Ocenjujemo, da bomo potrebovali vsaj 500 vilic in 500 krožnikov. Izbiramo med dvema kompletoma K1 in K2. V prvem kompletu K1 je 50 vilic in 80 krožnikov, v drugem kompletu K2 pa 100 vilic in 60 krožnikov. Cena prvega paketa K1 je 5 €, cena druga paketa K2 pa 4 €. Koliko posameznih kompletov moramo kupiti, da bo strošek minimalen? Bomo imeli pri optimalnem nakupu kaj vilic in krožnikov za rezervo? V katerih mejah se sme gibati cena posameznega kompleta, da bo optimalna rešitev ostala enaka?

**Rešitev:**

| | Komplet K1 | Komplet K2 | Omejitve |
|---|---|---|---|
| Vilice [kos] | 50 | 100 | 500 |
| Krožniki [kos] | 80 | 60 | 500 |
| Cena [€] | 5 | 4 | |
| Število kompletov | $x$ | $y$ | |

- **Linearni program**

Namenska funkcija $z$ predstavlja strošek pri nakupu kompletov za piknik, zato velja:

$$z(x,y) = 5x + 4y$$

Nakupna cena vilic in krožnikov naj bo najmanjša možna ob danih pogojih, zato namensko funkcijo minimiramo:

$$\min z(x,y) = 5x + 4y$$

Omejitve linearnega programa predstavljajo potrebo po minimalnem številu pribora, ki ga potrebujemo za piknik. Potrebujemo vsaj 500 vilic, zato je omejitev za vilice:

$$50x + 100y \geq 500$$

Prav tako potrebujemo vsaj 500 krožnikov, zato je omejitev za krožnike:

$$80x + 60y \geq 500$$

Upoštevati je treba še nenegativnost spremenljivk:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- **Reševanje s programom LINGO**

Problem bomo rešili s pomočjo programa LINGO. Najprej zapišemo linearni program v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
min = 5*x + 4*y;
!Omejitve;
[Vilice] 50*x + 100*y >= 500;
[Krozniki] 80*x + 60*y >= 500;
```

Poročilo o rešitvi:

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              32.00000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             3
  Elapsed runtime seconds:                          0.02

  Model Class:                                        LP


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        4.000000            0.000000
                              Y        3.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        32.00000           -1.000000
                         VILICE        0.000000          -0.4000E-02
                       KROZNIKI        0.000000          -0.60000E-01
```

Vidimo, da je optimalna rešitev nakup štirih kompletov K1 in treh kompletov K2, da bodo stroški nakupa minimalni. Stroški bodo pri optimalnem nakupu znašali 32 €. Pri optimalnem nakupu ne bo ostalo nič rezervnega pribora.

Poročilo o občutljivosti:

```
   Ranges in which the basis is unchanged:

                                        Objective Coefficient Ranges:

                                         Current        Allowable        Allowable
                          Variable     Coefficient       Increase         Decrease
                                 X        5.000000       0.3333333         3.000000
                                 Y        4.000000        6.000000        0.2500000

                                            Righthand Side Ranges:

                                         Current        Allowable        Allowable
                               Row           RHS         Increase         Decrease
                            VILICE       500.0000        333.3333         187.5000
                          KROZNIKI       500.0000        300.0000         200.0000
```

Strošek z enim kompletom K1 se sme gibati med 2 € in 5,33 €, strošek s kompletom K2 pa med 3,75 € in 10 €, da se optimalna rešitev problema ne bo spremenila.

**Primer 36:**

VITAMINI

Človek potrebuje dnevno 100 enot vitamina V1, 150 enot vitamina V2 in 220 enot vitamina V3, ki jih lahko zaužije s tremi različnimi vrstami hrane H1, H2 in H3. Tabela navaja količino vitaminov v posamezni hrani. Cena ene enote H1 je 20 €, cena enote H2 8 € in cena H3 15 €. Koliko enot posamezne hrane naj zaužije oseba, da bo dobila dovolj vitaminov in bo imela minimalne stroške z nakupom? Koliko znašajo ti stroški? Ali dobi v primeru optimalne rešitve katerega vitamina preveč? Za koliko bi se povečal strošek, če se potrebe človeka po vitaminu V1 povečajo za 2 enoti?

| | H1 | H2 | H3 |
|---|---|---|---|
| V1 | 2 | 1 | 2 |
| V2 | 5 | 3 | 1 |
| V3 | 8 | 4 | 2 |

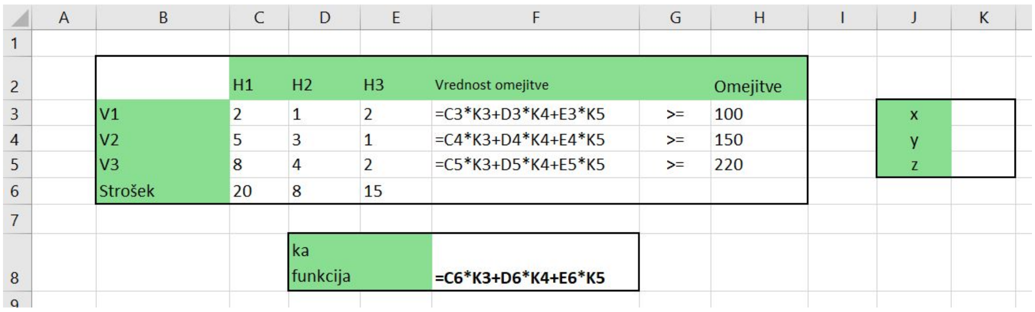
- **Reševanje s programom Excel**

| | H1 | H2 | H3 | Omejitev |
|---|---|---|---|---|
| V1 | 2 | 1 | 2 | 100 |
| V2 | 5 | 3 | 1 | 150 |
| V3 | 8 | 4 | 2 | 220 |
| Strošek [€] | 20 | 8 | 15 | |
| | $x$ | $y$ | $z$ | |

Tabelo prenesemo na prazen delovni list v Excelu. Nastavimo enačbo za namensko funkcijo:

$$z(x, y, z) = 20x + 8y + 15z$$

Slika 66: Priprava za reševanje v Excelu



| | | H1 | H2 | H3 | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | V1 | 2 | 1 | 2 | =C3*K3+D3*K4+E3*K5 | >= | 100 | | x | |
| 4 | V2 | 5 | 3 | 1 | =C4*K3+D4*K4+E4*K5 | >= | 150 | | y | |
| 5 | V3 | 8 | 4 | 2 | =C5*K3+D5*K4+E5*K5 | >= | 220 | | z | |
| 6 | Strošek | 20 | 8 | 15 | | | | | | |
| 8 | | | ka funkcija | | =C6*K3+D6*K4+E6*K5 | | | | | |

Omejitve linearnega programa predstavljajo omejitve vitaminov, ki jih mora človek dnevno zaužiti. Skupno potrebuje 100 enot vitamina V1, ki ga lahko pridobi s tremi vrstami hrane:

$$2x + y + 2z \geq 100$$

Tudi vitamin V2 lahko pridobi s tremi vrstami hrane, dnevno pa ga potrebuje vsaj 150 enot:

$$5x + 3y + z \geq 150$$

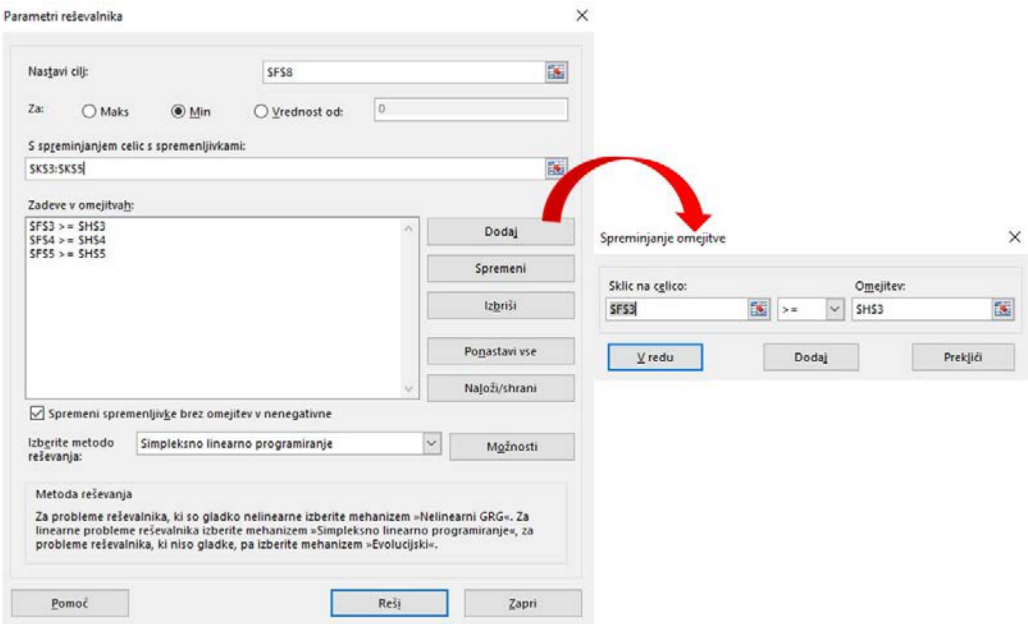
Vitamina V3 potrebuje vsaj 220 enot dnevno:

$$8x + 4y + 2z \geq 220$$

Omejitve vnesemo v tabelo pod vrednost omejitve in vnesemo formulo za namensko funkcijo ($20x + 8y + 15z$).

Ko so vnesene vse enačbe, vnesemo potrebne parametre v Reševalnik.

Slika 67: Reševalnik




Slika 68: Rešitev problema

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | H1 | H2 | H3 | Vrednost omejitve | | Omejitve | | | |
| 3 | | V1 | 2 | 1 | 2 | 100 | >= | 100 | | x | **0** |
| 4 | | V2 | 5 | 3 | 1 | 150 | >= | 150 | | y | **40** |
| 5 | | V3 | 8 | 4 | 2 | 220 | >= | 220 | | z | **30** |
| 6 | | Stro | 20 | 8 | 15 | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | Namenska funkcija | | **770** | | | | | |

Rezultat pokaže, da naj zaužije 40 enot hrane H2 in 30 enot hrane H3, da bo zadovoljil svoje potrebe po vitaminih. Njegovi stroški nakupa hrane bodo v tem primeru znašali 770 €.

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Min)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $F$8 | Namenska funkcija Vrednost omejitve | 0 | 770 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $K$3 | x | 0 | 0 | Contin |
| $K$4 | y | 0 | 40 | Contin |
| $K$5 | z | 0 | 30 | Contin |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$3 | V1 Vrednost omejitve | 100 | $F$3>=$H$3 | Vpenjanje | 0 |
| $F$4 | V2 Vrednost omejitve | 150 | $F$4>=$H$4 | Vpenjanje | 0 |
| $F$5 | V3 Vrednost omejitve | 220 | $F$5>=$H$5 | Vpenjanje | 0 |

Pri optimalnem nakupu hrane ne bo dobil nobenega vitamina preveč.

Poročilo o občutljivosti:

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$3 | x | 0 | 4 | 20 | 1E+30 | 4 |
| $K$4 | y | 40 | 0 | 8 | 2 | 0,5 |
| $K$5 | z | 30 | 0 | 15 | 1 | 11 |

Omejitve

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Senca Cena | Omejitev Stran R.H. | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$3 | V1 Vrednost omejitve | 100 | 7,333333333 | 100 | 0 | 45 |
| $F$4 | V2 Vrednost omejitve | 150 | 0 | 150 | 0 | 1E+30 |
| $F$5 | V3 Vrednost omejitve | 220 | 0,166666667 | 220 | 180 | 0 |

Če se potreba po vitaminu V1 poveča za 2 enoti, to pomeni, da se bo strošek povečal za 14,66 €. Pri spremembi za 1 enoto vitamina pa bi bila sprememba stroška 7,33 €.

**Primer 37:**

JABOLČNA IN HRUŠKOVA KAŠA

Iz jabolčne in hruškove kaše želimo mešati sok. Jabolčna kaša vsebuje 14 % sladkorja in stane 50 centov na liter, hruškova kaša pa vsebuje 6 % sladkorja in stane 60 centov na liter. Koliko jabolčne oz. hruškove kaše je potrebno zmešati, da bo strošek na liter soka najmanjši, če lahko sok vsebuje maksimalno 8 % sladkorja?

**Rešitev:**

Minimalni stroški (57,5 centa na liter) bodo pri mešanju soka, ki bo vseboval 25 % jabolčne in 75 % hruškove kaše.

**Primer 38:**

PROIZVODNJA BIOMASE

Podjetje, ki se ukvarja s proizvodnjo biomase, prideluje sekance iz bukovega, hrastovega in smrekovega lesa, od katerih vsebuje prvi 5 %, drugi 15 % in tretji 6 % vlage. S pridelavo 1 $m^3$ bukovih sekancev ima podjetje 15 € stroškov, s pridelavo hrastovih sekancev 13 € stroškov in pri pridelavi smrekovih sekancev 10 € stroškov. V kakšnem razmerju naj podjetje meša te tri vrste sekancev, da bodo stroški pridelave minimalni, če lahko mešanica vsebuje maksimalno 10 % vlage in maksimalno 30 % smrekovih sekancev? Kolikšen je minimalni strošek mešanice?

Kolikšna je vlažnost mešanice sekancev pri optimalni rešitvi? Za koliko se spremeni strošek na $m^3$ sekancev, če se vrednost maksimalne vlažnosti mešanice spremeni za 1 %?

Za največ koliko lahko povečamo oz. zmanjšamo vrednost maksimalne vlažnosti mešanice, da velja izračunana sprememba stroškov? Za koliko se lahko spremeni strošek posamezne vrste lesa, da se optimalna rešitev ne spremeni?

**Rešitev:**

Če zmešajo 23 % bukovih, 47 % hrastovih in 30 % smrekovih sekancev, bo strošek minimalen in sicer 12,56 € na $m^3$.

Vlažnost mešanice pri optimalni rešitvi je 10 %.

Če se vrednost maksimalne vlažnosti poveča/zmanjša za 1 %, se strošek $m^3$ mešanice sekancev zmanjša/poveča za 20 €.

Strošek na $m^3$ sekancev se spremeni za 20 € pri vlažnosti mešanice med 5,3 in 12,3 %.

Strošek bukovega lesa mora biti večji od 13 €, strošek hrastovega lesa mora biti manjši od 15 €, strošek smrekovega lesa pa mora biti manjši od 14,8 €.

**<u>Primer 39:</u>**

TRANSPORT PRTLJAGE

Transportna agencija mora iz stadiona prepeljati 5.400 ljudi, od katerih ima vsak drugi tudi prtljago. Najamejo lahko avtobuse ali kombije. Z enim avtobusom lahko za ceno 210 € prepeljejo 50 ljudi in 20 kosov prtljage, s kombijem pa za ceno 120 € 8 ljudi in 14 kosov prtljage. Koliko avtobusov in kombijev naj najame agencija, da bo strošek transporta minimalen? Kolikšen je strošek v tem primeru? Ali so vsi avtobusi in kombiji polno zasedeni? Za koliko se spremenijo skupni stroški prevoza, če se število ljudi ali število prtljage spremeni za 1? Za koliko lahko največ povečamo oz. zmanjšamo število ljudi ali število prtljage, da velja izračunana sprememba stroškov? Za koliko se lahko spremeni strošek posamezne vrste prevoza, da se optimalna rešitev ne spremeni?

**Rešitev:**

Agencija ima minimalne stroške v višini 27.000 €, če najame 100 avtobusov in 50 kombijev.

Pri optimalni rešitvi so vsi avtobusi in kombiji zasedeni.

Če se število ljudi spremeni za 1, se cena transporta spremeni za 1 €, če se spremeni količina prtljage za 1, se cena transporta spremeni za 8 €.

Število ljudi se lahko giblje med 1.543 in 6.750, število kosov prtljage pa med 2.160 in 9.450.

Cena za avtobus se lahko giblje med 171,43 € in 750 €, Cena za kombi pa med 33,60 € in 147 €.

# 6 CELOŠTEVILSKO PROGRAMIRANJE

Povzeto po Cornuéjols, Trick & Saltzman, 1995

Pri linearnem programu, ki ne vsebuje pogoja o celosti števil, se lahko pojavi problem, da lahko na primer pri reševanju problema števila skladišč na izbranih lokacijah kot rešitev pridobimo necelo število. Optimalna rešitev se lahko glasi, da naj na lokacijo A postavimo 1,2 skladišča, na lokacijo B 2,6 skladišča in na lokacijo C 5,15 skladišča. Na podlagi takšne rešitve bi se bilo zares težko odločiti, koliko skladišč postaviti na določeno lokacijo, saj lahko na lokaciji zgradimo le celo skladišče ali pa skladišča ne zgradimo.

S samo enim pogojem, ki ga dodamo v linearni program pa lahko dosežemo, da katerikoli program, ki ga uporabimo za izračun, poišče le celoštevilsko rešitev.

Glede na vrsto problema, ki ga rešujemo, iščemo minumum ali maksimum namenske funkcije:

$$\text{opt}\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

pri omejitvah

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesseqgtr b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Pogoj nenegativnosti $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$

Dodati pa je potrebno še pogoj, da morajo biti spremenljivke del množice celih števil. Množico celih števil označimo z $\mathbb{Z}$:

$$x_j \in \mathbb{Z} \;\; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Linearnemu programu, kjer morajo biti vse odločitvene spremenljivke del množice celih števil pravimo čisti celoštevilski linearni program.

Programom, kjer je le nekaj spremenljivk del množice celih števil pa mešani celoštevilski linearni program (v literaturi ga pogosto zasledimo pod kratico imena MILP[41]).

Primer čistega celoštevilskega linearnega programa (ILP)[42] je:

$$\min z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

pri omejitvah:

$$2x_1 + 1x_2 + 4x_3 \geq 15$$
$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 10$$
$$x_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, 3)$$

Z zadnjo omejitvijo je določeno, da morajo biti vse odločitvene spremenljivke iz množice celih števil.

Primer mešanega celoštevilskega linearnega programa pa je:

$$\max z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4$$

pri omejitvah:

$$5x_1 + 2x_3 \leq 20$$
$$2x_2 + 2x_4 \leq 30$$
$$x_j \geq 0 \ \ (i = 1, 2, 3,4)$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \ (i = 2, 4)$$

Z zadnjo omejitvijo je določeno, da morata biti odločitveni spremenljivki $x_2$ in $x_4$ iz množice celih števil, spremenljivki $x_1$in $x_3$ pa sta lahko iz množice realnih števil.

Poleg celoštevilskega linearnega programiranja poznamo še posebno skupino linearnega programiranja – z binarnimi odločitvenimi spremenljivkami (BIP)[43] (odločitvene spremenljivke zavzemajo samo dve vrednosti – 0 ali 1). V primeru takšnega linearnega programa dodamo dodatno omejitev v obliki:

$$x_j \in \{0,1\} \ \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

[41] Mixed Linear Integer Programming
[42] Integer Linear Programming
[43] Binary Integer Programming

Z omejitvijo določimo, da odločitvene spremenljivke zavzamejo le vrednost 1 ali 0.

V nadaljevanju bomo najprej predstavili primer grafičnega reševanja celoštevilskih linearnih problemov, nato pa predstavili nekaj konkretnih primerov celoštevilskega programiranja.

## 6.1 Grafično reševanje celoštevilskih linearnih programov

Grafično reševanje celoštevilskih linearnih programov je časovno potratno. Seveda pa, tako kot za ostale probleme, tudi za celoštevilske velja, da probleme s samo dvema spremenljivkama lahko rešujemo grafično.

V tem poglavju bomo predstavili postopek grafičnega reševanja primera celoštevilskega programiranja. Pri grafičnem reševanju celoštevilskih problemov se uporablja metoda razveji in omeji[44]. V splošnem metoda pri iskanju optimalne rešitve preveri vse možnosti. Prednost te metode pred drugimi metodami je v tem, da po delitvi problema na več vej, ne išče več možnih rešitev po tisti veji, za katero se izkaže, da ne obstaja rešitev, ki je boljša od že pridobljene. Vse rešitve, ki ustrezajo danim omejitvam se ohranijo in na koncu izmed vseh možnih rešitev izberemo najboljšo (Nocedal & Wright, 1999).

**<u>Primer 40:</u>** (primer povzet po Winston, 2004)
MIZAR

Mizar v svoji delavnici izdeluje mize in stole. Za izdelavo ene mize porabi 1 uro in 9 enot lesa. Za izdelavo stola potrebuje ravno tako 1 uro in 5 enot lesa. V enem dnevu ima na voljo 6 ur in 45 enot lesa. Eno mizo lahko proda za 80 €, stol pa za 50 €. Koliko miz in stolov naj podjetnik izdela, da bo ob upoštevanju vseh omejitev imel maksimalni dobiček?

[44] Branch and bound method

**Rešitev:**

Podatke uredimo v preglednico:

| | Miza | Stol | Omejitev |
|---|---|---|---|
| Delo [h] | 1 | 1 | 6 |
| Les [enot] | 9 | 5 | 45 |
| Cena (€) | 80 | 50 | |
| Število kosov | $x$ | $y$ | |

Z linearnim programom želimo pridobiti celoštevilsko rešitev. Iščemo maksimum namenske funkcije, ki predstavlja vsoto zaslužka z izdelavo $x$ miz in $y$ stolov:

$$\max z(x,y) = 80x + 50y$$

Pri svojem delu je omejen s količino časa in materiala, ki ga ima na voljo:

$$1x + 1y \leq 6$$

$$9x + 5y \leq 45$$

Za rešitev pa želimo dobiti celoštevilske rešitve, saj lahko izdela le celoten kos pohištva naenkrat:

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

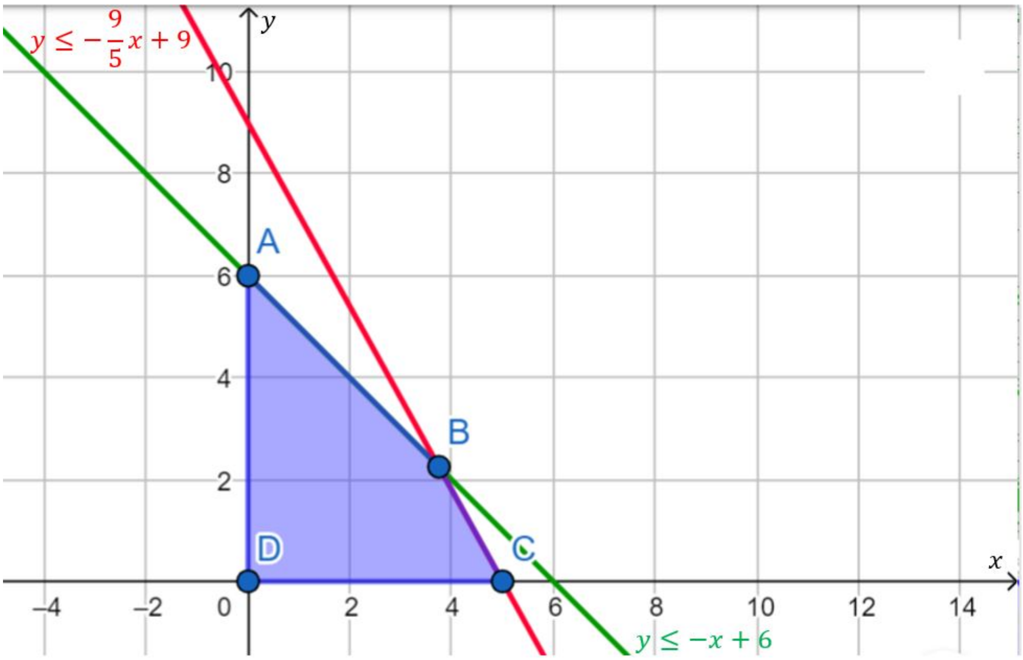
$$x, y \geq 0$$

V prvem koraku grafično rešimo osnovni linearni program, ki ga kasneje postopoma delimo do celoštevilske rešitve:

$$\begin{aligned} & \max z(x,y) = 80x + 50y \\ \text{pri omejitvah:}\quad & 1x + 1y \leq 6 \\ & 9x + 5y \leq 45 \\ & x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Neenačbe narišemo v koordinatni sistem (slika 69) in določimo maksimum namenske funkcije.

Slika 69: Grafično reševanje celoštevilskega linearnega problema




Določimo koordinate oglišč konveksnega lika $ABCD$ na grafu (koordinate točk $A, C$ in $D$ lahko razberemo z grafa,  za točko $B$ pa izračunamo presečišče obeh premic):

$$A(0,6)$$

$$B\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$C(5,0)$$

$$D(0,0)$$

V tabeli so predstavljene vrednosti namenske funkcije za vsako izmed ekstremnih točk:

| Točka | Vrednost namenske funkcije | |
|---|---|---|
| $A(0,6)$ | $\mathrm{z(A)} = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 6 = 300$ | |
| $B\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right)$ | $\mathrm{z(B)} = 80 \cdot \frac{15}{4} + 50 \cdot \frac{9}{4} = 412{,}5$ | $maksimum$ |
| $C(5,0)$ | $\mathrm{z(C)} = 80 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 400$ | |
| $D(0,0)$ | $\mathrm{z(D)} = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$ | |

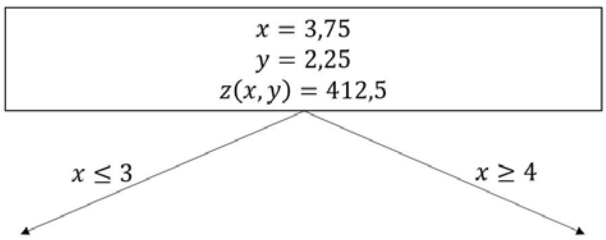
Maksimalno vrednost namenska funkcija doseže v točki $B\left(\frac{15}{4},\frac{9}{4}\right)$, kjer znaša njena vrednost 412,5. Mizar naj bi torej izdelal 3,75 mize in 2,25 stola, da bi dosegel maksimalni zaslužek s svojim delom, pri tem pa bi zaslužil 412,5 €.

Po definiciji lahko mizar izdela izdelke le v celoti, kar je v linearnem programu definirano z dodatnim pogojem, da morata biti vrednosti odločitvenih spremenljivk celoštevilski vrednosti. Rešitev $B\left(\frac{15}{4},\frac{9}{4}\right)$ torej ne ustreza vsem pogojem linearnega programa.

V trenutni rešitvi nobena izmed vrednosti odločitvenih spremenljivk ni iz množice celih števil. Izhajamo iz trenutne rešitve in začnemo s postopkom razvejanja. Kot prvo spremenljivko, po kateri delimo problem, izberemo spremenljivko z večjo decimalno vrednostjo. V danem primeru je to spremenljivka $x$, ki ima vrednost $3{,}75$.

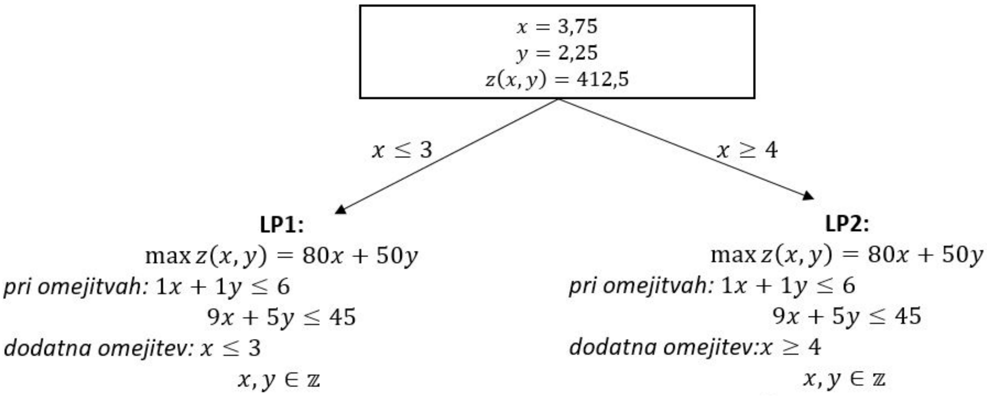
Spremenljivka $x$ ne more zavzeti vrednosti med 3 in 4, lahko pa zavzame vrednost, ki je manjša ali enaka 3 ali pa vrednost, ki je večja ali enaka 4.

Slika 70: Prva delitev po metodi Razveji in omeji (1. del)




Na ta način dobimo dva nova linearna programa, ki poleg osnovnega vsebujeta vsak po eno dodatno omejitev (slika 71).

Slika 71: Nova linearna programa za dani problem




Grafično rešimo linearni problem (LP1) z dodatno omejitvijo $x \leq 3$ (slika 72):

$$\max z(x,y) = 80x + 50y$$

pri omejitvah: $1x + 1y \leq 6$

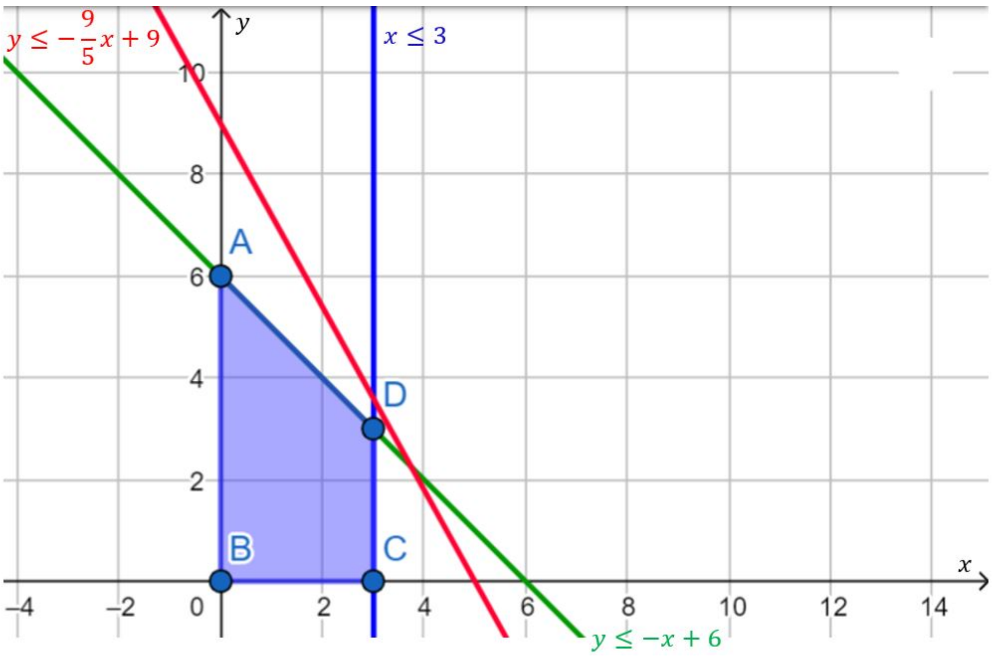
$9x + 5y \leq 45$

dodatna omejitev: $x \leq 3$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$x, y \geq 0$

Slika 72: Grafična rešitev LP1



Po dodani novi omejitvi, se konveksni lik, ki predstavlja območje dopustnih rešitev nekoliko zmanjša. Koordinate ekstremnih točk so naslednje:

$$A(0,6)$$
$$B(0,0)$$
$$C(3,0)$$
$$D(3,3)$$

V tabeli so predstavljene vrednosti namenske funkcije za vsako izmed ekstremnih točk:

| Točka | Vrednost namenske funkcije | |
|---|---|---|
| $A(0,6)$ | $\mathrm{z(A)} = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 6 = 300$ | |
| $B(0,0)$ | $\mathrm{z(B)} = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$ | |
| $C(3,0)$ | $\mathrm{z(C)} = 80 \cdot 3 + 50 \cdot 0 = 240$ | |
| $D(3,3)$ | $\mathrm{z(D)} = 80 \cdot 3 + 50 \cdot 3 = 390$ | $maksimum$ |

Namenska funkcija doseže maksimum v točki $D(3,3)$. Obe koordinati točke sta iz množice celih števil in ustrezata vsem pogojem linearnega programa. Te veje linearnega programa, zaradi dobljene rešitve iz množice celih števil, ne delimo več dalje. Rezultat je, zaradi ustrezanja vsem podanim omejitvam možen, zato ga ohranimo.

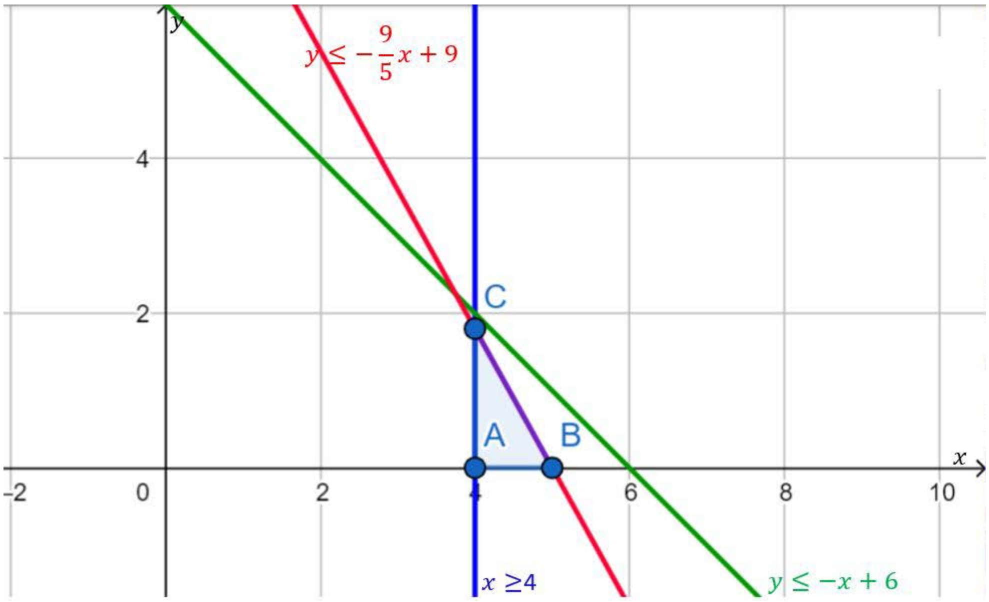
Poiščemo rešitev druge veje, linearni sistem z dodatno omejitvijo $x \geq 4$.

Linearni program druge cepitve:

| | |
|---|---|
| | $\max z(x,y) = 80x + 50y$ |
| pri omejitvah: | $1x + 1y \leq 6$ |
| | $9x + 5y \leq 45$ |
| dodatna omejitev: | $x \geq 4$ |
| | $x, y \in \mathbb{Z}$ |
| | $x, y \geq 0$ |

Grafična rešitev linearnega programa z dodatno omejitvijo je predstavljena na sliki 73.

Slika 73: Grafična rešitev LP2




Območje dopustnih rešitev znotraj konveksnega lika $ABC$ se je še nekoliko zmanjšalo. Koordinate ekstremnih točk so naslednje:

$$A(4, 0)$$

$$B(5, 0)$$

$$C\left(4, \frac{9}{5}\right)$$

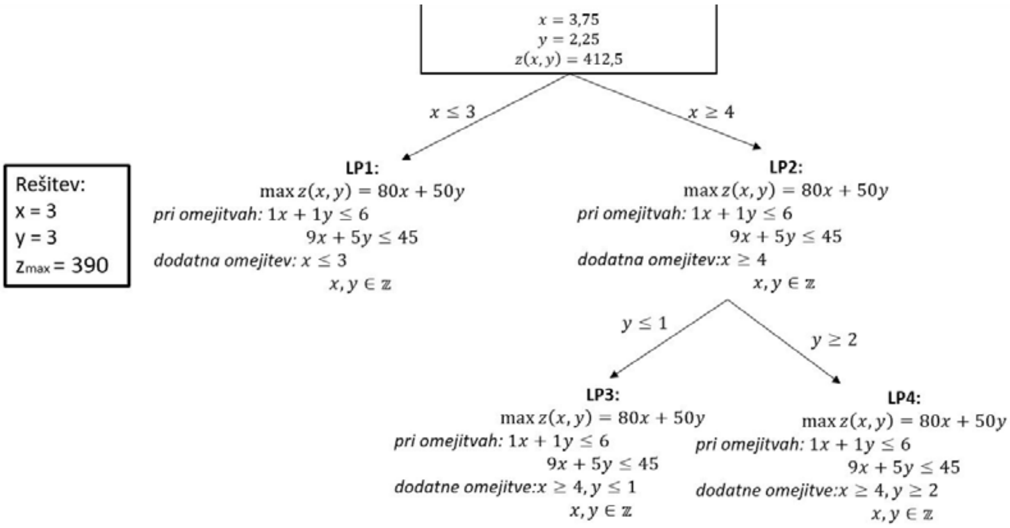
V tabeli so predstavljene vrednosti namenske funkcije za vsako izmed ekstremnih točk:

| Točka | Vrednost namenske funkcije | |
|---|---|---|
| $A(4,0)$ | $z(A) = 80 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 320$ | |
| $B(5,0)$ | $z(B) = 80 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 400$ | |
| $C\left(4, \frac{9}{5}\right)$ | $z(C) = 80 \cdot 4 + 50 \cdot \frac{9}{5} = 410$ | $maksimum$ |

Namenska funkcija tokrat doseže maksimum v točki $C\left(4, \frac{9}{5}\right)$. Cilj linearnega programa je najti takšno kombinacijo izdelkov, da bodo prinesli največji dobiček. Vrednosti odločitvenih spremenljivk niso cela števila, zato je potrebno z razvejanjem nadaljevati. Delitev dalje pa opravimo na spremenljivki $y$.

Spremenljivka $y$ v LP2 zasede vrednost $y = 1{,}8$. Spremenljivka $y$ torej ne more zasesti vrednosti med 1 in 2, lahko pa zasede vrednosti manjše od 1, ali pa večje od 2 (slika 74).

Slika 74: Druga cepitev linearnega programa




LP 4 nima dopustne rešitve, saj $y = 2$ ni več del dopustnih rešitev (slika 73, kjer se vidi, da je najvišja točka $C(4, 1.8)$ nižja od $y = 2$).

Grafično rešimo le LP3 z dodatno omejitvijo $y \leq 1$ (slika 75):

$$\max z(x,y) = 80x + 50y$$

pri omejitvah: $1x + 1y \leq 6$

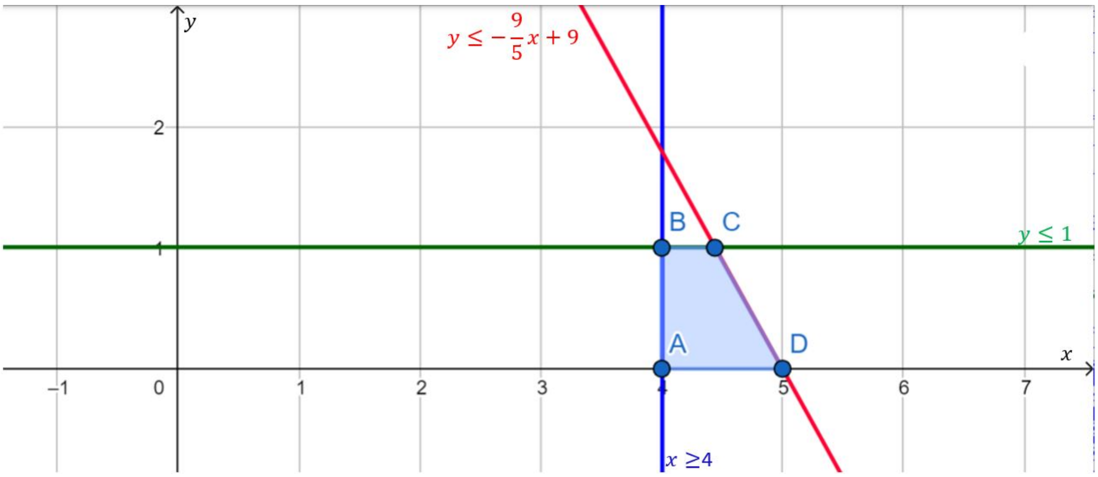
$$9x + 5y \leq 45$$

dodatna omejitev: $x \geq 4, y \leq 1$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x, y \geq 0$$

Slika 75: Grafična rešitev LP3




Na grafu enačba $1x + 1y \leq 6$ ni več prikazana, saj je že na sliki 73 vidno, da ne vpliva več na končno rešitev (je izven območja dopustnih rešitev). Po dodani novi omejitvi glede spremenljivke $y$, se množica dopustnih rešitev še zmanjša. Koordinate ekstremnih točk so sedaj naslednje:

$$A(4,0)$$

$$B(4,1)$$

$$C\left(\frac{111}{25},1\right)$$

$$D(5,0)$$

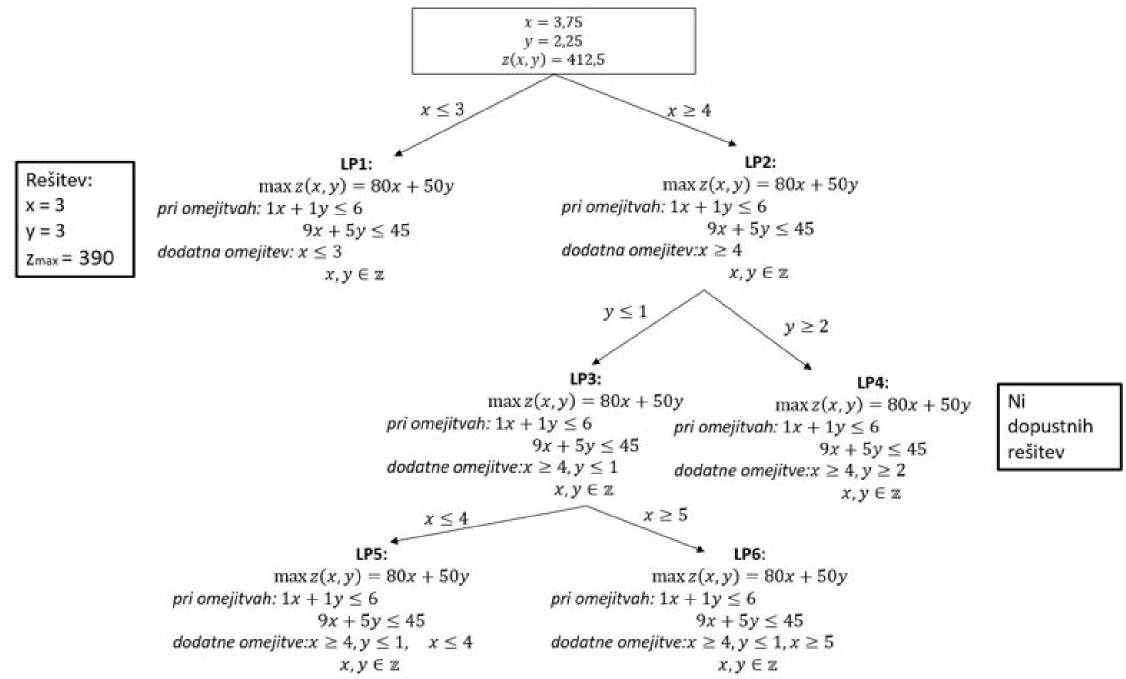
V tabeli so predstavljene vrednosti namenske funkcije za vsako izmed ekstremnih točk:

| Točka | Vrednost namenske funkcije | |
|---|---|---|
| $A(4,0)$ | $\mathrm{z(A)} = 80 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 320$ | |
| $B(4,1)$ | $\mathrm{z(B)} = 80 \cdot 4 + 50 \cdot 1 = 370$ | |
| $C\left(\frac{111}{25},1\right)$ | $\mathrm{z(C)} = 80 \cdot \frac{111}{25} + 50 \cdot 1 = 405{,}2$ | $maksimum$ |
| $D(5,0)$ | $\mathrm{z(D)} = 80 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 400$ | |

Namenska funkcija doseže maksimum v točki $C\left(\frac{111}{25},1\right)$. Vrednost namenske funkcije v točki $C\left(\frac{111}{25},1\right)$ je boljša kot rešitev LP1, saj se bolj približa rešitvi osnovnega programa. Ker vrednosti spremenljivk niso cela števila, delimo linearni program po veji LP3 – delimo spremenljivko $x$.

Rešitev je $x = 4{,}44$, torej spremenljivka $x$ ne more zavzeti vrednosti med 4 in 5. Lahko pa zavzame vrednosti manjše od 4 ali večje od 5 (slika 76).

Slika 76: Tretja cepitev linearnega programa




Grafično rešimo LP5 (slika 77):

$$\max z(x, y) = 80x + 50y$$

pri omejitvah: $1x + 1y \leq 6$

$9x + 5y \leq 45$

dodatne omejitve: $x \geq 4$

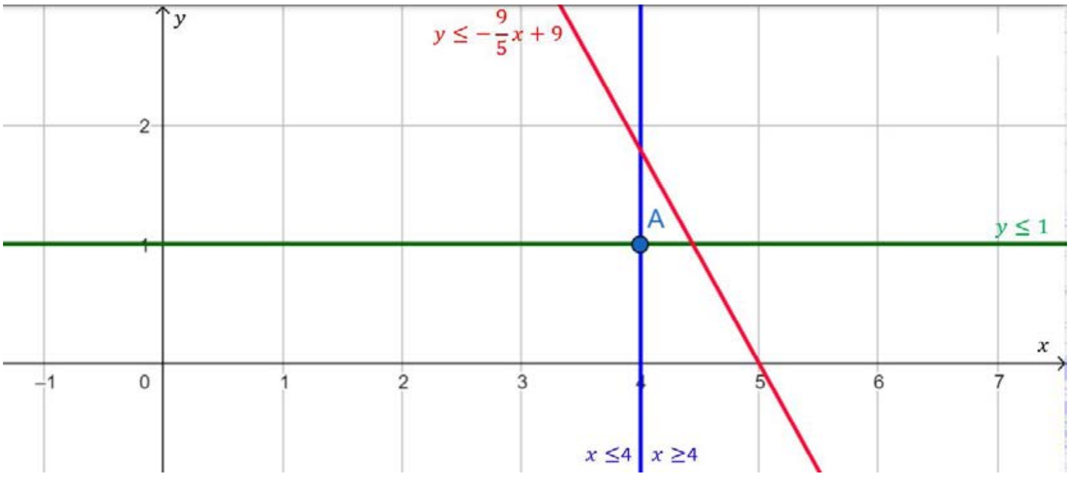
$y \leq 1$

$x \leq 4$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$x, y \geq 0$

Slika 77: Grafična rešitev LP5




Edina možna rešitev v tem primeru se nahaja na presečišču premic $x = 4$ in $y = 1$. Rešitev je torej dopustna, saj zadostuje pogoju celih števil. Rešitev ohranimo za kasnejšo primerjavo.

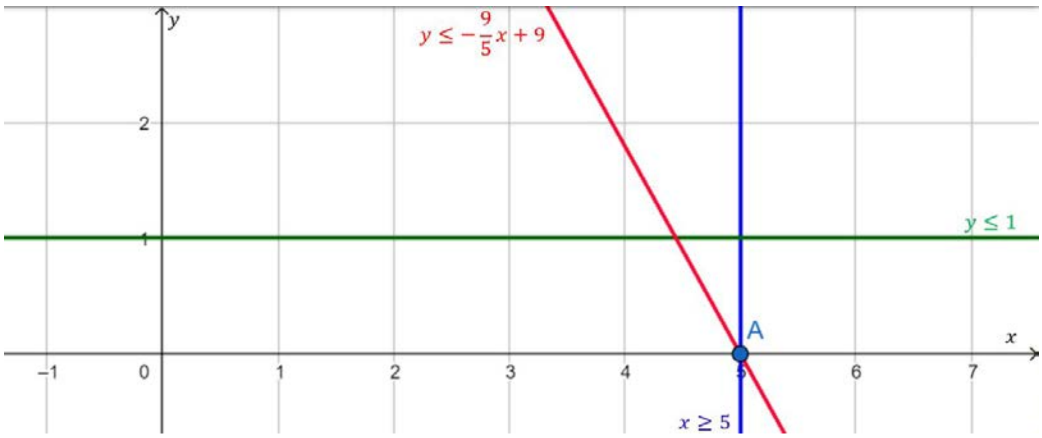
Grafično rešimo še LP6 (slika 78):

$$\max z(x, y) = 80x + 50y$$

pri omejitvah:
$$1x + 1y \leq 6$$
$$9x + 5y \leq 45$$

dodatne omejitve:
$$x \geq 4$$
$$y \leq 1$$
$$x \geq 5$$
$$x, y \in \mathbb{Z}$$
$$x, y \geq 0$$

Slika 78: Grafična rešitev LP6




Edina možna rešitev, ki zadošča vsem postavljenim pogojem je točka $A(5,0)$, kjer namenska funkcija doseže vrednost 400.

Postopek delitve linearnega programa po spremenljivkah izvajamo tako dolgo, da pri vseh vejah pridemo do celoštevilskih rešitev. V danem primeru smo to dosegli in dobili tri rešitve, ki ustrezajo pogoju, da spremenljivke sodijo v množico celih števil. V preglednici so zbrane vse možne tri rešitve.

| | Vrednosti spremenljivk | Vrednost namenske funkcije |
|---|---|---|
| LP1 | $x = 3, y = 3$ | 390 |
| LP5 | $x = 4, y = 1$ | 370 |
| LP6 | $x = 5, y = 0$ | 400 |

Za optimalno izberemo rešitev, pri kateri je vrednost namenske funkcije največja, v primeru, da iščemo maksimum funkcije ali pa tisto rešitev, pri kateri je vrednost namenske funkcije najmanjša v primeru iskanja minimuma funkcije.

V danem primeru bo mizar dosegel največjo vrednost svojih izdelkov, če bo izdelal 5 miz in 0 stolov. Pri tem bo njegov dobiček 400 €.

## 6.2 Investicijski problem

V tem poglavju bomo pokazali, da je linearno programiranje koristno tudi, ko govorimo o finančnih zadevah. Predstavili bomo primere kjer iščemo v katere izmed priložnosti investicij naj posameznik ali podjetje vloži svoj denar, da bo, ob danih omejitvah, vrednost njegove investicije največja. Tak problem imenujemo investicijski problem[45]. Investicijski problem je tipični primer celoštevilskega linearnega programiranja z binarnimi odločitvenimi spremenljivkami.

**Primer 41:** (Primer povzet po Cornuéjols, Trick & Saltzman, 1995)

Podjetje Investicija, d.o.o., želi investirati 140.000 € v izgradnjo novih stanovanj. Njihov finančni oddelek je odkril 4 priložnosti v njihovi bližnji okolici. Za hišo številka 1 bi morali plačati 50.000 €, kasneje pa bi jo lahko prodali za 80.000 €. Za hišo številka 2 bi odšteli 70.000 €, prodali pa bi jo lahko za 110.000 €. Hišo številka 3 bi z malimi popravki lahko prodali za 60.000 €, zanjo pa bi morali plačati 40.000 €, hišo številka 4 pa bi prodali za 40.000 €, zanjo pa bi plačali 30.000 €. V katere investicije naj podjetje investira, da bo doseglo maksimalni finančni dobiček ob prodaji?

Uredimo dane podatke v preglednico:

| | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 |
|---|---|---|---|---|
| Cena [€] | 50.000 | 70.000 | 40.000 | 30.000 |
| Dobiček ob prodaji [€] | 80.000 | 110.000 | 60.000 | 40.000 |
| Kapital na voljo [€] | 140.000 | | | |

***Določitev odločitvenih spremenljivk***

Določiti je potrebno katere hiše $j$ naj podjetje Investicija d.o.o. kupi:

$$x_j = \begin{cases} 1; \textit{hišo kupijo} \\ 0; \textit{hiše ne kupijo} \end{cases}; \quad j = (1,2,3,4)$$

[45] Investment Problem

### *Določitev namenske funkcije*

Namenska funkcija v predstavljenem primeru predstavlja skupno finančno vrednost investicij ob prodaji:

- finančna vrednost ob prodaji hiše 1 je $80.000x_1$
- finančna vrednost ob prodaji hiše 2 je $110.000x_2$
- finančna vrednost ob prodaji hiše 3 je $60.000x_3$
- finančna vrednost ob prodaji hiše 4 je $40.000x_4$

Finančna vrednost ob prodaji vseh štirih hiš je:

$$80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

Iščemo maksimalno finačno vrednost investicije torej je potrebno poiskati maksimum namenske funkcije:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

### *Določitev omejitev*

Pri investiciji za nakup hiš so investitorji v večini primerov omejeni. Investirajo lahko samo tolikšen znesek, kot ga imajo na voljo. Vsota vseh nakupov mora biti torej manjša ali enaka vsoti, namenjeni za investicije:

- cena nakupa hiše 1 je $50.000x_1$
- cena nakupa hiše 2 je $70.000x_2$
- cena nakupa hiše 3 je $40.000x_3$
- cena nakupa hiše 4 je $30.000x_4$

Vsota nakupa vseh štirih hiš je $50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4$.

Podjetje ima na voljo 140.000 €, ki jih pri nakupu ne sme preseči, zato končno omejitev zapišemo kot:

$$50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$$

Preden zaključimo linearni program je potrebno zapisati še pogoj o binarnosti odločitvenih spremenljivk:

$$x_j = \{0,1\};\ \ j = (1, 2, 3, 4)$$

Linearni program danega investicijskega problema je:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

pri omejitvah: $50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$

$$x_j = \{0,1\}; \;\; j = (1, 2, 3, 4)$$

Ker ima predstavljeni primer štiri odločitvene spremenljivke in ga ne moremo rešiti grafično, si poglejmo kako takšne primere rešimo v programih kot sta LINGO in Microsoft Excel.

### 6.2.1 Reševanje investicijskega problema s pomočjo programa LINGO

Linearni program zapišemo v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
max = 80000*x1 + 110000*x2 + 60000*x3 + 40000*x4;
!Omejitve;
[Kapital] 50000*x1 + 70000*x2 + 40000*x3 + 30000*x4 <=
140000;
!Pogoji binarnosti;
@BIN(x1);
@BIN(x2);
@BIN(x3);
@BIN(x4);
```

Dodatno določimo, da so odločitvene spremenljivke binarne oblike. To storimo z ukazom @BIN(). V oklepaj vpišemo vse spremenljivke, ki so vključene v linearni program.

Rešitev investicijskega problema:

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              210000.0
 Objective bound:                              210000.0
 Infeasibilities:                              0.000000
 Elapsed runtime seconds:                          0.05

 Model Class:                                      PILP


                         Variable           Value        Reduced Cost
                               X1        0.000000           -80000.00
                               X2        1.000000           -110000.0
                               X3        1.000000           -60000.00
                               X4        1.000000           -40000.00

                              Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                1        210000.0            1.000000
                          KAPITAL        0.000000            0.000000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** v predstavljenem primeru je vrednost namenske funkcije 210.000 €. Končni finančni dobiček investicije podjetja pri nakupu hiš bo ob prodaji tako 210.000 €.

***Vrednost***: v danem primeru vrednost predstavlja optimalno odločitev, v katere hiše se podjetju izplača investirati. Kjer je vrednost enaka nič pomeni, da hiše ni vredno kupiti, kjer pa je ob spremenljivki vrednost 1 pomeni, da je nakup hiše optimalen in smiseln.

V optimalno rešitev so vključene spremenljivke $x_2$, $x_3$ in $x_4$. Podjetje Investicija, d.o.o., naj tako kupi hiše številka 2, 3 in 4, da bo pri tem doseglo maksimalni finančni dobiček ob prodaji z upoštevanjem danih omejitev.

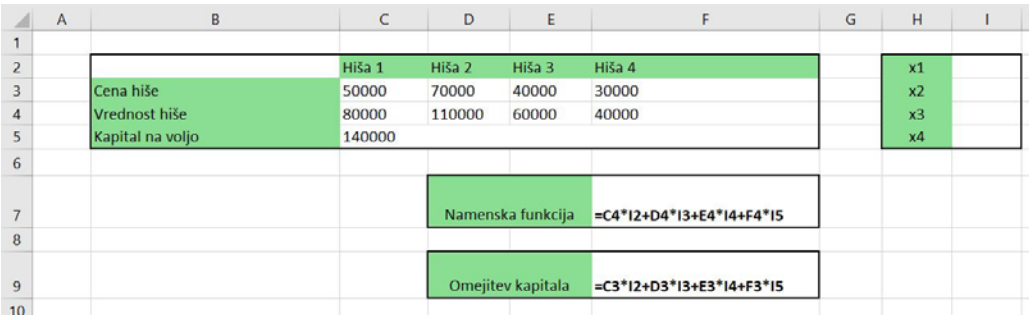
***Dopolnilna spremenljivka:*** predstavlja količino investicijskega kapitala, ki je po opravljeni investiciji še na voljo. Manjka zaradi postavljene omejitve ni mogoče doseči, saj je z omejitvijo definiran določen znesek, ki ga lahko porabijo v celoti, lahko pa bi (za optimalno izbrane investicije) porabili tudi manjši znesek, kot je na voljo.

V predstavljenem primeru vidimo, da je vrednost preostalega kapitala enaka 0. Za nakup hiš, ki so se izkazale kot optimalne, bo podjetje torej porabilo ves kapital, ki ga ima na voljo.

### 6.2.2 Reševanje investicijskega problema s pomočjo računalniškega programa Excel

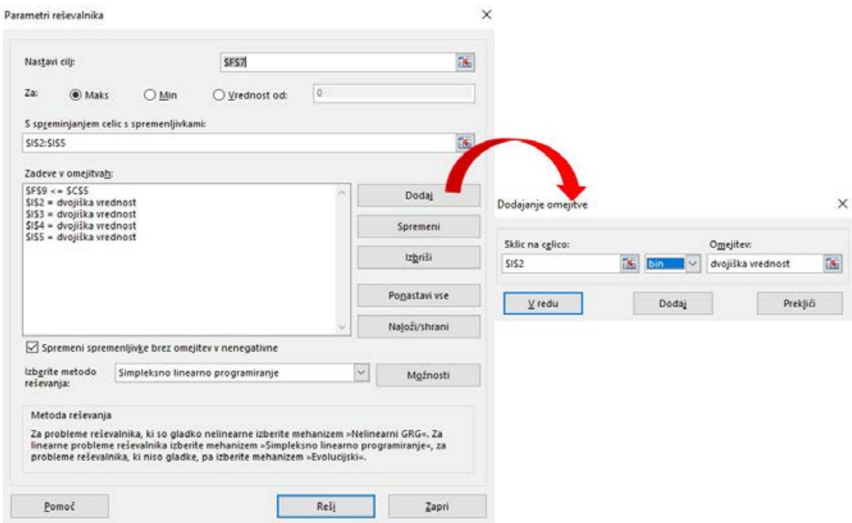
V nadaljevanju prikažemo, kako se lotimo reševanja investicijskega problema s programom Excel. Pripravimo tabelo z vsemi podatki. Pripravimo še polja za odločitvene spremenljivke. Ko so vsi podatki pripravljeni, lahko vnesemo formulo za namensko funkcijo. Cilj linearnega programa je doseči čim večji finančni dobiček ob prodaji hiš. Vnesemo še omejitev za kapital, ki omejuje vsoto cen kupljenih hiš.

Slika 79: Priprava za rešitev investicijskega problema v Excelu




Odpremo Reševalnik. Dodati je potrebno pogoj o binarnosti odločitvenih spremenljivk.

Slika 80: Vnos parametrov v reševalnik



Pod parameter **Nastavi cilj** vstavimo celico, pripravljeno za izpis vrednosti namenske funkcije (C7).

Želimo poiskati maksimum namenske funkcije.

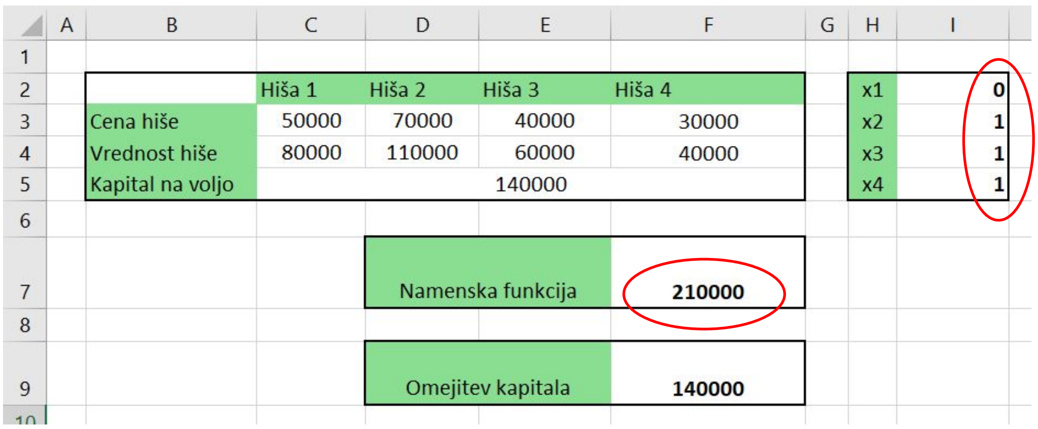
Pod parameter **s spreminjanjem celic s spremenljivkami** vstavimo celice, ki so pripravljene za izpis optimalne rešitve $x_1$, $x_2$, $x_3$ in $x_4$ (I2, I3, I4 in I5).

Dodamo omejitve tako da za sklic na celico nastavimo celico delovnega lista, kjer je definirana enačba za omejitev, nastavimo pravilni neenačaj in pod omejitev dodamo celico z vpisano vrednostjo omejitve.

Definirati moramo še, da so spremenljivke binarne. Označimo celico, pripravljeno za izpis rešitve in v spustnem meniju z neenačaji izberemo funkcijo $bin$.

Izberemo metodo reševanja problema: simpleksno linearno programiranje.

Slika 81: Rešitev investicijskega problema



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 | | x1 | 0 |
| 3 | | Cena hiše | 50000 | 70000 | 40000 | 30000 | | x2 | 1 |
| 4 | | Vrednost hiše | 80000 | 110000 | 60000 | 40000 | | x3 | 1 |
| 5 | | Kapital na voljo | | | 140000 | | | x4 | 1 |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Namenska funkcija | | 210000 | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | Omejitev kapitala | | 140000 | | | |
| 10 | | | | | | | | | |

Program Excel v pripravljene celice izpiše rešitve za optimalno investicijo nakupa hiš. Vrednost namenske funkcije je 210.000 €, za optimalni nakup pa naj podjetje kupi hiše številka 2, 3 in 4.

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $F$7 | Namenska funkcija Hiša 4 | 210000 | 210000 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $I$2 | x1 | 0 | 0 | Dvojiško |
| $I$3 | x2 | 1 | 1 | Dvojiško |
| $I$4 | x3 | 1 | 1 | Dvojiško |
| $I$5 | x4 | 1 | 1 | Dvojiško |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$9 | Omejitev kapitala Hiša 4 | 140000 | $F$9<=$C$5 | Vpenjanje | 0 |
| $I$2=Dvojiško | | | | | |
| $I$3=Dvojiško | | | | | |
| $I$4=Dvojiško | | | | | |
| $I$5=Dvojiško | | | | | |

Vrednost rezerve v vrstici omejitve kapitala je enaka 0. Podjetje bo z optimalnim nakupom hiš porabilo vsa sredstva, ki jih ima na voljo.

### 6.2.3 Razširitev problema

Predstavili smo samo osnovni investicijski problem, kjer kot omejitev obstaja samo količina kapitala, ki je na voljo ob nakupu. V nadaljevanju bomo predstavili kako v osnovni problem dodati razne omejitve, kot je na primer nakup natanko dveh hiš ali omejitev glede izključitve dveh hiš.

#### 6.2.3.1 Nakup natanko dveh hiš

V problem dodamo omejitev glede nakupa natanko dveh hiš (seveda bi lahko problem omejili tudi na nakup natanko ene hiše ali natanko treh).

Linearni program za osnovni problem:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

pri omejitvah: $50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$

$x_j = \{0,1\}; \; j = (1, 2, 3, 4)$

Namenska funkcija ostaja enaka, saj je še vedno cilj kupiti takšno kombinacijo hiš, da bo končni finančni dobiček investicije za podjetje Investicija, d.o.o., največja. Še vedno je podjetje omejeno z višino kapitala, ki so ga namenili za nakup.

Dodati je potrebno še omejitev nakupa samo dveh hiš. Zaradi dodatne omejitve mora biti vsota odločitvenih spremenljivk, ki predstavljajo nakup posamezne hiše, enaka 2:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

Nakup hiš je tako omejen samo na dve hiši.

Celotni linearni program investicijskega problema z omejitvijo nakupa:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

pri omejitvah: $50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

$x_j = \{0,1\}; \; j = (1, 2, 3, 4)$

Rešimo primer z dodatno omejitvijo še s programom Lingo:

```
!Namenska funkcija;
max = 80000*x1 + 110000*x2 + 60000*x3 + 40000*x4;
!Omejitve;
[Kapital] 50000*x1 + 70000*x2 + 40000*x3 + 30000*x4 <=
140000;
[Samo_2_hisi] x1 + x2 + x3 + x4 = 2;
!Pogoj binarnosti;
@BIN(x1);
@BIN(x2);
@BIN(x3);
@BIN(x4);
```

Poročilo o rešitvi problema z omejitvami:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              190000.0
  Objective bound:                              190000.0
  Infeasibilities:                              0.000000
  Elapsed runtime seconds:                          0.03

  Model Class:                                      PILP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      X1        1.000000           -80000.00
                                      X2        1.000000           -110000.0
                                      X3        0.000000           -60000.00
                                      X4        0.000000           -40000.00

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        190000.0            1.000000
                                 KAPITAL        20000.00            0.000000
                             SAMO_2_HISI        0.000000            0.000000
```

Za podjetje Investicija, d.o.o., je ob novi omejitvi, da lahko kupi samo dve hiši najbolj optimalno, da kupi hiši številka 1 in 2. Pri tem bo finančni dobiček ob prodaji kupljenih hiš znašal 190.000 €.

Pri optimalnem nakupu bo podjetju ostalo 20.000 € kapitala, ki so ga namenili za investicijo.

#### 6.2.3.2 Izključitveni pogoj

Postavimo lahko tudi pogoj, pri katerem ob nakupu ene hiše izključimo nakup druge. Primer takšnega izključitvenega pogoja je: v primeru, da bo v optimalni rešitvi izbrana hiša 1, podjetje Investicija, d.o.o., ne more kupiti še hiše 3. Tako zapisan pogoj ima obliko:

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

Vsota vrednosti odločitvenih spremenljivk za hišo 1 in 3 je lahko le manjša ali enaka 1, saj je lahko izbrana samo ena izmed teh dveh hiš. Osnovna omejitev glede kapitala, namenska funkcija in pogoj binarnih odločitvenih spremenljivk ostanejo nespremenjeni glede na osnovni problem.

Linearni program z dodatno omejitvijo investicijskega problema:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

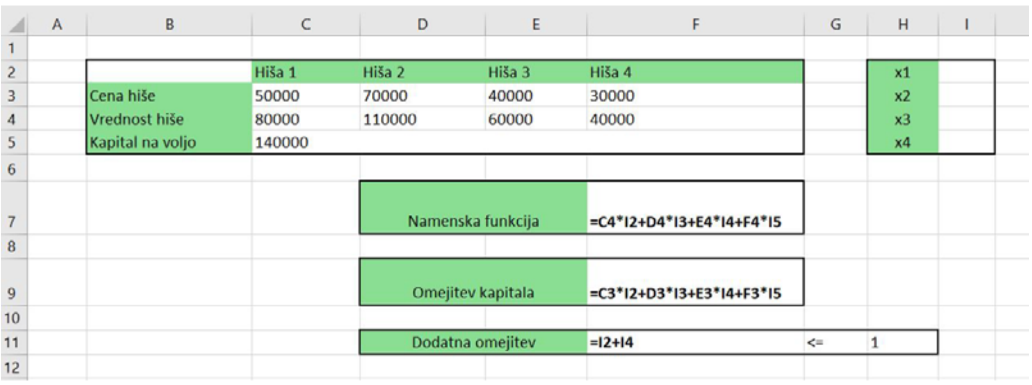
pri omejitvah: $50.000x_1 + 70.000x_2 + 40.000x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

$$x_j = \{0,1\}; \;\; j = (1, 2, 3, 4)$$

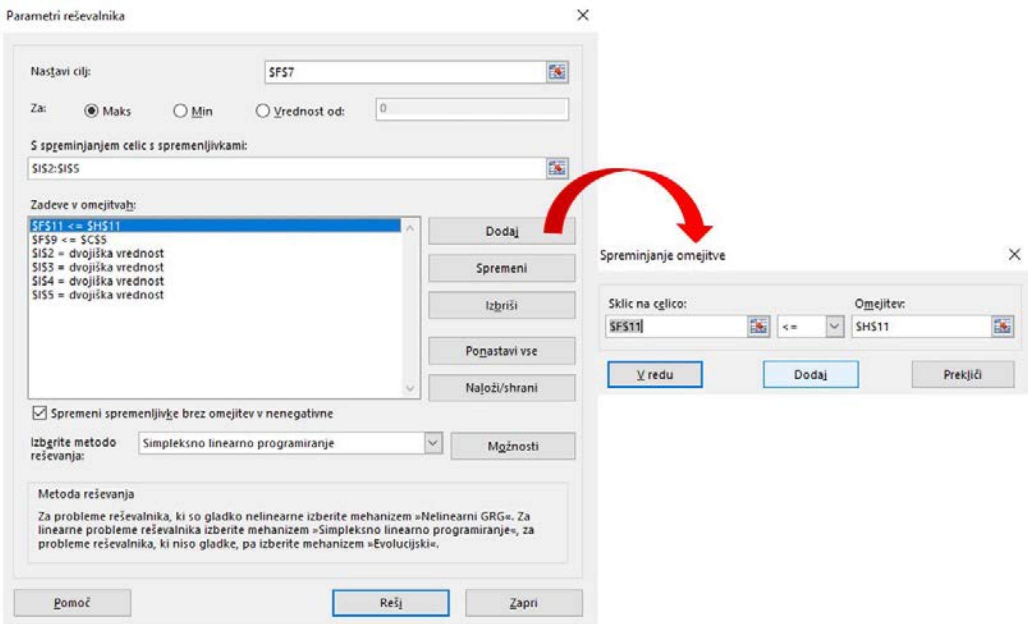
Rešimo linearni problem s programom Excel. Vnesemo vse podatke, namensko funkcijo in osnovno omejitev kapitala, kot smo to naredili v osnovnem primeru. Dodatno pripravimo samo še izključitveni pogoj:

Slika 82: Dodatni pogoj

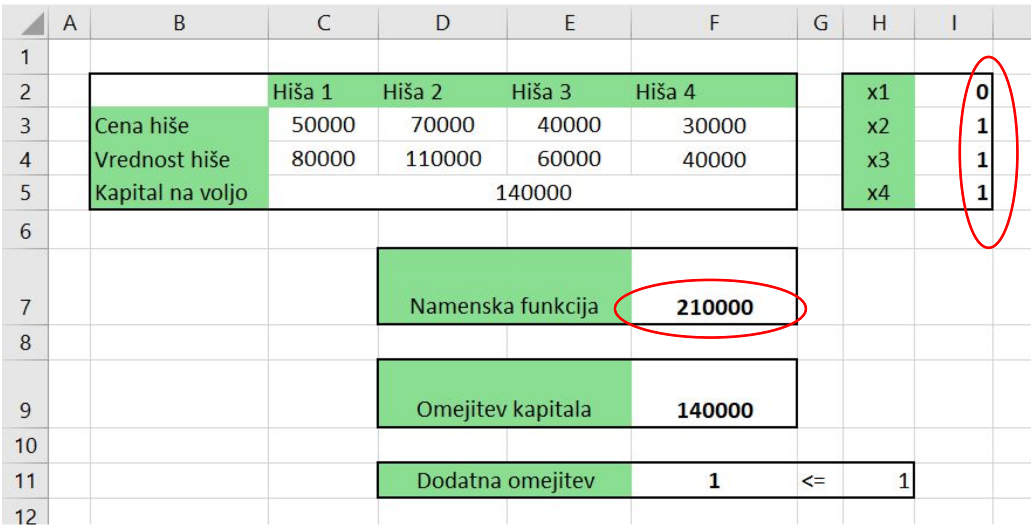


Izpolnimo vse parametre Reševalnika:

Slika 83: Parametri Reševalnika




Slika 84: Rešitev v delovnem listu



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 | | x1 | 0 |
| 3 | | Cena hiše | 50000 | 70000 | 40000 | 30000 | | x2 | 1 |
| 4 | | Vrednost hiše | 80000 | 110000 | 60000 | 40000 | | x3 | 1 |
| 5 | | Kapital na voljo | | 140000 | | | | x4 | 1 |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Namenska funkcija | | 210000 | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | Omejitev kapitala | | 140000 | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | Dodatna omejitev | | 1 | <= | 1 | |
| 12 | | | | | | | | | |

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $F$7 | Namenska funkcija | 210000 | 210000 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $I$2 | x1 | 0 | 0 | Dvojiško |
| $I$3 | x2 | 1 | 1 | Dvojiško |
| $I$4 | x3 | 1 | 1 | Dvojiško |
| $I$5 | x4 | 1 | 1 | Dvojiško |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$9 | Omejitev kapitala | 140000 | $F$9<=$C$5 | Vpenjanje | 0 |
| $I$2=Dvojiško | | | | | |
| $I$3=Dvojiško | | | | | |
| $I$4=Dvojiško | | | | | |
| $I$5=Dvojiško | | | | | |

V tem primeru izključitveni pogoj ni vplival na rešitev osnovnega investicijskega problema, saj je optimalna rešitev enaka kot optimalna rešitev osnovnega problema.

## 6.3 Investicijski problem z večkratnimi investicijami

V prejšnjem poglavju smo se posvetili investicijskemu problemu, kjer je investicija zahtevala samo začetni vloženi kapital. V realnem svetu pa mnogokrat začetni vloženi kapital ni edini strošek, povezan z nakupom. Če pogledamo primer nakupa hiše kot investicije, je treba poleg nakupa nepremičnine, vložiti kapital tudi v obnovo, ki lahko poteka v več fazah. Ob tem so lahko različne faze obnove omejene z različnimi zneski, ki so na voljo.

**Primer 42:** (Primer povzet po Cornuéjols, Trick & Saltzman, 1995)

Podjetje Investicija, d.o.o., si je zastavilo projekt, ki bo trajal tri mesece. Kupiti želijo nepremičnine, ki jih je treba še prenoviti. Prvi mesec lahko investirajo 140.000 €, drugi mesec 120.000 € in tretji mesec 150.000 €. V finančnem oddelku so našli 4 nepremičnine, ki bi bile primerne za nakup. V prvo nepremičnino bi morali v prvem mesecu investirati 50.000 €, v drugem 80.000 € in v tretjem 20.000 €. Njena trenutna realna vrednost je 80.000 €. Nepremičnina 2 zahteva naslednje investicije: 70.000 € v prvem mesecu in 100.000 € v tretjem mesecu. Njena trenutna realna vrednost je 110.000 €. Tretja nepremičnina zahteva 40.000 € v drugem mesecu nakupa in 60.000 € v tretjem mesecu, njena vrednost pa je 60.000 €. Nepremičnina 4 potrebuje naslednje investicije: 30.000 € v prvem mesecu, 40.000 € v drugem in 50.000 € v tretjem mesecu. Trenutna vrednost nepremičnine je 40.000 €. Katere nepremičnine naj podjetje Investicija, d.o.o., kupi, da bo, ob upoštevanju vseh finančnih omejitev, vrednost nakupa nepremičnin največja?

Uredimo dane podatke v preglednico:

| | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 | Omejitev |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.mesec [€] | 50.000 | 70.000 | / | 30.000 | 140.000 |
| 2.mesec [€] | 80.000 | / | 40.000 | 40.000 | 120.000 |
| 3.mesec [€] | 20.000 | 100.000 | 60.000 | 50.000 | 150.000 |
| Vrednost investicije [€] | 80.000 | 110.000 | 60.000 | 40.000 | |

***Določitev odločitvenih spremenljivk***

V danem problemu želimo določiti katere nepremičnine naj kupi podjetje Investicija, d.o.o.:

$$x_j = \begin{cases} 1; nepremičnino\ kupijo \\ 0; nepremičnine\ ne\ kupijo \end{cases}; \quad j = (1, 2, 3, 4)$$

***Določitev namenske funkcije***

Namenska funkcija v danem primeru predstavlja skupno vrednost investicij za podjetje Investicija d.o.o.:

- vrednost investicije v hišo 1 je $80.000x_1$
- vrednost investicije v hišo 2 je $110.000x_2$
- vrednost investicije v hišo 3 je $60.000x_3$
- vrednost investicije v hišo 4 je $40.000x_4$

Vrednost investicije v vse nepremičnine je:

$$80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

Podjetje želi maksimirati vrednost svoje investicije, zato iščemo maksimum namenske funkcije:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4.$$

***Določitev omejitev***

Podjetje je pri investiciji v nakup nepremičnin omejeno, saj lahko investiciji nameni samo toliko kapitala, kot ga ima na voljo. Vsota vseh investicij v posameznem mesecu mora biti manjša ali enaka vsoti, ki jo ima na voljo:

**1. mesec**

- vrednost investicije na nepremičnini 1 je $50.000x_1$
- vrednost investicije na nepremičnini 2 je $70.000x_2$
- na nepremičnini 3 v prvem mesecu ni dodatnih stroškov, torej je investicija $0x_3$
- vrednost investicije na nepremičnini 4 je $30.000x_4$

Prvi mesec ima podjetje rezervirana sredstva za investicije v višini 140.000 €, ki jih ne sme preseči. Omejitev za prvi mesec se torej glasi:

$$50.000x_1 + 70.000x_2 + 0x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$$

**2. mesec**

- vrednost investicije na nepremičnini 1 je $80.000x_1$
- na nepremičnini 2 v drugem mesecu ni dodatnih stroškov, torej je investicija $0x_2$
- vrednost investicije na nepremičnini 3 je $40.000x_3$
- vrednost investicije na nepremičnini 4 je $40.000x_4$

Drugi mesec ima podjetje rezervirana sredstva za investicije v višini 120.000 €, ki jih ne sme preseči. Omejitev za drugi mesec se torej glasi:

$$80.000x_1 + 0x_2 + 40.000x_3 + 40.000x_4 \leq 120.000$$

**3. mesec**

- vrednost investicije na nepremičnini 1 je $20.000x_1$
- vrednost investicije na nepremičnini 2 je $100.000x_2$
- vrednost investicije na nepremičnini 3 je $60.000x_3$
- vrednost investicije na nepremičnini 4 je $50.000x_4$

Tretji mesec ima podjetje rezervirana sredstva za investicije v višini 150.000 €, ki jih ne sme preseči. Omejitev za tretji mesec se torej glasi:

$$20.000x_1 + 100.000x_2 + 60.000x_3 + 50.000x_4 \leq 150.000$$

Pred zaključkom linearnega programa je treba zapisati še pogoj o binarnosti odločitvenih spremenljivk:

$$x_j = \{0,1\};\ \ j = (1,2,3,4)$$

Linearni program danega investicijskega problema je:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80.000x_1 + 110.000x_2 + 60.000x_3 + 40.000x_4$$

pri omejitvah:

$$50.000x_1 + 70.000x_2 + 0x_3 + 30.000x_4 \leq 140.000$$
$$80.000x_1 + 0x_2 + 40.000x_3 + 40.000x_4 \leq 120.000$$
$$20.000x_1 + 100.000x_2 + 60.000x_3 + 50.000x_4 \leq 150.000$$
$$x_j = \{0,1\};\ \ j = (1,2,3,4)$$

### 6.3.1 Reševanje investicijskega problema z večkratnimi investicijami s programom LINGO

Linearni program zapišemo v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
max = 80000*x1 + 110000*x2 + 60000*x3 + 40000*x4;
!Omejitve;
[Mesec1] 50000*x1 + 70000*x2 + 30000*x4  <= 140000;
[Mesec2] 80000*x1 + 40000*x3 + 40000*x4 <=120000;
[Mesec3]  20000*x1  +  100000*x2  +  60000*x3  +  50000*x4
<=150000;
!Pogoj binarnosti;
@BIN(x1);
@BIN(x2);
@BIN(x3);
@BIN(x4);
```

Poročilo o rešitvi investicijskega problema:

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              190000.0
  Objective bound:                              190000.0
  Infeasibilities:                              0.000000
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                      PILP


                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        1.000000           -80000.00
                             X2        1.000000           -110000.0
                             X3        0.000000           -60000.00
                             X4        0.000000           -40000.00

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        190000.0            1.000000
                        MESEC1        20000.00            0.000000
                        MESEC2        40000.00            0.000000
                        MESEC3        30000.00            0.000000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** investicija podjetja bo pri optimalni rešitvi vredna 190.000 €.

***Vrednost***: v optimalno rešitev primera sta vključeni spremenljivki $x_1$ in $x_2$. Podjetje Investicije, d.o.o., naj tako kupi nepremičnini številka 1, in 2, da bo pri tem vrednost investicije za njih najvišja.

***Dopolnilna spremenljivka:*** v predstavljenem primeru je vrednost ostalega kapitala za prvi mesec 20.000 €, za drugi mesec 40.000 € in za tretji mesec 30.000 €. Ob prenovi nepremičnin bo tako podjetju ostalo 90.000 € kapitala.

### 6.3.2 Reševanje investicijskega problema z večkratnimi investicijami s programom Excel

Pripravimo tabelo z vsemi podatki. Pripravimo še polja za odločitvene spremenljivke. Ko so vsi podatki pripravljeni, vnesemo formulo za namensko funkcijo. Cilj linearnega programa je doseči čim večjo vrednost investicij. Namenska funkcija je torej vsota investicij, ki jo je možno doseči z nakupom kombinacije hiš.

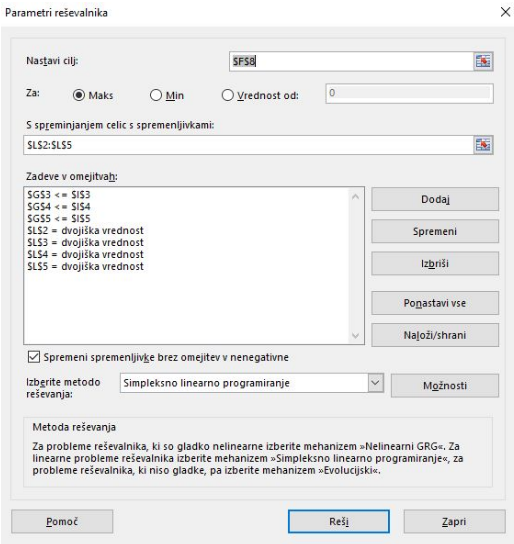
Omejitve kapitala vnesemo za vsak mesec posebej, saj si je podjetje zastavilo mesečni finančni plan.

Slika 85: Priprava za reševanje investicijskega problema z večkratnimi investicijami

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 | Vrednost omejitve | | Omejitev | | x1 | |
| 3 | | 1. mesec | 50000 | 70000 | 0 | 30000 | =C3*L2+D3*L3+E3*L4+F3*L5 | <= | 140000 | | x2 | |
| 4 | | 2.mesec | 80000 | 0 | 40000 | 40000 | =C4*L2+D4*L3+E4*L4+F4*L5 | <= | 120000 | | x3 | |
| 5 | | 3.mesec | 20000 | 100000 | 60000 | 50000 | =C5*L2+D5*L3+E5*L4+F5*L5 | <= | 150000 | | x4 | |
| 6 | | Vrednost investicije | 80000 | 110000 | 60000 | 40000 | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | Namenska funkcija | | =C6*L2+D6*L3+E6*L4+F6*L5 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | |

Odpremo Reševalnik in vnesemo potrebne parametre.

Slika 86: Vnos parametrov v reševalnik




Pod parameter **Nastavi cilj** vnesemo celico, pripravljeno za izpis vrednosti namenske funkcije (C8).

Določimo, da iščemo maksimum namenske funkcije.

Pod parametrom **s spreminjanjem celic s spremenljivkami** vnesemo celice pripravljene za izpis optimalne rešitve $x_1$, $x_2$, $x_3$ in $x_4$.

Omejitve vnesemo tako, da opredelimo celice, kjer so definirane enačbe za posamične omejitve, nastavimo pravilni neenačaj in opredelimo celice, ki vsebujejo vrednosti omejitev.

Rešitve definiranih spremenljivk morajo biti binarne vrednosti, kot dodatne omejitve označimo celice, pripravljene za izpis rešitve in v spustnem meniju z neenačaji izberemo funkcijo $bin$.

Kot metodo reševanja izberemo simpleksno linearno programiranje.

Slika 87: Rešitev investicijskega problema z večkratnimi investicijami

| | Hiša 1 | Hiša 2 | Hiša 3 | Hiša 4 | Vrednost omejitve | | Omejitev | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | x1 | 1 |
| 1. mesec | 50000 | 70000 | 0 | 30000 | 120000 | <= | 140000 | | x2 | 1 |
| 2.mesec | 80000 | 0 | 40000 | 40000 | 80000 | <= | 120000 | | x3 | 0 |
| 3.mesec | 20000 | 100000 | 60000 | 50000 | 120000 | <= | 150000 | | x4 | 0 |
| Vrednost investicije | 80000 | 110000 | 60000 | 40000 | | | | | | |

| | |
|---|---|
| Namenska funkcija | 190000 |

Program Excel v pripravljene celice izpiše rešitve za optimalno investicijo v nakup hiš. Vrednost namenske funkcije je 190.000 €, za optimalni nakup pa naj podjetje kupi nepremičnini številka 1 in 2.

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $F$8 | Namenska funkcija Hiša 4 | 0 | 190000 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $L$2 | x1 | 0 | 1 | Dvojiško |
| $L$3 | x2 | 0 | 1 | Dvojiško |
| $L$4 | x3 | 0 | 0 | Dvojiško |
| $L$5 | x4 | 0 | 0 | Dvojiško |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $G$3 | 1. mesec Vrednost omejitve | 120000 | $G$3<=$I$3 | Brez vpenjanja | 20000 |
| $G$4 | 2.mesec Vrednost omejitve | 80000 | $G$4<=$I$4 | Brez vpenjanja | 40000 |
| $G$5 | 3.mesec Vrednost omejitve | 120000 | $G$5<=$I$5 | Brez vpenjanja | 30000 |
| $L$2=Dvojiško | | | | | |
| $L$3=Dvojiško | | | | | |
| $L$4=Dvojiško | | | | | |
| $L$5=Dvojiško | | | | | |

Vrednost rezerve v vrstici omejitve kapitala za prvi mesec je enaka 20.000 €, za drugi mesec 40.000 € in za tretji mesec 30.000 €.

## 6.4 Problem nahrbtnika

Problem nahrbtnika[46] je relativno lahek primer celoštevilskega programiranja z binarnimi odločitvenimi spremenljivkami. Z nazivom problem nahrbtnika označujemo vse probleme celoštevilskega programiranja z binarnimi spremenljivkami, ki imajo le eno omejitev.

Gre za probleme, kjer je namen zapolniti nahrbtnik (ali nakupovalno vrečo ali prtljažnik avtomobila itd.) z raznimi predmeti, od katerih ima vsak svojo ceno in prostornino. Linearni program skuša najbolje zapolniti prostor, ki je na voljo, tako da maksimira vrednost spakiranih predmetov.

V primeru, da bi nahrbtnik polnili po vrsti, kot so npr. zloženi predmeti na mizi, bi bil nahrbtnik sicer hitro napolnjen, vendar bi ga lahko napolnili s predmeti, ki zavzamejo veliko prostora, uporabne vrednosti pa nimajo. V primeru, da vzamemo namesto velikega predmeta z majhno uporabno vrednostjo, raje dva manjša z večjo vrednostjo, bomo imeli od vsebine nahrbtnika nekoliko več.

**Primer 43:** (Primer povzet po Cornuéjols, Trick & Saltzman, 1995)

Miha se odpravlja na taborjenje. V svoj nahrbtnik želi naložiti stvari, ki mu bodo na taborjenju najbolj koristile. S seboj bo vzel nahrbtnik s prostornino 17 litrov. Vanj bi rad spravil 4 predmete. Uporabno vrednost posameznih predmetov je ocenil na podlagi izkušenj iz preteklih taborjenj. Prvi predmet ima prostornino 4 litre, njegova uporabna vrednost pa je ocenjena z 9. Drugi predmet ima uporabno vrednost 15, njegova prostornina pa je 9 litrov. Tretji predmet ima prostornino 2 litra, uporabna vrednost je ocenjena z 8. Četrti predmet ima prostornino 3 litre, njegova uporabna vrednost je ocenjena s 4.

[46] Knapsack problem

| | Predmet 1 | Predmet 2 | Predmet 3 | Predmet 4 |
|---|---|---|---|---|
| Volumen [L] | 4 | 9 | 2 | 3 |
| Vrednost | 9 | 15 | 8 | 4 |

### *Določitev odločitvenih spremenljivk*

Določiti je treba katere predmete naj Miha pospravi v nahrbtnik, katere pa naj pusti doma:

$$x_j = \begin{cases} 1; predmet\ vzame\ s\ seboj \\ 0; predmeta\ ne\ vzame\ s\ seboj \end{cases}; \quad j = (1, 2, 3, 4)$$

### *Določitev namenske funkcije*

Namenska funkcija predstavlja skupno vrednost predmetov, ki naj jih Miha vzame s seboj:

- vrednost predmeta 1 je $9x_1$
- vrednost predmeta 2 je $15x_2$
- vrednost predmeta 8 je $8x_3$
- vrednost predmeta 4 je $4x_4$

Vrednost vseh štirih predmetov, ki jih lahko vzame s seboj:

$$9x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

Poiskati je treba maksimalno uporabnovrednost predmetov:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

### *Določitev omejitev*

Pri pakiranju predmetov v nahrbtnik je Miha omejen s prostornino nahrbtnika. Vanj lahko zloži le toliko predmetov, da z njimi ne bo presegel prostornine nahrbtnika.

- prostornina predmeta 1 je $4x_1$
- prostornina predmeta 2 je $9x_2$
- prostornina predmeta 3 je $2x_3$

- prostornina predmeta 4 je $3x_4$

Na voljo ima 17 litrov, ki jih pri pakiranju ne more preseči, zato končno omejitev zapišemo kot:

$$4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 17$$

Potrebno je zapisati še pogoj o binarnosti odločitvenih spremenljivk:

$$x_j = \{0,1\}; \ \ j = (1, 2, 3, 4)$$

Linearni program danega problema nahrbtnika je:

$$\max z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

pri omejitvah: $4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 17$

$$x_j = \{0,1\}; \ \ j = (1, 2, 3, 4)$$

### 6.4.1 Reševanje problema nahrbtnika s programom LINGO

Linearni program zapišemo v sintaksi, ki je programu razumljiva:

```
!Namenska funkcija;
max = 9*x1 + 15*x2 + 8*x3 + 4*x4;
!Omejitve;
[Volumen] 4*x1 + 9*x2 + 2*x3 + 3*x4  <= 17;
!Pogoj binarnosti;
@BIN(x1);
@BIN(x2);
@BIN(x3);
@BIN(x4);
```

Poročilo o rešitvi investicijskega problema:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              32.00000
  Objective bound:                              32.00000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Elapsed runtime seconds:                          0.03

  Model Class:                                      PILP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      X1        1.000000           -9.000000
                                      X2        1.000000           -15.00000
                                      X3        1.000000           -8.000000
                                      X4        0.000000           -4.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        32.00000            1.000000
                                 VOLUMEN        2.000000            0.000000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** uporabna vrednost predmetov, ki jih bo Miha vzel s seboj na taborjenje je 32.

***Vrednost***: predstavlja optimalno rešitev, katere predmete naj Miha vzame s seboj. Miha naj vzame s seboj predmete številka 1, 2 in 3, da bo pri tem izkoristil prostor v nahrbtniku in bo uporabna vrednost predmetov, ki jih bo vzel s seboj, zanj največja.

***Dopolnilna spremenljivka:*** predstavlja količino prostora, ki je v nahrbtniku po pakiranju še ostala nezapolnjena. Vrednost v predstavljenem primeru je 2. V nahrbtniku torej po pakiranju ostaneta 2 litra prostora.

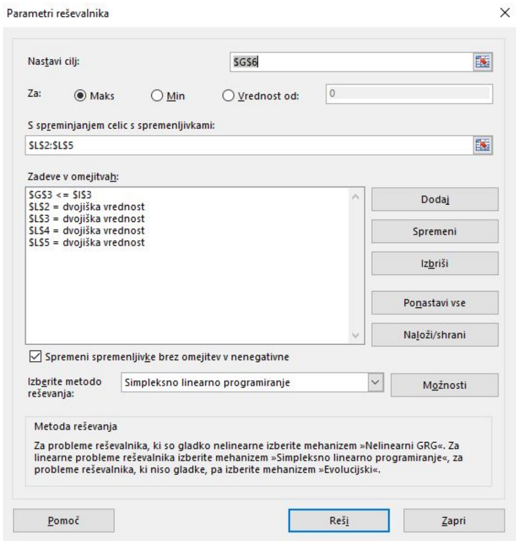
### 6.4.2 Reševanje problema nahrbtnika s programom Excel

Pripravimo tabelo z vsemi podatki. Pripravimo še polja za odločitvene spremenljivke. Ko so vsi podatki pripravljeni, vnesemo formulo za namensko funkcijo. Cilj linearnega programa je doseči čim večjo vrednost spakiranih predmetov. Vnesemo še omejitev za prostornino nahrbtnika, ki omejuje vsoto prostornine posameznih predmetov.

Slika 88: Priprava podatkov za reševanje problema nahrbtnika v programu Excel


Odpremo reševalnik in vnesemo vse potrebne parametre.

Slika 89: Vnos parametrov v reševalnik




Pod parameter **Nastavi cilj** vnesemo celico, ki smo jo pripravili za izpis vrednosti namenske funkcije (G6).

Določimo, da želimo namensko funkcijo maksimirati.

Pod parametrom **s spreminjanjem celic s spremenljivkami** označimo celice, ki so pripravljene za izpis optimalne rešitve $x_1$, $x_2$, $x_3$ in $x_4$.

Vnesemo omejitev tako, da označimo celico, v kateri je definirana enačba za omejitev, nastavimo pravilni neenačaj in celico, ki vsebuje vrednost omejitve.

Rešitve morajo zavzeti binarne vrednosti, dodamo torej dodatne omejitve. Izberemo celice, pripravljene za izpis rešitve in v spustnem meniju z neenačaji izberemo funkcijo $bin$.

Izberemo metodo simpleksnega linearnega programiranja.

Slika 90: Rešitev investicijskega problema

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Predmet 1 | Predmet 2 | Predmet 3 | Predmet 4 | Vrednost omejitve | | Omejitev | | x1 | 1 |
| 3 | | Volumen | 4 | 9 | 2 | 3 | 15 | <= | 17 | | x2 | 1 |
| 4 | | Vrednost | 9 | 15 | 8 | 4 | | | | | x3 | 1 |
| 5 | | | | | | | | | | | x4 | 0 |
| 6 | | | | | Namenska funkcija | | 32 | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | |

Program Excel v pripravljene celice izpiše rešitve za optimalno vrednost. Vrednost namenske funkcije je 32, za optimalno napolnitev nahrbtnika naj Miha vzame s seboj predmete številka 1, 2 in 3.

Poročilo o odgovorih:

Celica s cilji (Maks)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $G$6 | Namenska funkcija Vrednost omejitve | 0 | 32 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $L$2 | x1 | 0 | 1 | Dvojiško |
| $L$3 | x2 | 0 | 1 | Dvojiško |
| $L$4 | x3 | 0 | 1 | Dvojiško |
| $L$5 | x4 | 0 | 0 | Dvojiško |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $G$3 | Volumen Vrednost omejitve | 15 | $G$3<=$I$3 | Brez vpenjanja | 2 |
| $L$2=Dvojiško | | | | | |
| $L$3=Dvojiško | | | | | |
| $L$4=Dvojiško | | | | | |
| $L$5=Dvojiško | | | | | |

Vrednost rezervne prostornine je enaka 2. Miha ima potem, ko v nahrbtnik naloži vse predmete iz optimalne rešitve, še 2 litra prostora v nahrbtniku.

## 6.5 Problem trezorja[47]

**Primer 44:** (Primer povzet po Cornuéjols, Trick & Saltzman, 1995)

Nacionalno podjetje ima posle s podjetji po celi Evropi. Zaradi različno urejenih predpisov pri prenosu denarja obstajajo razlike v časovni izvedbi transakcij. Prihaja do časovnih razlik od trenutka, ko stranka izpolni svojo obvezo in plača račun, do trenutka, ko podjetje lahko prejeti denar uporabi.

Npr. če je denar položen na banko v Zagrebu, je denar podjetju na razpolago v dveh dneh. Če je denar položen na banko na Dunaju, traja osem dni, preden podjetje denar lahko uporabi. V interesu podjetja je, da je denar na voljo čimprej, saj z vsakim dnem čakanja, podjetje izgublja denar, povezan z obrestmi.

Z namenom skrajšanja časa za izplačilo denarja, želi podjetje odpreti trezorje (imenovane »Lockbox«) za upravljanje z denarjem v različnih mestih.

Podjetje posluje s štirimi različnimi regijami v Evropi – Severno, Srednjo, Zahodno in Vzhodno. Povprečja dnevnih transakcij v posameznih delih Evrope so prikazana v spodnji tabeli.

| Regija | Znesek [€] |
|---|---|
| Vzhodna Evropa | 70.000 |
| Severna Evropa | 50.000 |
| Srednja Evropa | 60.000 |
| Zahodna Evropa | 40.000 |

[47] LockBox Problem

Podjetje razmišlja, da bi trezorje za upravljanje s transakcijami odprlo v Helsinkih, Berlinu, Bruslju in/ali Kijevu. Odprtje in vzdrževanje bi jih stalo 50.000 € letno, ne glede na mesto, kjer bi jih vzpostavili. Razlika med lokacijami se pojavi samo v številu dni, preden je denar sproščen. Povprečje teh dni je predstavljeno v spodnji tabeli. V katerih mestih naj podjetje odpre trezorje, da bodo stroški izgub najmanjši?

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa [število dni] | 2 | 6 | 8 | 8 |
| Severna Evropa [število dni] | 6 | 2 | 5 | 5 |
| Srednja Evropa [število dni] | 8 | 5 | 2 | 5 |
| Zahodna Evropa [število dni] | 8 | 5 | 5 | 2 |

Najprej moramo izračunati izgubo zaslužka, ki nastaja zaradi obresti, v času ko je denar zadržan v trezorju. Izguba zaslužka je seveda povezana s številom dni, ko nakazani denar stoji v trezorju.

Poglejmo podrobneje nakazilo iz Vzhodne Evrope v Berlin. Podjetja iz Vzhodne Evrope dnevno nakažejo 70.000 €, v Berlinu v trezorju pa se denar zadržuje v povprečju 8 dni. To pomeni, da je vsak dan v trezorju 560.000 €. Če predpostavimo, da je obrestna mera 0,02 %, to pomeni, da imajo ob nakazilu 112 € izgube.

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | $2 \cdot 70.000 \cdot 0{,}0002$ | $6 \cdot 70.000 \cdot 0{,}0002$ | $8 \cdot 70.000 \cdot 0{,}0002$ | $8 \cdot 70.000 \cdot 0{,}0002$ |
| Severna Evropa | $6 \cdot 50.000 \cdot 0{,}0002$ | $2 \cdot 50.000 \cdot 0{,}0002$ | $5 \cdot 50.000 \cdot 0{,}2$ | $5 \cdot 50.000 \cdot 0{,}0002$ |
| Srednja Evropa | $8 \cdot 60.000 \cdot 0{,}0002$ | $5 \cdot 60.000 \cdot 0{,}0002$ | $2 \cdot 60.000 \cdot 0{,}2$ | $5 \cdot 60.000 \cdot 0{,}0002$ |
| Zahodna Evropa | $8 \cdot 40.000 \cdot 0{,}0002$ | $5 \cdot 40.000 \cdot 0{,}0002$ | $5 \cdot 40.000 \cdot 0{,}0002$ | $2 \cdot 40.000 \cdot 0{,}0002$ |

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 28 | 84 | 112 | 112 |
| Severna Evropa | 60 | 20 | 50 | 50 |
| Srednja Evropa | 96 | 60 | 24 | 60 |
| Zahodna Evropa | 64 | 40 | 40 | 16 |

### *Določitev odločitvenih spremenljivk*

Določiti je treba kje naj podjetje vzpostavi trezorje, zato to vrsto odločitvenih spremenljivk, ki definirajo vzpostavitev trezorja definiramo kot:

$$y_j = \begin{cases} 1; trezor\ vzpostavi \\ 0; trezor\ ne\ vzpostavi \end{cases};\ j = (1, 2, 3, 4)$$

Poleg te odločitve pa je potrebno določiti tudi na kateri vzpostavljen trezor naj posamezna regija nakazuje denar, torej je potrebno definirati še drugo vrsto odločitvenih spremenljivk:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; transakcija\ izvedena \\ 0; transakcija\ ni\ izvedena \end{cases};\ \ i = (1, 2, 3, 4)\ \ in\ j = (1,2,3,4)$$

### *Določitev namenske funkcije*

Namenska funkcija v danem primeru predstavlja skupni strošek (tako delovanja trezorja kot tudi izgube zaslužka, ki bi nastal zaradi zadrževanja denarja):

- strošek posameznih pisarn je 50.000 € ne glede na to, v katerem mestu pisarna obratuje, torej je skupni strošek obratovanja pisarn:

$$50.000y_1 + 50.000y_2 + 50.000y_3 + 50.000y_4$$

- izguba zaslužka v primeru nakazil Vzhodne Evrope je $28x_{11}$, če denar nakažejo v Kijev, 84$x_{12}$ v primeru, da denar nakažejo preko Helsinkov, 112$x_{13}$ v primeru, da je denar nakazan preko Berlina in 112$x_{14}$ ob nakazilu preko Bruslja

$$28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14}$$

- izguba zaslužka v primeru nakazil Severne Evrope je $60x_{21}$, če denar nakažejo v Kijev, 20$x_{22}$ v primeru, da denar nakažejo preko Helsinkov, 50$x_{23}$ v primeru, da je denar nakazan preko Berlina in 50$x_{24}$ ob nakazilu preko Bruslja

$$60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24}$$

- izguba zaslužka v primeru nakazil Srednje Evrope je $96x_{31}$, če denar nakažejo v Kijev, 60$x_{32}$ v primeru, da denar nakažejo preko Helsinkov, 24$x_{33}$ v primeru, da je denar nakazan preko Berlina in 60$x_{34}$ ob nakazilu preko Bruslja
$$96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34}$$
- izguba zaslužka v primeru nakazil Zahodne Evrope je $64x_{41}$, če denar nakažejo v Kijev, 40$x_{42}$ v primeru, da denar nakažejo preko Helsinkov, 40$x_{43}$ v primeru, da je denar nakazan preko Berlina in 16$x_{44}$ ob nakazilu preko Bruslja
$$64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44}$$

Skupna izguba zaslužka je torej:
$$\begin{aligned}28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} + \ 96x_{31}\\ + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44}\\ + 50.000y_1 + 50.000y_2 + 50.000y_3 + 50.000y_4\end{aligned}$$

Iščemo minimalno vrednost izgube, torej moramo poiskati minimum namenske funkcije:
$$\begin{aligned}\min z(x_{ij}, y_i) = 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23}\\ + 50x_{24} + \ 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43}\\ + 16x_{44} + 50.000y_1 + 50.000y_2 + 50.000y_3 + 50.000y_4\end{aligned}$$

***Določitev omejitev***

Vsaka izmed regij mora denar nakazati natanko preko enega trezorja, torej mora biti vsota transakcij posamezne regije enaka ena:

- Vzhodna Evropa
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
- Severna Evropa
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
- Srednja Evropa
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
- Zahodna Evropa
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

Seveda nobena izmed regij denarja ne more nakazovati preko trezorja, ki ne obstaja (trezorja, ki ne bo odprt, ker njegovo delovanje ne bi bilo optimalno):

- vsota vseh morebitnih transakcij preko Kijeva ($x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}$) mora biti manjša ali enaka njenemu $y_1$. Odločitveno spremenljivko, ki definira obstoj trezorja lahko pomnožimo s številom regij ali s katerimkoli številom, večjim od števila regij (npr. 10). S tem dopustimo, da so lahko vse regije del optimalne rešitve. V primeru, da bi uporabili število manjše od števila regij, bi s tem onemogočili vsem regijam, da postanejo del rešitve:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10y_1$$

V primeru, da trezorja v Kijevu ne bodo odprli, mora biti vsota njegovih povezav z regijami enaka 0. Nobena odločitvena spremenljivka ne more biti večja od 0 in denarja preko teh povezav ni mogoče nakazovati.

V primeru, da trezor v Kijevu odprejo, mora biti vsota povezav manjša od 10. S takšno omejitvijo dovoljujemo, da vse regije nakazujejo denar preko trezorja v Kijevu, če to za njih predstavlja najcenejšo transakcijo.

- Vsota vseh morebitnih transakcij preko Helsinkov ($x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}$) mora biti manjša ali enaka obstoju $y_2$. Odločitveno spremenljivko za obstoj lahko pomnožimo s katerimkoli številom, večjim od števila regij, npr. 10.

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{41} \leq 10y_2$$

V primeru, da trezorja v Helsinkih ne bodo odprli, mora biti vsota njegovih povezav z regijami enaka 0. Nobena odločitvena spremenljivka ne more biti večja od 0 in denarja preko teh povezav ni mogoče nakazovati.

V primeru, da trezor v Helsinkih odprejo, mora biti vsota povezav manjša od 10. S takšno omejitvijo dovoljujemo, da vse regije nakazujejo denar preko trezorja v Helsinkih, če to za njih predstavlja najcenejšo transakcijo.

- Vsota vseh morebitnih transakcij preko Berlina ($x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}$) mora biti manjša ali enaka obstoju $y_3$. Odločitveno spremenljivko, ki definira obstoj trezorja lahko pomnožimo s katerimkoli številom, večjim od števila regij, npr. 10.

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\leq 10y_3$$

V primeru, da trezorja v Berlinu ne bodo odprli, mora biti vsota njegovih povezav z regijami enaka 0. Nobena odločitvena spremenljivka ne more biti večja od 0 in denarja preko teh povezav ni mogoče nakazovati.

V primeru, da trezor v Berlinu odprejo, mora biti vsota manjša od 10. S takšno omejitvijo dovoljujemo, da vse regije nakazujejo denar preko trezorja v Berlinu, če to za njih predstavlja najcenejšo transakcijo.

- Vsota vseh morebitnih transakcij preko Bruslja ($x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}$) mora biti manjša ali enaka obstoju $y_4$. Odločitveno spremenljivko, ki definira obstoj trezorja lahko pomnožimo s katerimkoli številom, večjim od števila regij, npr. 10.

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}\leq 10y_4$$

V primeru, da trezorja  v Berlinu ne bodo odprli, mora biti vsota njegovih povezav z regijami enaka 0. Nobena odločitvena spremenljivka ne more biti večja od 0 in denarja preko teh povezav ni mogoče nakazovati.

V primeru, da trezor v Berlinu odprejo, mora biti vsota manjša kot 10, torej s takšno omejitvijo dovoljujemo, da vse regije nakazujejo denar preko trezorja v Berlinu, če to za njih predstavlja najcenejšo transakcijo.

Definiramo še binarnost odločitvenih spremenljivk:

$$x_{ij}=\{0,1\}\,;\; i=(1,2,3,4)\; in\; j=(1,2,3,4)$$

$$y_j=\{0,1\};\;\; j=(1,2,3,4)$$

Končni linearni program danega investicijskega problema je:

$$\begin{aligned}\min z(x_{ij},y_i) = {} & 28x_{11}+84x_{12}+112x_{13}+112x_{14}+60x_{21}+20x_{22}+50x_{23}\\ & +50x_{24}+\;96x_{31}+60x_{32}+24x_{33}+60x_{34}+64x_{41}+40x_{42}+40x_{43}\\ & +16x_{44}+50.000y_1+50.000y_2+50.000y_3+50.000y_4\end{aligned}$$

pri omejitvah: $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10y_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{41} \leq 10y_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 10y_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \leq 10y_4$$
$$x_{ij} = \{0{,}1\}\,;\ i = (1, 2, 3, 4)$$
$$in\ j = (1{,}2{,}3{,}4)$$
$$y_j = \{0{,}1\};\ \ j = (1, 2, 3, 4)$$

### 6.5.1 Reševanje problema trezorja s programom LINGO

V primeru reševanja problema trezorja v LINGU, je treba najprej izračunati podatke o izgubah zaradi obresti, nato pa linearni program zapisati v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
min =     28*x11 + 84*x12 + 112*x13 + 112*x14
        + 60*x21 + 20*x22 +   50*x23 +    50*x24
        + 96*x31 + 60*x32 +   24*x33 +    60*x34
        + 64*x41 + 40*x42 +   40*x43 +    16*x44
        + 50000*y1 + 50000*y2 + 50000*y3+  50000*y4;
!Omejitve;
[Vzhodna] x11 + x12 + x13 + x14 = 1;
[Severna] x21 + x22 + x23 + x24 = 1;
[Srednja] x31 + x32 + x33 + x34 = 1;
[Zahodna] x41 + x42 + x43 + x44 = 1;

[Kijev]      x11 + x21 + x31 + x41 <= 10*y1;
[Helsinki] x12 + x22 + x32 + x42 <= 10*y2;
[Berlin]    x13 + x23 + x33 + x43 <= 10*y3;
[Bruselj]  x14 + x24 + x34 + x44 <= 10*y4;
!Pogoj binarnosti;
@BIN(x11); @BIN(x12); @BIN(x13); @BIN(x14);
@BIN(x21); @BIN(x22); @BIN(x23); @BIN(x24);
```

```
@BIN(x31);  @BIN(x32); @BIN(x33); @BIN(x34);
@BIN(x41);  @BIN(x42); @BIN(x43); @BIN(x44);
@BIN(y1); @BIN(y2); @BIN(y3); @BIN(y4);
```

Določiti je treba, da so vse odločitvene spremenljivke, ki nastopajo v linearnem programu, binarne oblike z ukazom @BIN().

Poročilo o rešitvi investicijskega problema:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              50204.00
Objective bound:                              50204.00
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0
Elapsed runtime seconds:                          0.06

Model Class:                                      PILP


                          Variable           Value        Reduced Cost
                               X11        0.000000            28.00000
                               X12        1.000000            84.00000
                               X13        0.000000            112.0000
                               X14        0.000000            112.0000
                               X21        0.000000            60.00000
                               X22        1.000000            20.00000
                               X23        0.000000            50.00000
                               X24        0.000000            50.00000
                               X31        0.000000            96.00000
                               X32        1.000000            60.00000
                               X33        0.000000            24.00000
                               X34        0.000000            60.00000
                               X41        0.000000            64.00000
                               X42        1.000000            40.00000
                               X43        0.000000            40.00000
                               X44        0.000000            16.00000
                                Y1        0.000000            50000.00
                                Y2        1.000000            50000.00
                                Y3        0.000000            50000.00
                                Y4        0.000000            50000.00

                               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                 1        50204.00           -1.000000
                           VZHODNA        0.000000            0.000000
                           SEVERNA        0.000000            0.000000
                           SREDNJA        0.000000            0.000000
                           ZAHODNA        0.000000            0.000000
                             KIJEV        0.000000            0.000000
                          HELSINKI        6.000000            0.000000
                            BERLIN        0.000000            0.000000
                           BRUSELJ        0.000000            0.000000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** namenska funkcija v predstavljenem primeru predstavlja strošek podjetja (z delovanjem trezorjev in z izgubo dobička zaradi obresti). Mednarodno podjetje bo imelo 50.204 € stroškov.

***Vrednost***: predstavlja rešitev v katerih mestih naj podjetje vzpostavi trezorje. Spomnimo, da smo odločitvene spremenljivke za trezorje označili z $y_i$. Optimalno bi bilo torej, da trezorje vzpostavijo v vseh regijah.

Odločitvene spremenljivke glede transakcij iz regije v določeno pisarno smo označili z $x_{ij}$. Iz vseh štirih regij Evrope naj transakcije potekajo preko Helsinkov ($x_{12} = x_{22} = x_{32} = x_{42} = 1$).

### 6.5.2 Reševanje problema trezorja s programom Excel

V programu Excel lahko relativno preprosto izračunamo tudi izgubo za podjetja. V delovni zvezek vnesemo osnovne podatke o številu dni, ko je denar zadržan na banki in zneske, ki ga iz posamezne regije dnevno nakazujejo.

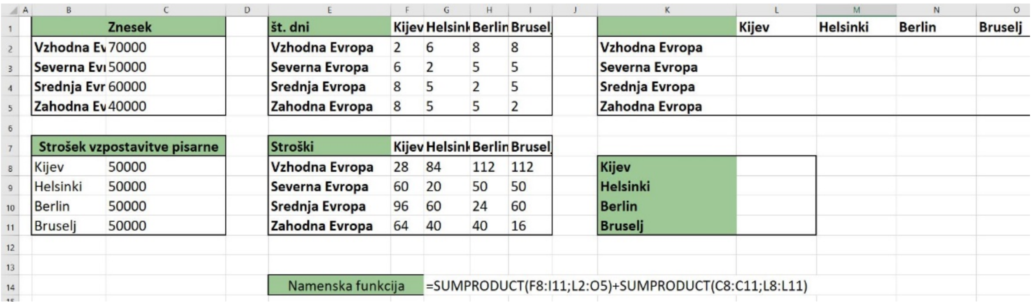
Slika 91: Vnos podatkov o transakcijah, številu dni in izračun stroškov

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | **Znesek** | | **št. dni** | **Kijev** | **Helsinki** | **Berlin** | **Bruselj** |
| 2 | | **Vzhodna Evropa** | 70000 | | **Vzhodna Evropa** | 2 | 6 | 8 | 8 |
| 3 | | **Severna Evropa** | 50000 | | **Severna Evropa** | 6 | 2 | 5 | 5 |
| 4 | | **Srednja Evropa** | 60000 | | **Srednja Evropa** | 8 | 5 | 2 | 5 |
| 5 | | **Zahodna Evropa** | 40000 | | **Zahodna Evropa** | 8 | 5 | 5 | 2 |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | **Strošek vzpostavitve pisarne** | | | **Stroški** | **Kijev** | **Helsinki** | **Berlin** | **Bruselj** |
| 8 | | Kijev | 50000 | | **Vzhodna Evropa** | =$C$2*F2*0,0002 | =$C$2*G2*0,0002 | =$C$2*H2*0,0002 | =$C$2*I2*0,0002 |
| 9 | | Helsinki | 50000 | | **Severna Evropa** | =$C$3*F3*0,0002 | =$C$3*G3*0,0002 | =$C$3*H3*0,0002 | =$C$3*I3*0,0002 |
| 10 | | Berlin | 50000 | | **Srednja Evropa** | =$C$4*F4*0,0002 | =$C$4*G4*0,0002 | =$C$4*H4*0,0002 | =$C$4*I4*0,0002 |
| 11 | | Bruselj | 50000 | | **Zahodna Evropa** | =$C$5*F5*0,0002 | =$C$5*G5*0,0002 | =$C$5*H5*0,0002 | =$C$5*I5*0,0002 |

Izračun stroškov naredimo tako, da pomnožimo prvo celico posameznega mesta s prvo celico iz tabele z zneski, ki jih regije dnevno plačujejo. Oboje pomnožimo z 0,0002 (zaradi 0,02 % obresti), za ostale tri regije pa enostavno povlečemo formulo do konca tabele s stroški. Ko je tabela izpolnjena, pripravimo še tabelo za odločitvene spremenljivke o transakcijah ($x_{ij}$) (tabela naj bo enaka kot sta tabeli za število dni in stroške, le da jo pustimo prazno) in vzpostavitvi trezorjev ($y_j$).

Namenska funkcija predstavlja vsoto produktov stroškov za posamezno transakcijo in odločitveno spremenljivko ter vsoto stroška vzpostavitve trezorjev ter odločitveno spremenljivko. Da z enim ukaznim nizom dobimo vsoto produktov uporabimo funkcijo *SUMPRODUCT* v Excelu.

Slika 92: Vnos namenske funkcije



| | Znesek |
|---|---|
| Vzhodna Ev | 70000 |
| Severna Ev | 50000 |
| Srednja Evr | 60000 |
| Zahodna Ev | 40000 |

| št. dni | Kijev | Helsink | Berlin | Brusel |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 2 | 6 | 8 | 8 |
| Severna Evropa | 6 | 2 | 5 | 5 |
| Srednja Evropa | 8 | 5 | 2 | 5 |
| Zahodna Evropa | 8 | 5 | 5 | 2 |

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | | | | |
| Severna Evropa | | | | |
| Srednja Evropa | | | | |
| Zahodna Evropa | | | | |

| Strošek vzpostavitve pisarne | |
|---|---|
| Kijev | 50000 |
| Helsinki | 50000 |
| Berlin | 50000 |
| Bruselj | 50000 |

| Stroški | Kijev | Helsink | Berlin | Brusel |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 28 | 84 | 112 | 112 |
| Severna Evropa | 60 | 20 | 50 | 50 |
| Srednja Evropa | 96 | 60 | 24 | 60 |
| Zahodna Evropa | 64 | 40 | 40 | 16 |

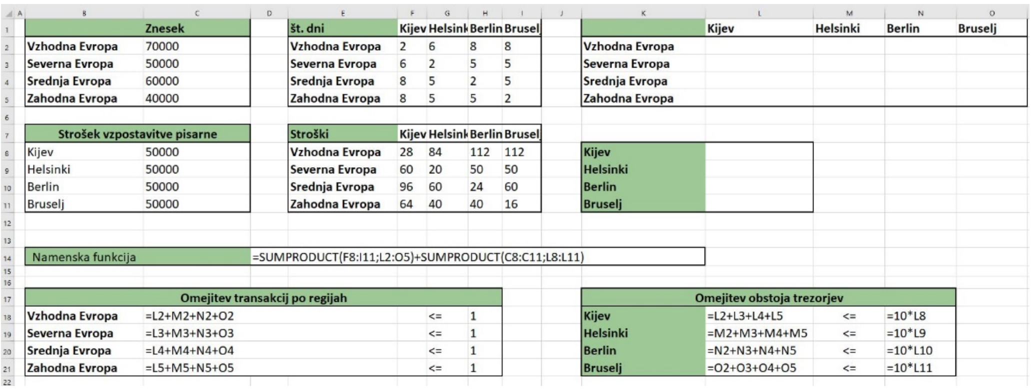
| | |
|---|---|
| Kijev | |
| Helsinki | |
| Berlin | |
| Bruselj | |

| | |
|---|---|
| Namenska funkcija | =SUMPRODUCT(F8:I11;L2:O5)+SUMPRODUCT(C8:C11;L8:L11) |

Prva vrsta omejitev pri problemu trezorja so omejitve glede transakcij po regijah. Vsaka regija lahko denar nakazuje le preko enega trezorja. Vsota odločitvenih spremenljivk po posameznih regijah mora biti enaka 1.

Regija ne more nakazati denarja preko trezorja, ki ne obstaja, zato dodamo omejitev, ki pravi, da je vsota transakcij v trezorju manjša ali enaka $n \cdot x_{ij}$.

Slika 93: Vnos omejitev glede transakcij po regijah, vnos omejitev obstoja pisarn (leva stran neenačbe) in vnos omejitev obstoja trezorjev (desna stran neenačbe)



| | Znesek |
|---|---|
| Vzhodna Evropa | 70000 |
| Severna Evropa | 50000 |
| Srednja Evropa | 60000 |
| Zahodna Evropa | 40000 |

| št. dni | Kijev | Helsink | Berlin | Brusel |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 2 | 6 | 8 | 8 |
| Severna Evropa | 6 | 2 | 5 | 5 |
| Srednja Evropa | 8 | 5 | 2 | 5 |
| Zahodna Evropa | 8 | 5 | 5 | 2 |

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | | | | |
| Severna Evropa | | | | |
| Srednja Evropa | | | | |
| Zahodna Evropa | | | | |

| Strošek vzpostavitve pisarne | |
|---|---|
| Kijev | 50000 |
| Helsinki | 50000 |
| Berlin | 50000 |
| Bruselj | 50000 |

| Stroški | Kijev | Helsink | Berlin | Brusel |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 28 | 84 | 112 | 112 |
| Severna Evropa | 60 | 20 | 50 | 50 |
| Srednja Evropa | 96 | 60 | 24 | 60 |
| Zahodna Evropa | 64 | 40 | 40 | 16 |

| | |
|---|---|
| Kijev | |
| Helsinki | |
| Berlin | |
| Bruselj | |

| | |
|---|---|
| Namenska funkcija | =SUMPRODUCT(F8:I11;L2:O5)+SUMPRODUCT(C8:C11;L8:L11) |

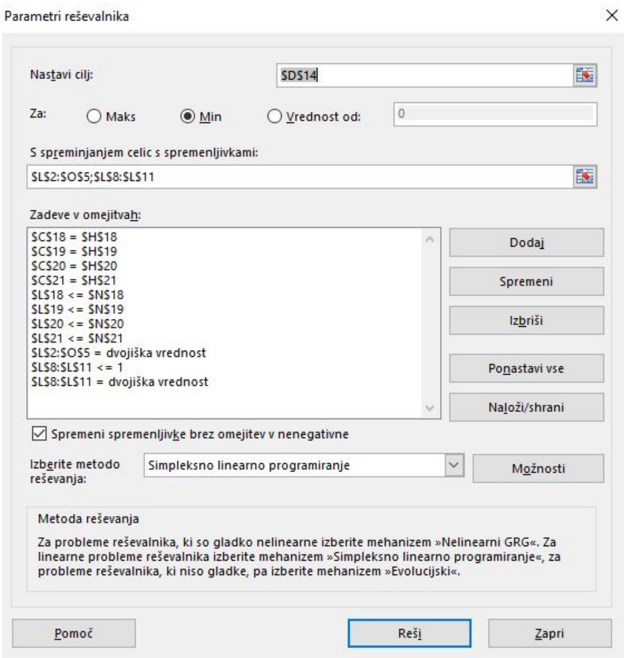
| Omejitev transakcij po regijah | | | |
|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | =L2+M2+N2+O2 | <= | 1 |
| Severna Evropa | =L3+M3+N3+O3 | <= | 1 |
| Srednja Evropa | =L4+M4+N4+O4 | <= | 1 |
| Zahodna Evropa | =L5+M5+N5+O5 | <= | 1 |

| Omejitev obstoja trezorjev | | | |
|---|---|---|---|
| Kijev | =L2+L3+L4+L5 | <= | =10*L8 |
| Helsinki | =M2+M3+M4+M5 | <= | =10*L9 |
| Berlin | =N2+N3+N4+N5 | <= | =10*L10 |
| Bruselj | =O2+O3+O4+O5 | <= | =10*L11 |

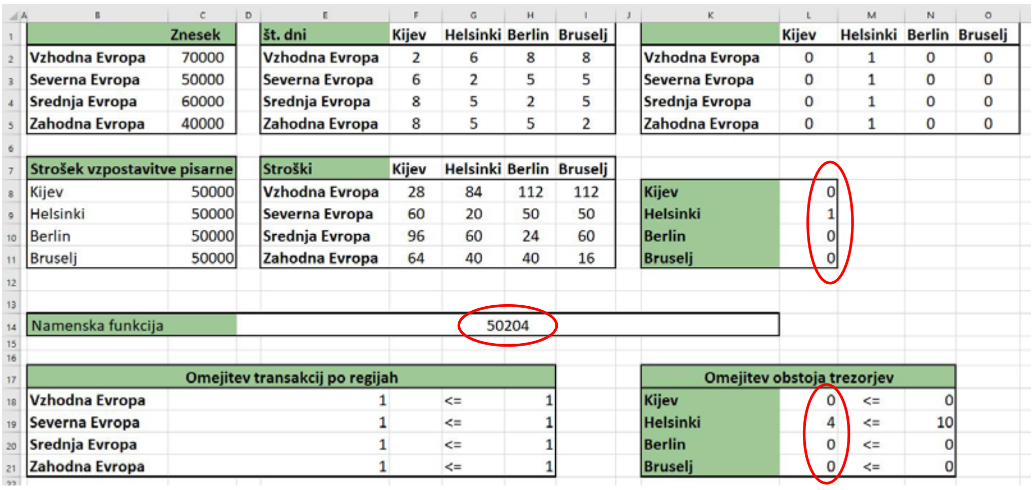
Ko so vsi podatki pripravljeni, vnesemo pravilne parametre v Reševalnik. Cilj nastavimo na celico, v kateri je definirana formula za namensko funkcijo. Označimo, da želimo poiskati minimum funkcije.

V polje za spreminjanje celic vnesemo obe tabeli, ki sta pripravljeni za odločitvene spremenljivke. Prav tako smo pozorni, da v omejitvah za obe tabeli označimo, da gre za binarne odločitvene spremenljivke. Kot metodo reševanja izberemo simpleksno linearno programiranje.

Slika 94: Vnos parametrov v Reševalnik




Slika 95: Rešitve



| | Znesek |
|---|---|
| Vzhodna Evropa | 70000 |
| Severna Evropa | 50000 |
| Srednja Evropa | 60000 |
| Zahodna Evropa | 40000 |

| št. dni | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 2 | 6 | 8 | 8 |
| Severna Evropa | 6 | 2 | 5 | 5 |
| Srednja Evropa | 8 | 5 | 2 | 5 |
| Zahodna Evropa | 8 | 5 | 5 | 2 |

| | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Severna Evropa | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Srednja Evropa | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Zahodna Evropa | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Strošek vzpostavitve pisarne | |
|---|---|
| Kijev | 50000 |
| Helsinki | 50000 |
| Berlin | 50000 |
| Bruselj | 50000 |

| Stroški | Kijev | Helsinki | Berlin | Bruselj |
|---|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 28 | 84 | 112 | 112 |
| Severna Evropa | 60 | 20 | 50 | 50 |
| Srednja Evropa | 96 | 60 | 24 | 60 |
| Zahodna Evropa | 64 | 40 | 40 | 16 |

| | |
|---|---|
| Kijev | 0 |
| Helsinki | 1 |
| Berlin | 0 |
| Bruselj | 0 |

| | |
|---|---|
| Namenska funkcija | 50204 |

| Omejitev transakcij po regijah | | | |
|---|---|---|---|
| Vzhodna Evropa | 1 | <= | 1 |
| Severna Evropa | 1 | <= | 1 |
| Srednja Evropa | 1 | <= | 1 |
| Zahodna Evropa | 1 | <= | 1 |

| Omejitev obstoja trezorjev | | | |
|---|---|---|---|
| Kijev | 0 | <= | 0 |
| Helsinki | 4 | <= | 10 |
| Berlin | 0 | <= | 0 |
| Bruselj | 0 | <= | 0 |

Podjetje naj odpre trezor v Helsinkih. Vrednost celice L19 je namreč 1. Vse regije naj nakazujejo denar preko Helsinkov, da bodo stroški najmanjši. Stroški bodo v tem primeru 50.204 €.

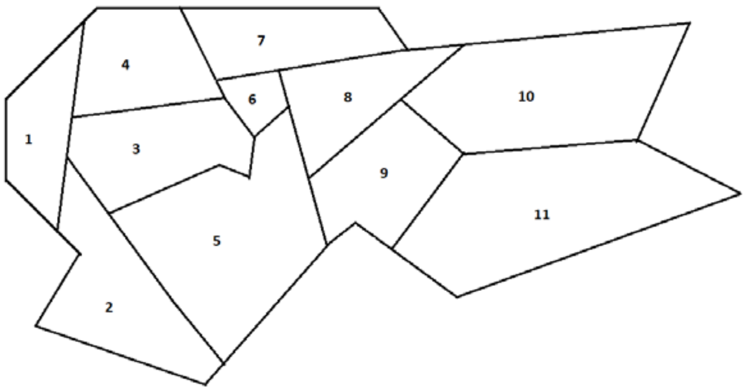
## 6.6 Lokacijski problem[48]

Linearno programiranje se izkaže kot koristno tudi v primeru, ko je treba na različne, v naprej razdeljene regije, postaviti kakšen servisni center (gasilski dom, zdravstveni dom, policijo), odgovorne ljudi (varnostnike, reševalce) ali pa na primer različno opremo (defibrilator, gasilni aparat).

**Primer 45:**

V mestu se odločajo za postavitev gasilskih domov. Mesto je razdeljeno na 11 različnih četrti, kot je to prikazano na spodnji sliki.

Slika 96: Mestne četrti




Gasilski domovi so lahko postavljeni v katerikoli mestni četrti. Vsaka postaja lahko v primeru naravnih nesreč oskrbi četrt, v kateri je postavljena in sosednje četrti (četrti, na katere meji). Cilj mesta je postaviti minimalno število gasilskih domov, ki bodo vseeno sposobne skrbeti za vse četrti v mestu.

### *Določitev odločitvenih spremenljivk*

Določiti je potrebno, v katerih mestnih četrteh je smiselno zgraditi gasilski dom:

$$x_j = \begin{cases} 1;\ gasilski\ dom\ postavijo \\ 0;\ gasilskega\ doma\ ne\ postavijo \end{cases};\quad j = (1, 2, \dots, 11)$$

[48] Facility location problem

### *Določitev namenske funkcije*

Namenska funkcija predstavlja skupno število gasilskih domov, ki naj jih postavijo v mestu:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

Ker je cilj minimalno število gasilskih domov, iščemo minimum namenske funkcije:

$$\min z(x_j) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

### *Določitev omejitev*

Pri postavitvi gasilskih domov je potrebno paziti, da bodo vse mestne četrti pokrite vsaj z enim gasilskim domom. Gasilski dom lahko v primeru naravne nesreče oskrbi četrt v katerem stoji in njene sosednje četrti (glede na sliko mesta):

- četrt 1 ima kot sosednje četrti 2, 3 in 4, torej mora biti vsota štirih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 1 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$$

- četrt 2 ima kot sosednje četrti 1, 3, 4 in 5, torej mora biti vsota štirih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 2 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$$

- četrt 3 ima kot sosednje četrti 1, 2, 4, 5 in 6, torej mora biti vsota šestih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 3 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

- četrt 4 ima kot sosednje četrti 1, 3, 6 in 7, torej mora biti vsota petih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 4 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1$$

- četrt 5 ima kot sosednje četrti 2, 3, 6, 8 in 9, torej mora biti vsota šestih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 5 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1$$

- četrt 6 ima kot sosednje četrti 3, 4, 5, 7 in 8, torej mora biti vsota šestih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 6 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

- četrt 7 ima kot sosednje četrti 4, 6 in 8, torej mora biti vsota štirih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 7 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

- četrt 8 ima kot sosednje četrti 5, 6, 7, 9 in 10, torej mora biti vsota šestih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 8 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1$$

- četrt 9 ima kot sosednje četrti 5, 8, 10 in 11, torej mora biti vsota petih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 9 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1$$

- četrt 10 ima kot sosednje četrti 8, 9 in 11, torej mora biti vsota štirih četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 10 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1$$

- četrt 11 ima kot sosednji četrti 9 in 10, torej mora biti vsota treh četrti enaka ali večja od 1, da bo četrt 11 pokrita z vsaj enim gasilskim domom:

$$x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1$$

Preden zaključimo linearni program, zapišemo še pogoj o binarnosti odločitvenih spremenljivk:

$$x_j = \{0,1\};\ \ j = (1, 2, 3, \dots .11)$$

Linearni program danega lokacijskega problema je:

$$\min z(x_j) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

pri omejitvah:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
&x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\
&x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\
&x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\
&x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\
&x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\
&x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \\
&x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1
\end{aligned}$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1$$

$$x_j = \{0,1\}; \;\; j = (1, 2, 3, \dots, 11)$$

### 6.6.1 Reševanje lokacijskega problema s programom LINGO

Linearni program zapišemo v sintaksi programa:

```
!Namenska funkcija;
min = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 +
x11;
!Omejitve;
[Obmocje1] x1 + x2 + x3 + x4 >= 1;
[Obmocje2] x1 + x2 + x3 + x5 >=1;
[Obmocje3] x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 >= 1;
[Obmocje4] x1 + x3 + x4 + x6 + x7 >= 1;
[Obmocje5] x2 + x3 + x5 + x6 + x8 + x9 >= 1;
[Obmocje6] x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 >= 1;
[Obmocje7] x4 + x6 + x7 + x8 >= 1;
[Obmocje8] x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 >= 1;
[Obmocje9] x5 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 1;
[Obmocje10] x8 + x9 + x10 + x11 >= 1;
[Obmocje11] x9 + x10 + x11 >= 1;
!Pogoj binarnosti;
@BIN(x1); @BIN(x2); @BIN(x3); @BIN(x4);
@BIN(x5); @BIN(x6); @BIN(x7); @BIN(x8);
@BIN(x9);  @BIN(x10); @BIN(x11);
```

Poročilo o rešitvi lokacijskega problema:

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              3.000000
  Objective bound:                              3.000000
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                      PILP


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        1.000000            1.000000
                                    X2        0.000000            1.000000
                                    X3        0.000000            1.000000
                                    X4        1.000000            1.000000
                                    X5        0.000000            1.000000
                                    X6        0.000000            1.000000
                                    X7        0.000000            1.000000
                                    X8        0.000000            1.000000
                                    X9        1.000000            1.000000
                                   X10        0.000000            1.000000
                                   X11        0.000000            1.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        3.000000           -1.000000
                             OBMOCJE1        1.000000            0.000000
                             OBMOCJE2        0.000000            0.000000
                             OBMOCJE3        1.000000            0.000000
                             OBMOCJE4        1.000000            0.000000
                             OBMOCJE5        0.000000            0.000000
                             OBMOCJE6        0.000000            0.000000
                             OBMOCJE7        0.000000            0.000000
                             OBMOCJE8        0.000000            0.000000
                             OBMOCJE9        0.000000            0.000000
                            OBMOCJE10        0.000000            0.000000
                            OBMOCJE11        0.000000            0.000000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** namenska funkcija v tem primeru predstavlja število gasilskih domov, ki jih morajo v mestu postaviti, da bodo sposobni oskrbeti vse mestne četrti. Mesto potrebuje 3 gasilske domove.

***Vrednost***: predstavlja optimalno odločitev v katerih mestnih četrteh naj gasilski domovi stojijo. Domovi se naj postavijo v četrti, ki imajo v rešitvi vrednost 1. Kjer je vrednost 0, gasilskih domov ni smiselno postavljati. Optimalna razporeditev gasilskih domov bi bila tako v mestnih četrteh 1, 4 in 9.

***Dopolnilna spremenljivka:*** definira, ali za katero izmed mestnih četrti v optimalni postavitvi skrbi več gasilskih domov. V danem primeru za mestne četrti 1, 3 in 4 skrbi več kot samo 1 gasilski dom.

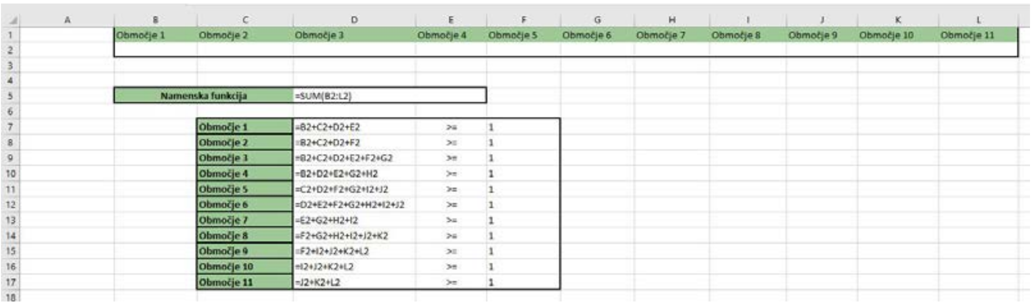
### 6.6.2 Reševanje lokacijskega problema s programom Excel

Podatkov pri lokacijskem problemu nimamo, torej v Excelov delovni list pripravimo le tabelo za odločitvene spremenljivke.

Namenska funkcija je v tem primeru vsota vseh postavljenih gasilskih domov, kar lahko preprosto vnesemo z ukazom *SUM* in označitvijo vseh celic, pripravljenih za odločitvene spremenljivke.

Problem ima 11 omejitev, za vsako mestno četrt posebej, zato vnesemo še te. Na desni strani neenačb vnesemo vsoto mestne četrti in njenih sosednjih četrti.

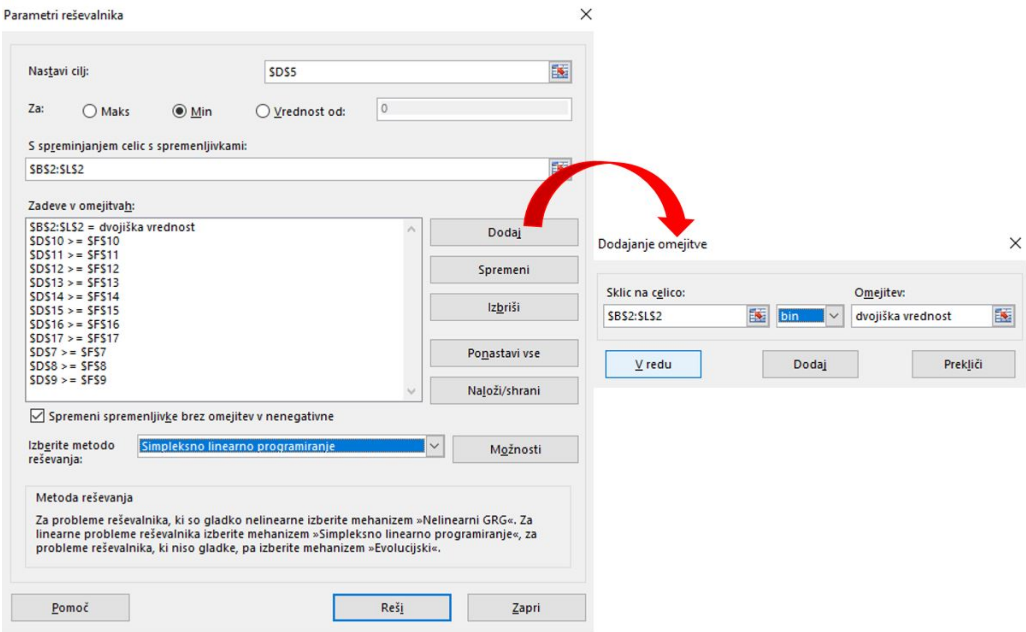
Slika 97: Priprava za reševanje lokacijskega problema v programu Excel



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Območje 1 | Območje 2 | Območje 3 | Območje 4 | Območje 5 | Območje 6 | Območje 7 | Območje 8 | Območje 9 | Območje 10 | Območje 11 |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | Namenska funkcija | | =SUM(B2:L2) | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | Območje 1 | =B2+C2+D2+E2 | >= | 1 | | | | | | |
| 8 | | | Območje 2 | =B2+C2+D2+F2 | >= | 1 | | | | | | |
| 9 | | | Območje 3 | =B2+C2+D2+E2+F2+G2 | >= | 1 | | | | | | |
| 10 | | | Območje 4 | =B2+D2+E2+G2+H2 | >= | 1 | | | | | | |
| 11 | | | Območje 5 | =C2+D2+F2+G2+I2+J2 | >= | 1 | | | | | | |
| 12 | | | Območje 6 | =D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2 | >= | 1 | | | | | | |
| 13 | | | Območje 7 | =E2+G2+H2+I2 | >= | 1 | | | | | | |
| 14 | | | Območje 8 | =F2+G2+H2+I2+J2+K2 | >= | 1 | | | | | | |
| 15 | | | Območje 9 | =F2+I2+J2+K2+L2 | >= | 1 | | | | | | |
| 16 | | | Območje 10 | =I2+J2+K2+L2 | >= | 1 | | | | | | |
| 17 | | | Območje 11 | =J2+K2+L2 | >= | 1 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | |

Odpremo vnosno okno Reševalnika. Pravilno nastavimo celico za namensko funkcijo. V polje za spreminjanje celic vnesemo celice tabele, pripravljene za odločitvene spremenljivke. Prav tako v omejitvah določimo, da morajo rešitve zavzemati binarne vrednosti. Za reševanje izberemo simpleksno linearno programiranje.

Slika 98: Vnos parametrov v Reševalnik

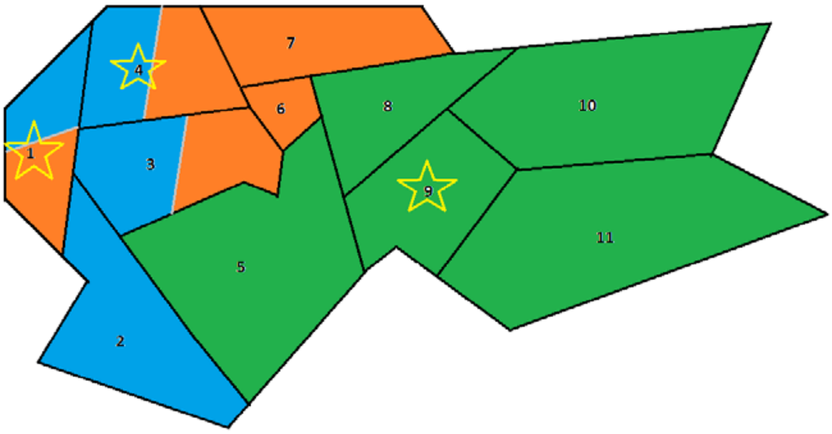


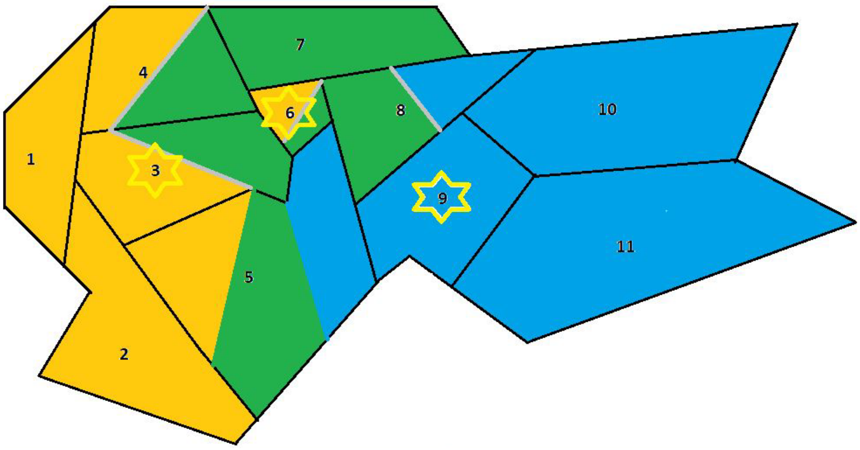

Slika 99: Rešitev lokacijskega problema

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Območje 1 | Območje 2 | Območje 3 | Območje 4 | Območje 5 | Območje 6 | Območje 7 | Območje 8 | Območje 9 | Območje 10 | Območje 11 |
| 2 | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | Namenska funkcija | | 3 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | Območje 1 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 8 | | | Območje 2 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 9 | | | Območje 3 | 2 | >= | 1 | | | | | | |
| 10 | | | Območje 4 | 2 | >= | 1 | | | | | | |
| 11 | | | Območje 5 | 3 | >= | 1 | | | | | | |
| 12 | | | Območje 6 | 3 | >= | 1 | | | | | | |
| 13 | | | Območje 7 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 14 | | | Območje 8 | 2 | >= | 1 | | | | | | |
| 15 | | | Območje 9 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 16 | | | Območje 10 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 17 | | | Območje 11 | 1 | >= | 1 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | |

Optimalna rešitev je postavitev gasilskih domov v mestne četrti 3, 6 in 9. Čeprav se rešitev razlikuje od tiste, ki smo jo dobili v programu LINGO, je prav tako optimalna. V nekaterih primerih je namreč mogočih več rešitev, ki pa so si med seboj enakovredne. V obeh primerih namreč postavimo natanko 3 gasilske domove in ti trije gasilski domovi pokrivajo vse mestne četrti. V obeh rešitvah ni mestne četrti, ki v primeru naravne nesreče ne bi bila pokrita z gasilci. Obe rešitvi smo grafično pokazali na sliki 100.

Slika 100: Grafična rešitev lokacijskega problema




## 6.7 Dodatni primeri

**<u>Primer 46:</u>**

PET SKLADIŠČ

Podjetje Shramba, d.o.o., širi svojo dejavnost in želi kupiti nova skladišča. Njihov finančni oddelek je našel pet skladišč v njihovi bližini, ki bi bila tehnično ustrezna. Direktor je odobril sredstva v višini 29.000 €. Skladišča se razlikujejo glede na velikost. Logisti v podjetju so izračunali, kolikšna bi bila vrednost blaga, ki ga lahko skladiščijo v posameznem skladišču. Podatke o ceni skladišč in vrednosti uskladiščenega blaga prikazuje tabela.

| | Skladišče 1 | Skladišče 2 | Skladišče 3 | Skladišče 4 | Skladišče 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cena nakupa [€] | 3.000 | 6.000 | 12.000 | 8.500 | 5.400 |
| Vrednost blaga [€] | 4.120 | 3.524 | 75.000 | 25.000 | 26.410 |

Katera skladišča naj podjetje kupi, da bo vrednost blaga, ki ga bodo uskladiščili, največja? Pri tem upoštevajte, da v primeru nakupa skladišča 1, ne bodo kupili skladišča 4, saj sta lokacijsko preveč narazen. Kolikšna bo vrednost blaga, ki ga bodo po oceni logistov lahko uskladiščili v podjetju? Jim bo pri tem ostalo kaj kapitala, ki ga imajo na voljo za investicijo?

**Rešitev:**

Podjetje Shramba, d.o.o., naj kupi skladišča 3, 4 in 5. Vrednost blaga, ki ga lahko uskladiščijo pri optimalnem nakupu skladišč znaša 126.410 €. Ob nakupu jim bo ostalo 3.100 € neporabljenih sredstev.

**<u>Primer 47:</u>**

TRI TRGOVINE

Trgovec Sadjar, s.p., se želi širiti na nove lokacije. Ogledal si je prostore na treh različnih lokacijah. Za nakup je rezerviral sredstva v višini 25.000 €. Vsi trije prostori, ki bi želi kupiti, so potrebni obnove. Trgovec se želi lotiti v dveh fazah. V prvi fazi bo zamenjal vsa okna in vrata ter obnovil vse stene. Za prvo fazo investicije lahko nameni 22.000 €. V drugi fazi pa mora vse prostore še opremiti, za kar je rezerviral sredstva v višini 35.000 €. V spodnji tabeli prikazujemo ceno posameznih prostorov ter višino potrebnih investicij v prvi in drugi fazi. Cilj trgovca je pridobiti maksimalen prostor za trgovino, saj bi želel imeti velik razpon izdelkov. Katere prostore naj kupi, da bo imel trgovine na največji možni površini? Koliko bo znašala površina kupljenih prostorov? Mu bo pri nakupu in obnovi ostalo kaj sredstev?

| | Prostor 1 | Prostor 2 | Prostor 3 |
|---|---|---|---|
| Nakup [€] | 11.000 | 12.500 | 13.250 |
| Stroški prve faze [€] | 8.400 | 7.300 | 11.100 |
| Stroški druge faze [€] | 8.200 | 9.500 | 9.000 |
| Površina prostora [m$^3$] | 70 | 112 | 95 |

**Rešitev:**

Trgovec naj investira v nakup prostorov 1 in 2. Pri tem bo imel na voljo prostor v izmeri 182 m$^3$. Pri nakupu mu bo ostalo 1.500 € sredstev, v prvi fazi prenove mu bo ostalo 6.300 € in v drugi fazi prenove 17.300 €.

**<u>Primer 48:</u>**

KURIR

Kurir je prejel nalogo, da mora podjetju dostaviti nekaj paketov v enem dnevu. Vseh paketov, ki so pripravljeni na kurirski službi ne more odpeljati, saj je omejen z velikostjo tovornega prostora v kombiju (velikost tovornega prostora je 145 m$^3$). Podjetje je izrazilo željo, da najprej dostavi pakete z največjo vrednostjo blaga, ki je v posameznem paketu. Katere pakete naj kurir dostavi podjetju (podatki o velikosti paketov in vrednosti blaga v njih so prikazani v spodnji tabeli), da bo vrednost paketov za podjetje največja? Bo kurirju v tem primeru ostalo še kaj prostora v tovornem delu kombija?

| | Vrednost paketa [€] | Velikost paketa [m$^3$] |
|---|---|---|
| Paket 1 | 75 | 35 |
| Paket 2 | 120 | 40 |
| Paket 3 | 45 | 25 |
| Paket 4 | 55 | 23 |
| Paket 5 | 112 | 20 |
| Paket 6 | 130 | 75 |

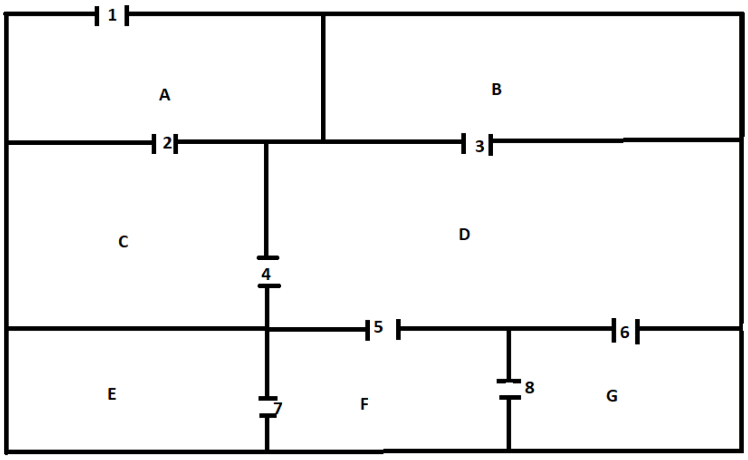
**Rešitev:**

Kurir naj podjetju dostavi pakete 1, 2, 3, 4 in 5, da bo vrednost dostavljenih paketov za podjetje največja. Vrednost paketov v tem primeru bo znašala 407 €. Kurirju bo v tovornem prostoru ostalo 2 $m^3$ prostora.

**Primer 49:**

VARNOSTNIKI V LOKALU

V lokalu, ki ima sedem prostorov, prirejajo večerno zabavo (tloris lokala je prikazan na spodnji sliki). Zaradi varnosti gostov morajo najeti dovolj varnostnikov. Varnostniki bodo stali na vhodih v prostore. Varnostnik lahko pokriva prostora, ki sta povezana s prehodom, na katerem stoji. Cilj podjetja je, da najame čim manjše število varnostnikov, ki bodo vseeno uspeli pokriti vse prostore. Koliko varnostnikov mora podjetje najeti?




**Rešitev:**

Podjetje naj najame 4 varnostnike. Ti morajo stati na vhodih 2, 3, 7 in 8, da bodo pokriti vsi prostori v lokalu.

# 7 TRANSPORTNI PROBLEM[49]

Eden izmed problemov linearnega programiranja je tudi transportni problem. Je problem, kjer je cilj določiti poti med začetnimi vozlišči ali izvori in končnimi vozlišči ali ponori tako, da je skupen strošek prepeljanega materiala najnižji. Strošek transporta je lahko predstavljen z različnimi veličinami, npr. ceno transporta na enoto prepeljanega materiala, časom potovanja iz ene točke v drugo itd.

Poglejmo primer $m$ izvorov, ki jih označimo z $I$ in $n$ ponorov, ki jih označimo s $P$. Izvori so lahko proizvajalci, skladišča ali dobavitelji, ponori pa so porabniki, ki jim dobavitelji dostavijo zahtevano blago. Podatke, ki jih imamo na voljo za dani problem, lahko prikažemo kot je ponazorjeno v spodnji tabeli.

| | Ponori | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Izvori | $P_1$ | $P_2$ | ... | $P_n$ | Kapacitete izvorov $a_i$ |
| $I_1$ | $x_{11}$ $c_{11}$ | $x_{12}$ $c_{12}$ | ... | $x_{1n}$ $c_{1n}$ | $a_1$ |
| $I_2$ | $x_{21}$ $c_{21}$ | $x_{22}$ $c_{22}$ | ... | $x_{2n}$ $c_{2n}$ | $a_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $I_m$ | $x_{m1}$ $c_{m1}$ | $x_{m2}$ $c_{m2}$ | ... | $x_{mn}$ $c_{mn}$ | $a_m$ |
| Kapacitete ponorov $b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ | $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ |

kjer so:

$a_i$- kapacitete izvorov $(i = 1,2 \dots m)$ – količina enot materiala v ponudbi

$b_j$- kapacitete ponorov $(j = 1,2 \dots n)$ - količina enot materiala v povpraševanju

[49] Transportation problem

$c_{ij}$– cene enote transporta med izvorom $I_i$ in ponorom $P_j$ $(i = 1,2, \ldots, m;$

$j = 1,2, \ldots, n)$

$x_{ij}$ - odločitvene spremenljivke, ki predstavljajo količino prepeljanega izdelka iz izvora $I_i$ v ponor $P_j(i = 1,2, \ldots, m; j = 1,2, \ldots, n)$

Želimo čim nižje stroške transporta, torej iščemo minimum namenske funkcije.

Splošni linearni program za transportni problem zapišemo:

- **namenska funkcija**

poiskati je treba takšne vrednosti odločitvenih spremenljivk, da bo vrednost namenske funkcije najnižja:

$$\min z(x_{ij}) \quad = \quad c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

ali krajše zapisano:

$$\min z\left(x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$i = 1,2, \ldots, m \; in \; j = 1,2, \ldots, n$$

- **omejitve** (upoštevati je treba kapacitete povezav med izvori in ponori ter količine enot materiala v ponudbi ter količine enot materiala, po katerem ponori povprašujejo).

Omejitve, vezane na vozlišča, ki predstavljajo izvore (kadar gre za uravnotežen primer in je ponudba enaka povpraševanju):

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m$$

Iz izvora je možno odpeljati natanko toliko enot materiala, kolikor ga je na voljo v dotičnem vozlišču.

Zapišemo še omejitev vsakega ponora, ki so omejeni s količino enot materiala, ki ga potrebujejo (kadar gre za uravnotežen primer in je ponudba enaka povpraševanju):

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n$$

Zapisati je treba še pogoj nenegativnosti, ki določa, da je lahko po določeni povezavi prepeljano le 0 ali pozitivno število enot materiala:

$$x_{ij} \geq 0 \; i = 1,2, \dots, m \text{ in } j = 1,2, \dots, n$$

## 7.1 Osnovni transportni problem

Poglejmo osnovni problem transporta na primeru dveh dobaviteljev in ga zapišimo v obliki linearnega programa.

**Primer 50:**

Dobavitelja D1 in D2 oskrbujeta tri trgovine T1, T2 in T3. Dobavitelj D1 mora dnevno za tri trgovine zagotoviti 50 ton sadja, dobavitelj D2 pa 40 ton sadja. Trgovina T1 naroči dnevno 30 ton sadja, trgovina T2 40 ton sadja, trgovina T3 20 ton sadja. Transportni stroški za enoto (tono) transportiranega sadja od posameznega dobavitelja do posamezne trgovine so prikazani v spodnji tabeli.

| Dobavitelj / Trgovina | $D_1$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $T_1$ | 150 | 220 |
| $T_2$ | 160 | 200 |
| $T_3$ | 200 | 230 |

Transport je treba urediti tako, da bodo transportni stroški najnižji, seveda pa morajo biti ob tem upoštevane vse omejitve problema.

Pripravimo tabelo transportnega problema:

| Ponor / Izvor | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | Kapaciteta izvorov |
|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | 150 $x_{11}$ | 160 $x_{12}$ | 200 $x_{13}$ | $50$ |
| $D_2$ | 220 $x_{21}$ | 200 $x_{22}$ | 230 $x_{23}$ | $40$ |
| Kapaciteta ponorov | $30$ | $40$ | $20$ | $90$ |

Določimo **namensko funkcijo:**

- cena prevoza 1 tone sadja, od dobavitelja D1 do trgovine T1 znaša 150 €, torej cena prevoza $x_{11}$ ton sadja od D1 do T1 znaša 150 $x_{11}$
- cena prevoza 1 tone sadja od D1 do T2 znaša 160 €, torej cena prevoza $x_{12}$ ton sadja od D1 do T2 znaša 160 $x_{12}$
- cena prevoza 1 tone sadja od D1 do T3 znaša 200 €, torej cena prevoza $x_{13}$ ton sadja od D1 do T3 znaša 200 $x_{13}$
- cena prevoza 1 tone sadja od D2 do T1 znaša 220 €, torej cena prevoza $x_{21}$ ton sadja od D2 do T1 znaša 220 $x_{21}$
- cena prevoza 1 tone sadja od D2 do T2 znaša 200 €, torej cena prevoza $x_{22}$ ton sadja od D2 do T2 znaša 200 $x_{22}$
- cena prevoza 1 tone sadja od D2 do T3 znaša 230 €, torej cena prevoza $x_{23}$ ton sadja od D2 do T3 znaša 230 $x_{23}$

Skupni stroški prevoza so $150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23}$.

Namenska funkcija je naslednja:

$$z = 150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23}$$

Skupni stroški morajo biti minimalni, iščemo minimum namenske funkcije:

$$\min z(x_{ij}) = 150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23}$$

**Omejitve problema**:

o Dobavitelj D1:

dobavitelj D1 lahko pripelje trgovini T1 $x_{11}$ ton sadja, trgovini T2 $x_{12}$ ton sadja in trgovini T3 $x_{13}$ ton sadja. Skupaj lahko zagotovi natanko 50 ton sadja:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$

o Dobavitelj D2:

dobavitelj D2 lahko trgovini T1 pripelje $x_{21}$ ton sadja, trgovini T2 $x_{22}$ ton sadja in trgovini T3, $x_{23}$ ton sadja. Skupaj lahko zagotovi natanko 40 ton sadja:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$

o Trgovina T1:

trgovina T1 lahko od dobavitelja D1 sprejme $x_{11}$ ton sadja, od dobavitelja D2 pa $x_{21}$ ton sadja. Skupna količina sadja, ki jo trgovina T1 potrebuje, je natanko 30 ton sadja:

$$x_{11} + x_{21} = 30$$

o Trgovina T2:

trgovina T2 lahko od dobavitelja D1 sprejme $x_{12}$ ton sadja, od dobavitelja D2 pa $x_{22}$ ton sadja. Skupna količina sadja, ki jo trgovina T2 potrebuje, je natanko 40 ton sadja:

$$x_{12} + x_{22} = 40$$

• Trgovina T3:

Dobavitelj D1 transportira v trgovino T3, $x_{13}$ ton sadja. Dobavitelj D2 pa $x_{23}$ ton sadja. Skupna količina sadja, ki jo trgovina T3 potrebuje, je natanko 20 ton sadja:

$$x_{13} + x_{23} = 20$$

Količina prepeljanih enot ne more biti negativna, zato zapišemo še dodaten pogoj, ki omeji odločitvene spremenljivke tako, da lahko zavzamejo le nenegativne vrednosti:

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0$$

ali zapisano krajše

$$x_{ij} \geq 0; i = 1,2 \quad j = 1, 2, 3$$

Celotni linearni program za dani problem:

$$\min z\,(x_{ij}) = 150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23}$$

pri omejitvah:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} = 30$$
$$x_{12} + x_{22} = 40$$
$$x_{13} + x_{23} = 20$$
$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0$$

## 7.2 Grafično reševanje transportnega problema

Grafično lahko rešujemo transportne probleme do razsežnosti $2 \times 3$ (dva dobavitelja, trije odjemalci) oz. $3 \times 2$ (trije dobavitelji, dva odjemalca). Za zgled vzemimo prejšnji problem dveh dobaviteljev. Imamo dobavitelja $D_1$ in $D_2$ ter trgovine $T_1$, $T_2$ in $T_3$. Dani primer je razsežnosti 2 × 3, zato je rešljiv grafično.

V linearnem problemu nastopa 6 odločitvenih spremenljivk. Če želimo problem rešiti grafično, moramo program pretvoriti na samo dve spremenljivki.

Spremenljivko $x_{11}$ označimo z $x$. Spremenljivko $x_{12}$ pa označimo z $y$. Ker so kapacitete izvorov in ponorov v nalogi podane, lahko vse ostale spremenljivke izrazimo s spremenljivkama $x$ in $y$.

| Ponori / Izvori | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | Kapacitete izvorov |
|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | 150<br>$x$ | 160<br>$y$ | 200<br>$(50 - x - y)$ | 50 |
| $D_2$ | 220<br>$30 - x$ | 200<br>$40 - y$ | 230<br>$20 - (50 - x - y) =$<br>$x + y - 30$ | 40 |
| Kapacitete ponorov | 30 | 40 | 20 | 90 |

Poglejmo kako zapisati odločitvene spremenljivke za vsako povezavo danega problema.

Določimo, da je $x_{11} = x$ in $x_{12} = y$. Ker mora biti vsota spremenljivk po povezavah, ki vodijo od dobavitelja D1 enaka 50, za povezavo $x_{13}$ izpeljemo:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$
$$x + y + x_{13} = 50$$
$$x_{13} = 50 - x - y.$$

Enako storimo z vsemi ostalimi povezavami. Vsota odločitvenih spremenljivk po povezavah, ki vodijo v trgovino T1 je enaka 30 enotam:

$$x_{11} + x_{21} = 30$$
$$x + x_{21} = 30$$
$$x_{21} = 30 - x$$

Vsota spremenljivk po povezavah, ki vodijo v trgovino T2 je lahko kvečjemu enaka 40 enotam:

$$x_{12} + x_{22} = 40$$
$$y + x_{22} = 40$$
$$x_{22} = 40 - y$$

Vsota spremenljivk po povezavah, ki vodijo v trgovino T3 je enaka 50 enotam:

$$x_{13} + x_{23} = 20$$
$$(50 - x - y) + x_{23} = 20$$
$$x_{23} = 20 - (50 - x - y) = x + y - 30$$

Zapišemo linearni program s temi, na novo uvedenimi odločitvenimi spremenljivkami. Oblikujmo namensko funkcijo:

$$\begin{aligned} z &= 150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23} \\ &= 150x + 160y + 200(50 - x - y) + 230(30 - x) + 200(40 - y) \\ &\quad + 230(x + y - 30) \\ &= 17700 - 40x - 10y \end{aligned}$$

Iščemo minimum namenske funkcije:

$$\min z(x, y) = 17700 - 40x - 10y$$

Odločitveni spremenljivki $x$ in $y$ morata biti nenegativni, nenegativno pa mora biti tudi število posameznih enot po posamezni poti od izvora $i$ do ponora $j$:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$50 - x - y \geq 0 \Rightarrow -x - y + 50 \geq 0$$

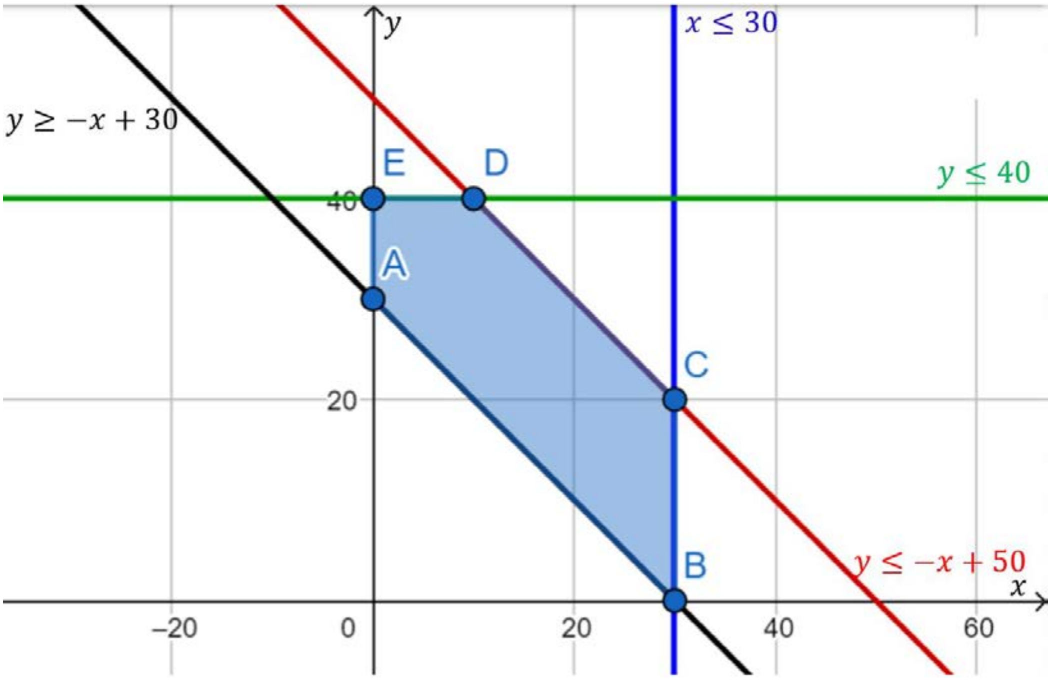
$$30 - x \geq 0 \Rightarrow -x + 30 \Rightarrow 0$$

$$40 - y \geq 0 \Rightarrow -y + 40 \geq 0$$

$$20 - (50 - x - y) \geq 0 \Rightarrow x + y - 30 \geq 0$$

V koordinatni sistem narišemo množico vseh rešitev dobljenega sistema linearnih neenačb:

Slika 101: Grafična rešitev transportnega problema




Namenska funkcija $z = 17700 - 40x - 10y$ doseže minimum v eni izmed ekstremnih točk (oglišč) konveksnega lika $ABCDE$.

Določimo koordinate vseh oglišč konveksnega lika, koordinate točk $A$, $B$ in $C$ lahko razberemo iz grafa:

$$A(0{,}30)$$

$$B(30{,}0)$$

$$E(0{,}40)$$

Točka $C$ je presečišče premic $-x+30=0$ in $-x-y+50=0$. Njene koordinate so $C(30,20)$.

Točka $D$ je presečišče premic $-y+40=0$ in $-x-y+50=0$. Točka $D$ ima koordinate: $D(10,40)$.

Izračunamo vrednost namenske funkcije v vsakem oglišču konveksnega lika:

$$z(A) = 17700 - 40 \cdot 0 - 10 \cdot 30 = 17.400$$

$$z(B) = 17700 - 40 \cdot 30 - 10 \cdot 0 = 16.500$$

$$z(C) = 17700 - 40 \cdot 30 - 10 \cdot 20 = 16.300$$

$$z(D) = 17700 - 40 \cdot 10 - 10 \cdot 40 = 16.900$$

$$z(E) = 17700 - 40 \cdot 0 - 10 \cdot 40 = 17.300$$

Namenska funkcija doseže minimalno vrednost $16.300$ v točki $C(30,20)$. Zato je sadje optimalno transportirati na sledeči način:

| Ponori / Izvori | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | Kapacitete izvorov |
|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | $30$ | $20$ | $50-(30-20)$ | 50 |
| $D_2$ | $30-30$ | $40-20$ | $20-(50-30-20)$ | 40 |
| Kapacitete ponorov | $30$ | $40$ | $20$ | 90 |

| Ponori / Izvori | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ |
|---|---|---|---|
| $D_1$ | 30 | 20 | 0 |
| $D_2$ | 0 | 20 | 20 |

Dobavitelj D1 transportira 30 ton sadja v trgovino T1, 20 ton sadja v trgovino T2 ter 0 ton sadja v trgovino T3.

Dobavitelj D2 transportira 0 ton sadja v trgovino T1, 20 ton sadja v trgovino T2 ter 20 ton sadja v trgovino T3.

Stroški transporta bodo v tem primeru znašali 16.300 €.

## 7.3 Reševanje transportnega problema s programom LINGO

Če v transportnem problemu nastopa več spremenljivk, lahko transportni problem rešimo s pomočjo računalniških programov. V tem poglavju si bomo pogledali, kako rešimo transportni problem s programskim orodjem LINGO. Za zgled vzemimo kar prejšnji primer dveh dobaviteljev. Rešimo naslednji linearni program:

$$\min z(x_{ij}) = 150x_{11} + 160x_{12} + 200x_{13} + 220x_{21} + 200x_{22} + 230x_{23}$$

pri omejitvah:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} = 30$$
$$x_{12} + x_{22} = 40$$
$$x_{13} + x_{23} = 20$$
$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0,$$
$$x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0$$

Rešimo ta linearni program s pomočjo programa LINGO:

```
!Namenska funkcija;
min = 150*x11 + 160*x12 + 200*x13 + 220*x21 + 200*x22 +
230*x23;
!Omejitve dobaviteljev;
[D1] x11 + x12 + x13 = 50;
[D2] x21 + x22 + x23 = 40;
!Omejitve trgovin;
[T1] x11 + x21  = 30;
[T2] x12 + x22  = 40;
[T3] x13 + x23  = 20;
```

Poročilo o rešitvi transportnega problema:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              16300.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                        LP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                     X11        30.00000            0.000000
                                     X12        20.00000            0.000000
                                     X13        0.000000            10.00000
                                     X21        0.000000            30.00000
                                     X22        20.00000            0.000000
                                     X23        20.00000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        16300.00           -1.000000
                                      D1        0.000000            0.000000
                                      D2        0.000000           -40.00000
                                      T1        0.000000           -150.0000
                                      T2        0.000000           -160.0000
                                      T3        0.000000           -190.0000
```

***Vrednost namenske funkcije:*** vrednost namenske funkcije predstavlja minimalne stroške transporta sadja. V danem primeru bodo ti stroški 16.300 €.

***Vrednost*****:** predstavlja vrednosti odločitvenih spremenljivk: $x_{11} = 30$, $x_{12} = 20$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 20$ in $x_{23} = 20$. Te opredeljujejo količino sadja, ki naj bo prepeljano po posameznih povezavah, da bodo pri tem stroški transporta najnižji. Rešitev je enaka kot pri grafičnem reševanju problema.

***Reducirani strošek***: če bi želeli, da se sadje transportira tudi po povezavah $x_{13}$ (da od dobavitelja 1 transportiramo nekaj enot sadja v trgovino 3) in $x_{21}$ (da od dobavitelja 2 transportiramo nekaj enot sadja v trgovino 1), bi se morala cena transporta znižati. V primeru povezave $x_{13}$ za 10 € in v primeru povezave $x_{21}$ za 30 €.

#### 7.3.1.1 Analiza občutljivosti optimalne rešitve transportnega problema

Tudi pri transportnem problemu, ki smo ga spoznali v tem poglavju, lahko izvedemo analizo občutljivosti. Prvo vprašanje, na katerega lahko odgovori tovrstna analiza, je, ali spreminjanje cene transporta 1 enote blaga vpliva na optimalno vrednost dobljene rešitve primarnega linearnega programa. Pri linearnem programiranju to pomeni spreminjanje koeficientov namenske funkcije.

Če pogledamo izpis rešitve problema ugotovimo, da lahko vrednosti določenih koeficientov spreminjamo, ne da bi pri tem vplivali na optimalno vrednost namenske funkcije. Stroški transporta 1 enote materiala med dobaviteljem D2 in trgovino T3 ($x_{23}$) se lahko povišajo za 10 € ter poljubno znižajo. Če bo nova cena transporta 1 enote na tej povezavi poljubna vrednost, manjša od 240 €, ta sprememba cene transporta ne bo vplivala na optimalno vrednost namenske funkcije.

Analiza občutljivosti transportnega problema:

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                                      Objective Coefficient Ranges:

                                   Current        Allowable        Allowable
                      Variable     Coefficient     Increase         Decrease
                           X11        150.0000     30.00000         INFINITY
                           X12        160.0000     10.00000         30.00000
                           X13        200.0000     INFINITY         10.00000
                           X21        220.0000     INFINITY         30.00000
                           X22        200.0000     30.00000         10.00000
                           X23        230.0000     10.00000         INFINITY

                                          Righthand Side Ranges:

                                   Current        Allowable        Allowable
                           Row         RHS         Increase         Decrease
                            D1    50.00000         0.000000         0.000000
                            D2    40.00000         0.000000         0.000000
                            T1    30.00000         0.000000         0.000000
                            T2    40.00000         0.000000         0.000000
                            T3    20.00000         0.000000         0.000000
```

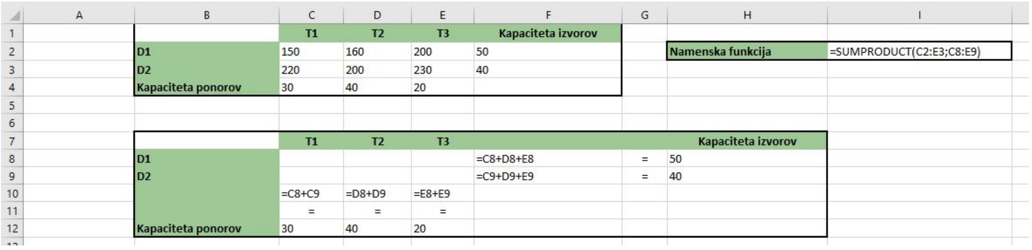
V razdelku **Razpon desnih strani neenačb** vidimo, da spremembe desnih strani neenačb niso dovoljene. To je posledica definicije problema, da so kapacitete posameznih dobaviteljev in trgovin natanko določene. Ponudba in povpraševanje sta enolično določena (to smo tudi zapisali z enačaji). V vsak ponor lahko prispe le natanko določena količina sadja in iz vsakega izvora se lahko odpelje le natanko določena količina sadja.

## 7.4 Reševanje transportnega problema s programom Excel

Na istem transportnem primeru si poglejmo še kako transportni problem rešimo v programu Excel. Najprej na prazen delovni list vnesemo podatke problema (stroške povezav in kapacitete v vozliščih). Pripravimo še razširjeno tabelo, vendar celice (razen kapacitet) pustimo prazne. V prazne celice vnesemo omejitve kapacitet trgovin in dobaviteljev.

V prazno celico vnesemo namensko funkcijo. Spomnimo, da je namenska funkcija vsota produktov med ceno transporta na povezavi in količino, prepeljano po njej. V Excelu uporabimo funkcijo *SUMPRODUCT*. Kot matriko 1 označimo celice, v katerih so definirane cene povezav, kot matriko 2 pa celice, ki so ostale prazne za namen izpisa odločitvenih spremenljivk.

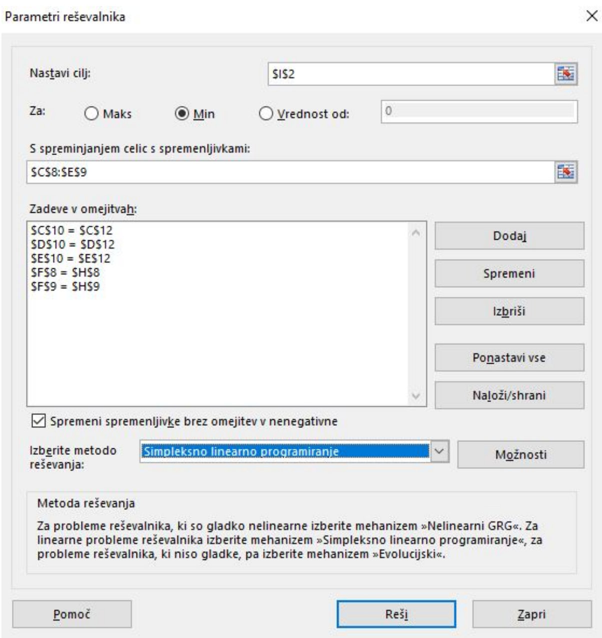
Slika 102: Priprava za reševanje transportnega problema v programu Excel



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | T1 | T2 | T3 | Kapaciteta izvorov | | | |
| 2 | | D1 | 150 | 160 | 200 | 50 | | Namenska funkcija | =SUMPRODUCT(C2:E3;C8:E9) |
| 3 | | D2 | 220 | 200 | 230 | 40 | | | |
| 4 | | Kapaciteta ponorov | 30 | 40 | 20 | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | T1 | T2 | T3 | | | Kapaciteta izvorov | |
| 8 | | D1 | | | | =C8+D8+E8 | = | 50 | |
| 9 | | D2 | | | | =C9+D9+E9 | = | 40 | |
| 10 | | | =C8+C9 | =D8+D9 | =E8+E9 | | | | |
| 11 | | | = | = | = | | | | |
| 12 | | Kapaciteta ponorov | 30 | 40 | 20 | | | | |

Odpremo Reševalnik in vnesemo pravilne parametre.

Slika 103: Vnos parametrov reševalnika




Kot cilj nastavimo celico, kamor smo vnesli formulo za namensko funkcijo (I2). Nastavimo, da želimo namensko funkcijo minimirati. Spreminjamo celice, ki smo jih pustili prazne, vnesemo vse omejitve glede dobaviteljev in trgovin. Kot metodo reševanja nastavimo simpleksno linearno programiranje.

Excel poda rešitve v naslednji obliki (Poročilo o odgovorih):

Celica s cilji (Min)

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost |
|---|---|---|---|
| $I$2 | Namenska funkcija | 0 | 16300 |

Celice s spremenljivkami

| Celica | Ime | Izvirna vrednost | Končna vrednost | Celo število |
|---|---|---|---|---|
| $C$8 | D1 T1 | 0 | 30 | Contin |
| $D$8 | D1 T2 | 0 | 20 | Contin |
| $E$8 | D1 T3 | 0 | 0 | Contin |
| $C$9 | D2 T1 | 0 | 0 | Contin |
| $D$9 | D2 T2 | 0 | 20 | Contin |
| $E$9 | D2 T3 | 0 | 20 | Contin |

Omejitve

| Celica | Ime | Vrednost celice | Formula | Stanje | Rezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$10 | T1 | 30 | $C$10=$C$12 | Vpenjanje | 0 |
| $D$10 | T2 | 40 | $D$10=$D$12 | Vpenjanje | 0 |
| $E$10 | T3 | 20 | $E$10=$E$12 | Vpenjanje | 0 |
| $F$8 | D1 Kapaciteta izvorov | 50 | $F$8=$H$8 | Vpenjanje | 0 |
| $F$9 | D2 Kapaciteta izvorov | 40 | $F$9=$H$9 | Vpenjanje | 0 |

Minimalni stroški prevoza znašajo 16.300 €, v primeru, da dobavitelj D1 zagotovi trgovini T1 30 enot blaga in trgovini T2 20 enot blaga. Dobavitelj D2 pa prepelje 20 enot blaga T2 in 20 enot blaga T3. Vse trgovine prejmejo željeno količino blaga (stolpec Rezerva), prav tako dobavitelji izdajo vso blago, ki ga imajo na voljo.

Excel izpiše tudi poročilo o občutljivosti, kjer lahko opazujemo spremembe koeficientov namenske funkcije:

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$8 | D1 T1 | 30 | 0 | 150 | 30 | 1E+30 |
| $D$8 | D1 T2 | 20 | 0 | 160 | 10 | 30 |
| $E$8 | D1 T3 | 0 | 10 | 200 | 1E+30 | 10 |
| $C$9 | D2 T1 | 0 | 30 | 220 | 1E+30 | 30 |
| $D$9 | D2 T2 | 20 | 0 | 200 | 30 | 10 |
| $E$9 | D2 T3 | 20 | 0 | 230 | 10 | 1E+30 |

Omejitve

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Senca Cena | Omejitev Stran R.H. | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$10 | T1 | 30 | 150 | 30 | 0 | 0 |
| $D$10 | T2 | 40 | 160 | 40 | 0 | 0 |
| $E$10 | T3 | 20 | 190 | 20 | 0 | 0 |
| $F$8 | D1 Kapaciteta izvorov | 50 | 0 | 50 | 0 | 0 |
| $F$9 | D2 Kapaciteta izvorov | 40 | 40 | 0 | 0 | 0 |

Spremembe cen na posameznih povezavah razberemo iz tabele **Celice s spremenljivkami**. Na povezavi D1-T2 se lahko cena transporta na povezavi poveča za 10 € in zmanjša za 30 €. Cena prevoza na tej povezavi se lahko giblje na intervalu [130, 170] €, da bo optimalna rešitev ostala enaka. Enako lahko interpretiramo še ostale povezave.

Podrobneje si poglejmo vrstici za povezavo D1-T3 in D2-T1:

| Celica | Ime | Končna Vrednost | Zmanjšan Strošek | Cilj Koeficient | Dovoljeno Povečaj | Dovoljeno Zmanjšaj |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$8 | D1 T3 | 0 | 10 | 200 | 1E+30 | 10 |
| $C$9 | D2 T1 | 0 | 30 | 220 | 1E+30 | 30 |

Cena stroška pri povezavi D1-T3 bi se morala zmanjšati za 10 €, če bi želeli, da se transport sadja opravi na tej poti. Zato je tudi dovoljeno zmanjšanje za 10 €. Dovoljeno povečanje cene je neskončno, saj povečanje cene ne bo imelo vpliva na končni rezultat. Razlog je že postavljena previsoka cena, da bi se pot uvrstila v optimalno vrednost.

Enako je tudi s povezavo D2-T1, ki se ne pojavi v optimalni rešitvi. Če bi želeli, da je del rešitve, bi se cena transporta morala zmanjšati za 30 €, kar je tudi največje dovoljeno zmanjšanje, da se optimalna rešitev ne spremeni. Višanje cene pa nima vpliva na končno rešitev.

V tabeli **Omejitve** vidimo, da spremembe niso dovoljene, kar je posledica natančno določenih kapacitet na strani dobaviteljev in trgovin.

## 7.5 Degeneracija transportnega problema

**Primer 51:**

Proizvajalca A in B proizvedeta prvi 6 in drugi 8 enot istega blaga in oskrbujeta s tem blagom potrošnika P in Q, ki potrebujeta en 8 in drugi 6 enot blaga. Kako naj organizirajo transport od proizvajalcev A in B do potrošnikov P in Q, da bosta potrošnika dobila naročeno blago in da bodo transportni stroški najmanjši, če poznamo transportne stroške za prevoz 1 enote blaga na posameznih relacijah in so podani v spodnji tabeli.

| | P | Q | Proizvodnja [enot] |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 6 | 3 | 6 |
| Proizvajalec B | 2 | 5 | 8 |
| Naročila [enot] | 8 | 6 | 14 |

V tem primeru je dovolj, da vpeljemo le eno odločitveno spremenljivko $x$. Iskane količine vnesemo v tabelo:

| | P | Q | Proizvodnja |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | $x$<br>6 | $6-x$<br>3 | 6 |
| Proizvajalec B | $8-x$<br>2 | $x$<br>5 | 8 |
| Naročila | 8 | 6 | 14 |

Omejitve problema so:

$$x \geq 0$$

$$6 - x \geq 0 \rightarrow \ x \leq 6$$

$$8 - x \geq 0 \ \rightarrow x \leq 8$$

Namenska funkcija, ki jo želimo minimirati je:

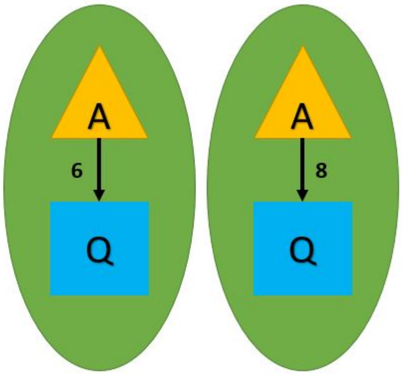
$$\min z(x) = 6x + 3(6 - x) + 2(8 - x) + 5x = 34 + 6x$$

Iz zapisanih omejitev lahko enostavno zapišemo eno samo omejitev: $0 \leq x \leq 6$.

Po teoriji linearnega programiranja poiščemo minimum namenske funkcije $z(x) = 34 + 6x$ v eni izmed ekstremnih točk. V danem primeru je ta ekstremna točka $x = 0$. Optimalna rešitev problema je torej pri $x = 0$, in sicer takrat zavzame namenska funkcija vrednost 34. Stroški so torej enaki 34 denarnih enot.

Pri tej vrednosti odločitvene spremenljivke $x$ so doseženi najnižji transportni stroški takrat, kadar proizvajalec A oskrbuje potrošnika Q, proizvajalec B pa potrošnika P.

Slika 104: Rešitev degeneriranega transportnega problema




Proizvajalec A naj se poveže s potrošnikom Q, proizvajalec B pa s P. Takšnemu razpadu sistema rečemo tudi degeneracija transportnega problema.

Seveda pa lahko tudi ta problem rešimo s pomočjo LINGA. Linearni program takšnega problema lahko v LINGO zapišemo kar v klasični obliki, brez vpeljave nove spremenljivke:

```
!Namenska funkcija;
min = 6*x11 + 3*x12 + 2*x21 + 5*x22;
!Omejitve dobaviteljev;
[Proizvajalec_A] x11 + x12  = 6;
[Proizvajalec_B] x21 + x22  = 8;
[Trgovina_Q] x11 + x21 = 8;
[Trgovina_P] x12 + x22 = 6;
```

Iz LINGO poročila preberemo rešitev, ki sovpada z rešitvijo, dobljeno na analitični način. Proizvajalec A sam oskrbuje kupca Q in dostavi vseh šest enot. Enako je tudi s proizvajalcem B in kupcem P.

Poročilo o rešitvi transportnega problema:

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              34.00000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                        LP

                          Variable           Value        Reduced Cost
                               X11        0.000000            0.000000
                               X12        6.000000            0.000000
                               X21        8.000000            0.000000
                               X22        0.000000            6.000000

                               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                 1        34.00000           -1.000000
                    PROIZVAJALEC_A        0.000000           -3.000000
                    PROIZVAJALEC_B        0.000000            1.000000
                        TRGOVINA_Q        0.000000           -3.000000
                        TRGOVINA_P        0.000000            0.000000
```

## 7.6 Večje število rešitev transportnega problema

Obstajajo tudi primeri, ko ima transportni problem več rešitev ali neskončno mnogo rešitev.

**Primer 52:**

Dva proizvajalca – proizvajalec A in B oskrbujeta dva potrošnika – P in Q. Podatki o cenah transporta od proizvajalcev do potrošnikov so podani v tabeli.

| | P | Q | Proizvodnja [število kosov] |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 1 | 2 | 9 |
| Proizvajalec B | 3 | 4 | 16 |
| Naročila [število kosov] | 6 | 19 | 25 |

Vpeljemo spremenljivko $x$ ter prikažemo iskane transportne količine v tabeli.

| | P | Q | Proizvodnja |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 1<br>$x$ | 2<br>$9-x$ | 9 |
| Proizvajalec B | 3<br>$6-x$ | 4<br>$10+x$ | 16 |
| Naročila | 6 | 19 | 25 |

S pomočjo zgornje tabele zapišemo omejitve problema, ki so sledeče:

$$x \geq 0$$
$$9-x \geq 0 \ \rightarrow x \leq 9$$
$$6-x \geq 0 \ \rightarrow x \leq 6$$
$$10+x \geq 0 \ \rightarrow x \geq -10$$

Zapisane neenačbe lahko združimo v eno neenačbo:

$$0 \leq x \leq 6.$$

Minimum namenske funkcije linearnega programa predstavljenega transportnega problema je:

$$\min z(x) = x + 2(9-x) + 3(6-x) + 4(10+x)$$
$$= x + 18 - 2x + 18 - 3x + 40 + 4x = 76$$

Po poenostavitvi namenske funkcije pridemo do končne številčne vrednosti - $\min z = 76$. Namenska funkcija je neodvisna od odločitvene spremenljivke $x$ in zavzame vrednost 76 pri vsakem $x \in [0,6]$. Predstavljeni transportni problem ima sedem rešitev.

## 7.7 Neuravnoteženi transportni problemi

Vsi transportni problemi do sedaj predstavljeni v gradivu, so bili uravnoteženi transportni problemi. Skupna ponudba je bila v vseh primerih enaka skupnemu povpraševanju. V realnem svetu so takšne situacije, kjer bi bila ponudba v izvorih enaka povpraševanju na ponorih, zelo redke. Večkrat naletimo na primere, ko ti dve količini nista enaki. Takrat govorimo o neuravnoteženih primerih. To se lahko zgodi v dveh primerih. Lahko je količina v izvorih večja od povpraševanja, lahko pa je količina na ponorih večja od ponudbe na izvorih.

V tem gradivu neuravnotežene transportne probleme v procesu grafičnega iskanja rešitve preoblikujemo v uravnotežene probleme. Neuravnoteženi transportni problemi so namreč rešljivi samo s preoblikovanjem v uravnotežene probleme. Kadar takšne probleme rešujemo s pomočjo računalniških programov, preoblikovanja ne izvedemo sami, ampak to stori program v postopku reševanja.

### 7.7.1 Transportni problem, kjer je ponudba večja od povpraševanja

V tem poglavju bomo predstavili kako preoblikujemo neuravnotežen transportni problem, kjer je ponudba večja od povpraševanja, na uravnotežen problem.

**Primer 53:**

Proizvajalca A in B z materialom oskrbujeta potrošnika P in Q. Ponudba, naročila in transportni stroški na posameznih povezavah so podani v spodnji tabeli.

| | P | Q | Proizvodnja [število kosov] |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 4 | 5 | 8 |
| Proizvajalec B | 3 | 6 | 10 |
| Naročila [število kosov] | 5 | 7 | 12\18 |

#### 7.7.1.1 Preoblikovanje problema na uravnoteženi transportni problem

Problem je za grafični način reševanja potrebno preoblikovati v uravnotežen transportni problem, pri katerem je ponudba enaka povpraševanju. V ta namen uvedemo navidezno vozlišče/ponor (potrošnika) S, katerega povpraševanje je enako višini preostanka (viška) ponudbe.

Transport po povezavah, ki vodijo v navidezno vozlišče predstavlja višek ponudbe. Ker se transport po teh povezavah dejansko ne izvede in predstavlja le fiktiven transport, transportnim stroškom enote materiala, ki se prepeljejo po teh povezavah priredimo ceno enako 0. Navideznemu ponoru S pripišemo povpraševanje v višini $18 - 12 = 6$ enot. Dobimo naslednjo tabelo:

| | P | Q | S* | Proizvodnja |
|---|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 4 | 5 | 0 | 8 |
| Proizvajalec B | 3 | 6 | 0 | 10 |
| Naročila | 5 | 7 | 6 | 18 |

Vpeljemo odločitveni spremenljivki $x$ in $y$.

| | P | Q | S* | Proizvodnja |
|---|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 4<br>$x$ | 5<br>$y$ | 0<br>$8 - x - y$ | 8 |
| Proizvajalec B | 3<br>$5 - x$ | 6<br>$7 - y$ | 0<br>$x + y - 2$ | 10 |
| Naročila | 5 | 7 | 6 | 18 |

Omejitve transportnega problema:

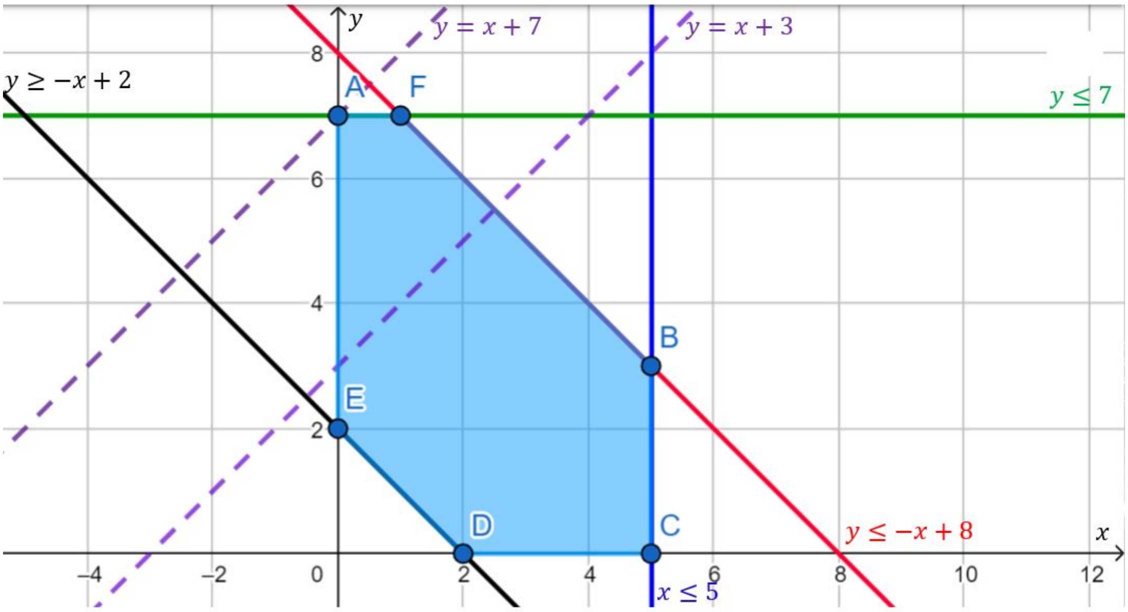
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$5 - x \geq 0$$
$$7 - y \geq 0$$
$$8 - x - y \geq 0$$
$$x + y - 2 \geq 0$$

Namenska funkcija, s katero iščemo minimum transportnih stroškov:

$$\min z(x, y) = 4x + 5y + 0(8 - x - y) + 3(5 - x) + 6(7 - y) + 0(x + y - 2)$$
$$\min z(x, y) = x - y + 57$$

Grafični prikaz rešitve danega transportnega problema je prikazan na sliki 105.

Slika 105: Grafični prikaz množice rešitev transportnega problema




Namenska funkcija, ki jo želimo minimirati ima obliko $z = x - y + 57$. Za enostavnejši grafični izračun narišemo vzporednico dobljene namenske funkcije, npr. $y = x + 3$.

Narisano premico premikamo vzporedno navzgor tako dolgo, da se ta še vedno dotika pobarvanega polja dopustnih rešitev. Optimalna rešitev se pojavi v točki $A(0,7)$, kjer funkcija doseže minimum. Preverimo še računsko, če je minimum zares v točki $A(0,7)$.

| Ekstremna točka | Namenska funkcija | Vrednost | |
|---|---|---|---|
| $A(0,7)$ | $z(0,7) = 0 - 7 + 57$ | 50 | $minimum$ |
| $B(5,3)$ | $z(5,3) = 5 - 3 + 57$ | 59 | |
| $C(5,0)$ | $z(5,0) = 5 - 0 + 57$ | 62 | |
| $D(2,0)$ | $z(2,0) = 2 - 0 + 57$ | 59 | |
| $E(0,2)$ | $z(0,2) = 0 - 2 + 57$ | 55 | |
| $F(1,7)$ | $z(1,7) = 1 - 7 + 57$ | 51 | |

Najnižji stroški transporta so res doseženi v točki $A$. Skupni stroški transporta so enaki 50 d. e. Razporeditev transportnih enot pri minimalnih stroških transporta so prikazani s tabelo:

| | P | Q | S | Proizvodnja |
|---|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 0 | 7 | 1 | 8 |
| Proizvajalec B | 5 | 0 | 5 | 10 |
| Naročila | 5 | 7 | 6 | 18 |

#### 7.7.1.2 Linearni program za neuravnotežen transportni problem

V primeru, da se reševanja neuravnoteženega transportnega problema lotimo z računalniškim programom, transportnega problema ne potrebujemo preoblikovati na uravnoteženega, saj to stori program v procesu reševanja. Poglejmo, kako v tem primeru oblikujemo linearni program za primer, ko je ponudba večja od povpraševanja.

Z namensko funkcijo iščemo minimum transportnih stroškov, torej:

$$\min z(x_{ij}) = 4 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22}$$

Proizvajalca A in B imata skupaj na voljo 18 enot blaga, potrošnika P in Q pa povprašujeta le po 12 enotah blaga. Proizvajalca imata torej 6 enot odvečnega blaga, ki bodo ostale v njunih prostorih. Zaradi tega se lahko iz njunih prostorov do trgovcev transportira toliko enot, kot jih imata na voljo ali manj. Z uporabo znaka $\leq$ dovolimo, da pri proizvajalcu ostane odvečen material.

Omejitev za proizvajalca A je tako:

$$x_{11} + x_{12} \leq 8$$

In za proizvajalca B:

$$x_{21} + x_{22} \leq 10$$

Trgovca pa morata prejeti točno takšno količino blaga, kot jo potrebujeta, zato omejitvi zapišemo kot enačbi:

$$x_{11} + x_{21} = 5$$
$$x_{12} + x_{22} = 7$$

Dodati je treba še pogoj nenegativnosti, ki določa, da se lahko po vsaki izmed obstoječih povezav transportira le pozitivno število enot blaga oziroma da po povezavi ni transporta:

$$x_{ij} \geq 0; i = \{1,2\}\ in\ j = \{1,2\}$$

### 7.7.2 Reševanje neuravnoteženega transportnega problema s programom LINGO

Rešimo predstavljeni neuravnoteženi transportni problem najprej s preoblikovanjem na uravnoteženega. Sintaksa je v tem primeru naslednja:

```
!Namenska funkcija;
min = 4*x11 + 5*x12 + 3*x21 + 6*x22;
!Omejitve proizvajalcev;
[Proizvajalec_A] x11 + x12 + x13  = 8;
[Proizvajalec_B] x21 + x22 + x23 = 10;
!Omejitve trgovin;
[Trgovina_P] x11 + x21 = 5;
[Trgovina_Q] x12 + x22 = 7;
[Trgovina_S] x13 + x23 = 6;
```

Poročilo o rešitvi za transportni problem:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              50.00000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.04

  Model Class:                                        LP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                     X11        0.000000            1.000000
                                     X12        7.000000            0.000000
                                     X21        5.000000            0.000000
                                     X22        0.000000            1.000000
                                     X13        1.000000            0.000000
                                     X23        5.000000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        50.00000           -1.000000
                          PROIZVAJALEC_A        0.000000            0.000000
                          PROIZVAJALEC_B        0.000000            0.000000
                              TRGOVINA_P        0.000000           -3.000000
                              TRGOVINA_Q        0.000000           -5.000000
                              TRGOVINA_S        0.000000            0.000000
```

Sintaksa v primeru, ko želimo rešiti neuravnotežen primer:

```
!Namenska funkcija;
min = 4*x11 + 5*x12 + 3*x21 + 6*x22;
!Omejitve proizvajalcev;
[Proizvajalec_A] x11 + x12 <= 8;
[Proizvajalec_B] x21 + x22 <= 10;
!Omejitve trgovin;
[Trgovina_P] x11 + x21 = 5;
[Trgovina_Q] x12 + x22 = 7;
```

Poročilo o rešitvi za transportni problem:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              50.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             0
Elapsed runtime seconds:                          0.03

Model Class:                                        LP

                        Variable           Value        Reduced Cost
                             X11        0.000000            1.000000
                             X12        7.000000            0.000000
                             X21        5.000000            0.000000
                             X22        0.000000            1.000000

                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1        50.00000           -1.000000
                  PROIZVAJALEC_A        1.000000            0.000000
                  PROIZVAJALEC_B        5.000000            0.000000
                      TRGOVINA_P        0.000000           -3.000000
                      TRGOVINA_Q        0.000000           -5.000000
```

Rezultata sta pri obeh uporabljenih linearnih programih enaka tistemu pri grafični rešitvi problema. Proizvajalec A naj transportira 7 enot potrošniku Q ter proizvajalec B transportira 5 enot potrošniku P.

### 7.7.3 Transportni problem, kjer je povpraševanje večje od ponudbe

V tem poglavju bomo prikazali, kako rešimo primer transportnega problema, kjer je povpraševanje večje od ponudbe.

**Primer 54:**

V preglednici je prikazan transportni problem dveh proizvajalcev (A in B) ter dveh potrošnikov (P in Q).

| | P | Q | Proizvodnja |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 2 | 4 | 8 |
| Proizvajalec B | 4 | 5 | 18 |
| Naročila | 15 | 20 | 35\26 |

#### 7.7.3.1 Preoblikovanje problema na uravnotežen transportni problem

Ker je ponudba v tem primeru manjša od povpraševanja, moramo v sistem uvesti navidezni izvor, ki bo zadostil manjku v potrebi po povpraševanju. Navidezni izvor označimo kot proizvajalca C.

V problemih, kjer je povpraševanje večje od ponudbe, so s tem povezani tudi dodatni stroški (oziroma kazni ali penali) za nedoseženo zahtevano količino blaga, ki ga potrošnik naroči. Stroški transporta na povezavah, ki vodijo od navideznega proizvajalca, so po navadi enaki tem kaznim. Pri reševanju takšnih primerov jim priredimo poljubno veliko vrednost (višjo od ostalih vrednosti na obstoječih povezavah). S tem zagotovimo, da se na teh povezavah, ki vodijo od fiktivnega proizvajalca transportira 0 enot materiala ali zelo malo materiala.

V predstavljenem primeru bomo določili ceno transporta na povezavah, ki vodijo od proizvajalca C do potrošnikov tako, da bomo vzeli desetkratnik največje cene v originalni tabeli s podatki – torej na 50 d. e. V spodnji tabeli so zapisani podatki transportnega problema s fiktivnim proizvajalcem.

| | P | Q | Proizvodnja |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 2 | 4 | 8 |
| Proizvajalec B | 4 | 5 | 18 |
| Proizvajalec C | 50 | 50 | 9 |
| Naročila | 15 | 20 | 55 |

Definiramo odločitvene spremenljivke:

| | P | | Q | | Proizvodnja |
|---|---|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | | 2 | | 4 | 8 |
| | $x$ | | $8-x$ | | |
| Proizvajalec B | | 4 | | 5 | 18 |
| | $y$ | | $18-y$ | | |
| Proizvajalec C | | 50 | | 50 | 9 |
| | $15-x-y$ | | $x+y-6$ | | |
| Naročila | 15 | | 20 | | 55 |

Omejitve linearnega programa:

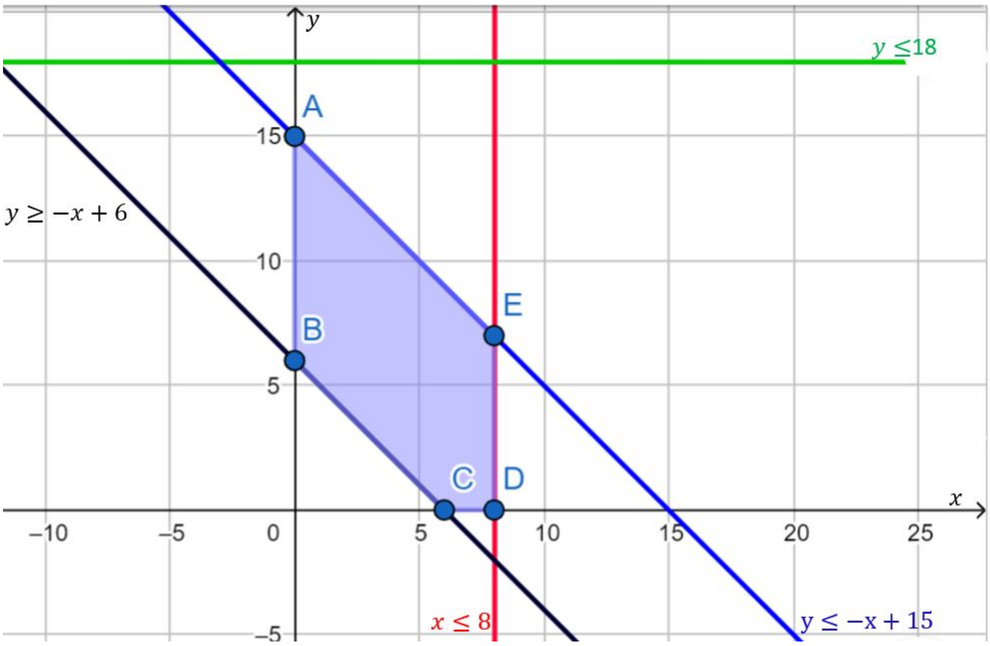
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$8-x \geq 0$$
$$18-y \geq 0$$
$$15-x-y \geq 0$$
$$x+y-6 \geq 0$$

Namenska funkcija, s katero iščemo minimum skupnih stroškov transporta:

$$\min z(x,y) = \quad 2x+4y+50(15-x-y)+4(8-x)+5(18-y)+50(x+y-6)$$
$$\min z(x,y) = 572-(y+2x) = 572-y-2x$$

Narišemo vse omejitve v koordinatni sistem in poiščemo ekstremne točke.

Slika 106: Grafični prikaz množice rešitev transportnega problema




Preverimo, v kateri izmed ekstremnih točk se nahaja minimum:

| Ekstremna točka | Namenska funkcija | Vrednost | |
|---|---|---|---|
| $A(0,15)$ | $z(0,15) = 572 - 15 - 2 \cdot 0$ | 557 | |
| $B(0,6)$ | $z(0,6) = 572 - 6 - 2 \cdot 0$ | 566 | |
| $C(6,0)$ | $z(6,0) = 572 - 0 - 2 \cdot 6$ | 560 | |
| $D(8,0)$ | $z(8,0) = 572 - 0 - 2 \cdot 8$ | 556 | |
| $E(8,7)$ | $z(8,7) = 572 - 7 - 2 \cdot 8$ | 549 | $minimum$ |

Funkcija doseže minimum v točki $E(8,7)$. Rešitev transportnega problema je torej naslednja:

| | P | Q | Proizvodnja |
|---|---|---|---|
| Proizvajalec A | 8 | 0 | 8 |
| Proizvajalec B | 7 | 11 | 18 |
| Proizvajalec C | 0 | 9 | 9 |
| Naročila | 15 | 20 | 35\35 |

Vrednost namenske funkcije je 549 d.e. Potrebno je opozoriti, da ti stroški vključujejo transport od navideznega proizvajalca do potrošnika, ki pa dejansko ne bo opravljen (ta proizvajalec namreč sploh ne obstaja), zato je treba ceno tega navideznega transporta odšteti od vrednosti namenske funkcije, ki smo jo izračunali.

V danem primeru naj bi od navideznega proizvajalca C transportirali 9 enot do potrošnika Q. Cena tega transporta je $9 \cdot 50\, d.e = 450\, d.e.$, torej je dejanski strošek danega transportnega primera $549 - 450 = 99\, d.e.$

Potrošnik P pri takšnem razporedu transporta prejme vse željene enote blaga, medtem ko potrošnik Q prejme le 11 od željenih 20 enot blaga.

#### 7.7.3.2 Linearni program za neuravnotežen transportni problem

Poglejmo še, kako sestavimo linearni program za neuravnotežen primer, ko je povpraševanje večje od ponudbe.

Z namensko funkcijo iščemo minimum transportnih stroškov:

$$\min z(x_{ij}) = 2 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 4 \cdot x_{21} + 5 \cdot x_{22}$$

Potrošnika P in Q povprašujeta po 35 enotah blaga, proizvajalca A in B pa imata skupaj na voljo le 26 enot blaga.

Ker na strani proizvajalcev obstaja manko materiala, po katerem potrošniki povprašujejo, potrošniki lahko prejmejo le željeno količino ali pa manjšo količino od željene, saj proizvajalca nista sposobna oskrbeti vseh njihovih potreb po blagu. Z uporabo znaka $\leq$ dovolimo, da potrošnik prejme manj blaga, kot je njegovo naročilo. Omejitev za potrošnika P je tako:

$$x_{21} + x_{22} \leq 15$$

In za potrošnika Q:

$$x_{12} + x_{22} \leq 20$$

Po drugi strani pa morata proizvajalca odpeljati vso blago, ki ga imata na voljo, da bosta lahko zadovoljila čim več zahtev potrošnikov, zato omejitvi zapišemo kot enačbi:

$$x_{11} + x_{12} = 8$$
$$x_{21} + x_{22} = 18$$

Dodati je treba še pogoj nenegativnosti, ki določa, da se lahko po vsaki izmed obstoječih povezav transportira le pozitivno število enot blaga oziroma, da na povezavi ni transporta:

$$x_{ij} \geq 0; i = \{1,2\}\ in\ j = \{1,2\}$$

### 7.7.4 Reševanje neuravnoteženega transportnega problema s programom LINGO

Rešimo najprej dani primer z uravnoteženim linearnim programom:

```
!Namenska funkcija;
min = 2*x11 + 4*x12 + 4*x21 + 5*x22 + 50*x31 + 50*x32;
!Omejitve proizvajalcev;
[Proizvajalec_A] x11 + x12 = 8;
[Proizvajalec_B] x21 + x22 = 18;
[Proizvajalec_C] x31 + x32 = 9;
!Omejitve trgovin;
[Trgovina_P] x11 + x21 + x31 = 15;
[Trgovina_Q] x12 + x22 + x32 = 20;
```

Poročilo o rešitvi transportnega problema:

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              549.0000
 Infeasibilities:                              0.000000
 Total solver iterations:                             2
 Elapsed runtime seconds:                          0.04

 Model Class:                                        LP


                          Variable           Value        Reduced Cost
                               X11        8.000000            0.000000
                               X12        0.000000            1.000000
                               X21        7.000000            0.000000
                               X22        11.00000            0.000000
                               X31        0.000000            1.000000
                               X32        9.000000            0.000000

                               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                 1        549.0000           -1.000000
                    PROIZVAJALEC_A        0.000000           -2.000000
                    PROIZVAJALEC_B        0.000000           -4.000000
                    PROIZVAJALEC_C        0.000000           -49.00000
                        TRGOVINA_P        0.000000            0.000000
                        TRGOVINA_Q        0.000000           -1.000000
```

Prikaz sintakse v LINGO za neuravnoteženi primer:

```
!Namenska funkcija;
min = 2*x11 + 4*x12 + 4*x21 + 5*x22;
!Omejitve proizvajalcev;
[Proizvajalec_A] x11 + x12 = 8;
[Proizvajalec_B] x21 + x22 = 18;
!Omejitve trgovin;
[Trgovina_P] x11 + x21 <=15;
[Trgovina_Q] x12 + x22 <=20;
```

Poročilo o rešitvi transportnega problema:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              99.00000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2
  Elapsed runtime seconds:                          0.05

  Model Class:                                        LP

                               Variable           Value        Reduced Cost
                                    X11        8.000000            0.000000
                                    X12        0.000000            1.000000
                                    X21        7.000000            0.000000
                                    X22        11.00000            0.000000

                                    Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                      1        99.00000           -1.000000
                         PROIZVAJALEC_A        0.000000           -3.000000
                         PROIZVAJALEC_B        0.000000           -5.000000
                             TRGOVINA_P        0.000000            1.000000
                             TRGOVINA_Q        9.000000            0.000000
```

Vrednost namenske funkcije je tokrat 99 d. e. Vrednost je realni strošek, ki ga bodo imela podjetja v danem problemu, saj v neuravnotežen linearni program ni vključenih navideznih deležnikov.

Potrošnik P bo prejel vseh 15 naročenih enot blaga, potrošnik Q pa bo od naročenih 20 enot, prejel le 11 enot.

## 7.8 Dodatni primeri

**<u>Primer 55:</u>**

DVA KMETA

Dva kmeta (K1 in K2) vsak teden z zelenjavo oskrbujeta dve tržnici T1 in T2. Kmet K1 ima tedensko na voljo 100 gajbic zelenjave, kmet K2 pa 150 gajbic zelenjave. Tržnico T1 je treba vsak teden oskrbeti z 80 gajbicami, tržnico T2 pa s 140 gajbicami zelenjave. Stroški kmeta K1 do tržnice T1 znašajo 2 € na gajbico, do tržnice T2 pa 2,5 € na gajbico. Stroški kmeta K2 do tržnice T1 znašajo 1,5 € na gajbico, do tržnice T2 pa 3 € na gajbico. Kako naj si kmeta razdelita dobavo, da bodo stroški transporta najmanjši?

**Rešitev:**

Dane podatke tabeliramo.

| | Tržnica T1 | Tržnica T2 | Ponudba [gajbic] |
|---|---|---|---|
| Kmet K1 | 2 | 2,5 | 100 |
| Kmet K2 | 1,5 | 3 | 150 |
| Povpraševanje [gajbic] | 80 | 140 | 220/250 |

Predstavljeni primer je primer transportnega problema, pri katerem je ponudba kmetov večja od povpraševanja tržnic. Zato uvedemo navidezni ponor T3*, kateremu bosta kmeta dostavila presežek svoje pridelave, ki je v tem primeru 30 gajbic zelenjave. Stroški povezave vsakega izvora z navideznim ponorom morajo biti čim nižji ali pa enaki 0. Tabelo dopolnimo s podatki o navideznem ponoru.

| | Tržnica T1 | Tržnica T2 | Tržnica T3* | Ponudba |
|---|---|---|---|---|
| Kmet K1 | 2 | 2,5 | 0 | 100 |
| Kmet K2 | 1,5 | 3 | 0 | 150 |
| Povpraševanje | 80 | 140 | 30 | 250 |

Problem je dimenzije 2 x 3, torej bo linearni program imel šest različnih odločitvenih spremenljivk $x_{ij}$, ki bodo predstavljale količino prepeljanih gajbic od kmeta do trgovca.

| | Tržnica T1 | Tržnica T2 | Tržnica T3* | Ponudba |
|---|---|---|---|---|
| Kmet K1 | 2<br>$x_{11}$ | 2,5<br>$x_{12}$ | 0<br>$x_{13}$ | 100 |
| Kmet K2 | 1,5<br>$x_{21}$ | 3<br>$x_{22}$ | 0<br>$x_{23}$ | 150 |
| Povpraševanje | 80 | 140 | 30 | 250 |

Želimo poiskati minimum vsote transportnih stroškov razvoza zelenjave med kmetoma in tržnicami.

Iščemo torej minimum namenske funkcije:

$$\min z(x_{ij}) = 2x_{11} + 2{,}5x_{12} + 0x_{13} + 1{,}5x_{21} + 3x_{22} + 0x_{23}$$

Omejitve za kmeta:

- kmet K1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$
- kmet K2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150$

Omejitve za tržnice:

- tržnica T1: $x_{11} + x_{21} = 80$
- tržnica T2: $x_{12} + x_{22} = 140$
- tržnica T3*: $x_{13} + x_{23} = 30$

Linearni program za dani transportni problem je:

$$\min z(x_{ij}) = 2x_{11} + 2{,}5x_{12} + 0x_{13} + 1{,}5x_{21} + 3x_{22} + 0x_{23}$$

pri omejitvah:

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150 \\ & x_{11} + x_{21} = 80 \\ & x_{12} + x_{22} = 140 \\ & x_{13} + x_{23} = 30 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Za grafično reševanje celoten problem prevedemo na dve odločitveni spremenljivki. Naj bo $x_{11} = x$ in $x_{12} = y$. Potem lahko spremenljivko $x_{13}$ izrazimo kot $(100 - x - y)$, kjer vidimo, da kmet K1 skupno transportira 100 gajbic. Od tega jih $x$ dostavi na tržnico T1 in $y$ na T2, preostanek pa transportira na tržnico T3*. Spremenljivko $x_{21}$ zapišemo kot $80 - x$. Če kmet K1 transportira $x$ enot na tržnico T1, potem mora tržnica T2 prejeti še preostanek potrebnih enot od kmeta K2. Podobno razmišljamo za transport med ostalimi povezavami danega problema. Pri tem si pomagamo s podatki v tabeli, kjer smo dodali navidezni ponor.

| | Tržnica T1 | Tržnica T2 | Tržnica T3* | Ponudba |
|---|---|---|---|---|
| Kmet K1 | $x \cdot 2$ | $y \cdot 2{,}5$ | $(100 - x - y) \cdot 0$ | 100 |
| Kmet K2 | $(80 - x) \cdot 1{,}5$ | $(140 - y) \cdot 3$ | $(x + y - 70) \cdot 0$ | 150 |
| Povpraševanje | 80 | 140 | 30 | 250 |

Cilj problema je minimirati transportne stroške prepeljanih gajbic zelenjave od kmetov do tržnic. Minimum namenske funkcije je seštevek vseh produktov transportiranih enot in cen po določeni povezavi:

$$\min z(x, y) =$$

$$2x + 2{,}5y + 0(100 - x - y) + 1{,}5(80 - x) + 3(140 - y) + 0(x + y - 70)$$

$$\min z(x, y) = 0{,}5x - 0{,}5y + 540$$

Število prepeljanih enot od kmetov K1 in K2 do tržnic T1, T2 in T3* ne sme biti negativno:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$80 - x \geq 0$$

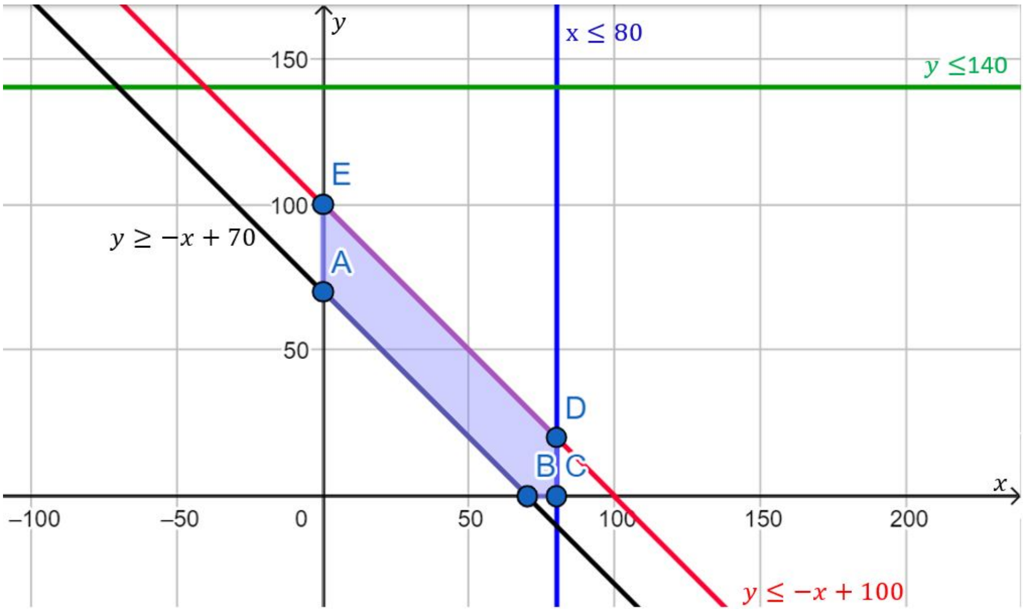
$$140 - y \geq 0$$

$$100 - x - y \geq 0$$

$$x + y - 70 \geq 0$$

Dani linearni program rešimo z grafično metodo. Zgornje omejitve v obliki polravnin narišemo v koordinatni sistem, kot je prikazano na sliki 107. Rešitev danega sistema neenačb je konveksna množica $ABCDE$.

Slika 107: Grafična rešitev problema dveh kmetov




Želimo poiskati tiste točke, v katerih namenska funkcija zavzame minimalno vrednost, torej le v ogliščih konveksne množice $ABCDE$. Računsko preverimo, v kateri točki namenska funkcija doseže minimum:

| Ekstremna točka | Namenska funkcija | Vrednost | |
|---|---|---|---|
| $A(0,70)$ | $z(0,70) = 0,5 \cdot 0 - 0,5 \cdot 70 + 540$ | 505 | |
| $B(70,0)$ | $z(70,0) = 0,5 \cdot 70 - 0,5 \cdot 0 + 540$ | 575 | |
| $C(80,0)$ | $z(80,0) = 0,5 \cdot 80 - 0,5 \cdot 0 + 540$ | 580 | |
| $D(80,20)$ | $z(80,20) = 0,5 \cdot 80 - 0,5 \cdot 20 + 540$ | 570 | |
| $E(0,100)$ | $z(0,100) = 0,5 \cdot 0 - 0,5 \cdot 100 + 540$ | 490 | $minimum$ |

Namenska funkcija doseže minimum (490) v ekstremni točki $E\ (0,100)$. Torej so minimalni stroški transporta 490 €, če je $x = 0$ in $y = 100$. Kmeta si morata deliti distribucijo gajbic kot kaže spodnja tabela. V tem primeru kmet K2 ne dostavi vse pridelane zelenjave, saj mu ostane 30 gajbic, ki jo dostavi fiktivni tržnici T3*.

| | Tržnica T1 | Tržnica T2 | Tržnica T3* | Ponudba |
|---|---|---|---|---|
| Kmet K1 | 0 | 100 | 0 | 100 |
| Kmet K2 | 80 | 40 | 30 | 150 |
| Povpraševanje | 80 | 140 | 30 | 250 |

**Primer 56:**

ZABOJNIKI

Podjetje ima v pristanišču Reka 45 zabojnikov, v pristanišču Koper pa 60 zabojnikov. Pripeljati jih želi do svojih logističnih centrov v Mariboru, Ljubljani in Krškem. Logistični center v Mariboru potrebuje 30 zabojnikov, logistični center v Ljubljani 50 zabojnikov in logistični center v Krškem 25 zabojnikov. Kako naj podjetje organizira transport iz pristanišč do logističnih centrov, da bodo skupni stroški transporta najmanjši? Stroški za prevoz enega zabojnika od posameznega pristanišča do posameznega logističnega centra ter povpraševaje in ponudba po enotah zabojnikov, so podani v spodnji tabeli.

| | Maribor | Ljubljana | Krško | Št. zabojnikov v izvorih |
|---|---|---|---|---|
| Reka | 200 € | 160 € | 120 € | 45 |
| Koper | 180 € | 100 € | 150 € | 60 |
| Št. zabojnikov v ponorih | 30 | 50 | 25 | |

**Rešitev:**

V namen reševanja danega problema bomo najprej definirali odločitvene spremenljivke, ki predstavljajo količino transportiranih zabojnikov. Prikazali bomo grafično reševanje, zato vse poti transporta izrazimo z dvema spremenljivkama $x$ in $y$.

Količina transportiranih zabojnikov na povezavi Reka-Maribor je enaka $x$, količina transportiranih zabojnikov na povezavi Reka-Ljubljana pa je enaka $y$.

S tema dvema spremenljivkama izrazimo vse ostale količine prepeljanih zabojnikov na določenih povezavah. Če iz pristanišča Reka, kjer je skupaj 45 zabojnikov, transportiramo $x$ zabojnikov v logistični center Maribor, ter $y$ zabojnikov v logistični center Ljubljana, preostanek $(45 - x - y)$ transportiramo v logistični center Krško.

Če v Mariboru potrebujejo 30 zabojnikov in prejmejo $x$ enot iz Reke, morajo preostanek prejeti iz pristanišča Koper, kar znaša $30 - x$ enot. Podobno velja za logistični center Ljubljana, ki prejme $y$ zabojnikov iz pristanišča Reka, preostanek zabojnikov pa iz pristanišča Koper, torej $50 - y$ enot.

Logistični center Krško potrebuje 25 zabojnikov. Če prejme $45 - x - y$ enot iz pristanišča Reka, preostanek enot prejme iz pristanišča Koper, kar znaša $25 - (45 - x - y) = x + y - 20$ enot ali zabojnikov.

| | Maribor | Ljubljana | Krško | Izvori |
|---|---|---|---|---|
| Reka | $x$ | $y$ | $45 - x - y$ | 45 |
| Koper | $30 - x$ | $50 - y$ | $x + y - 20$ | 60 |
| Ponori | 30 | 50 | 25 | |

Zapišimo namensko funkcijo in omejitve linearnega programa. Skupne stroške dobimo tako, da seštejemo produkte števila zabojnikov in stroškov prevoza od posameznega pristanišča do logističnega centra. Namenska funkcija je tako:

$$z(x, y) = 200 \cdot x + (30 - x) \cdot 180 + y \cdot 160 + (50 - y) \cdot 100 + (45 - x - y) \cdot 120 + (x + y - 20) \cdot 150 = 50x + 90y + 12.800$$

Cilj je minimizirati stroške:

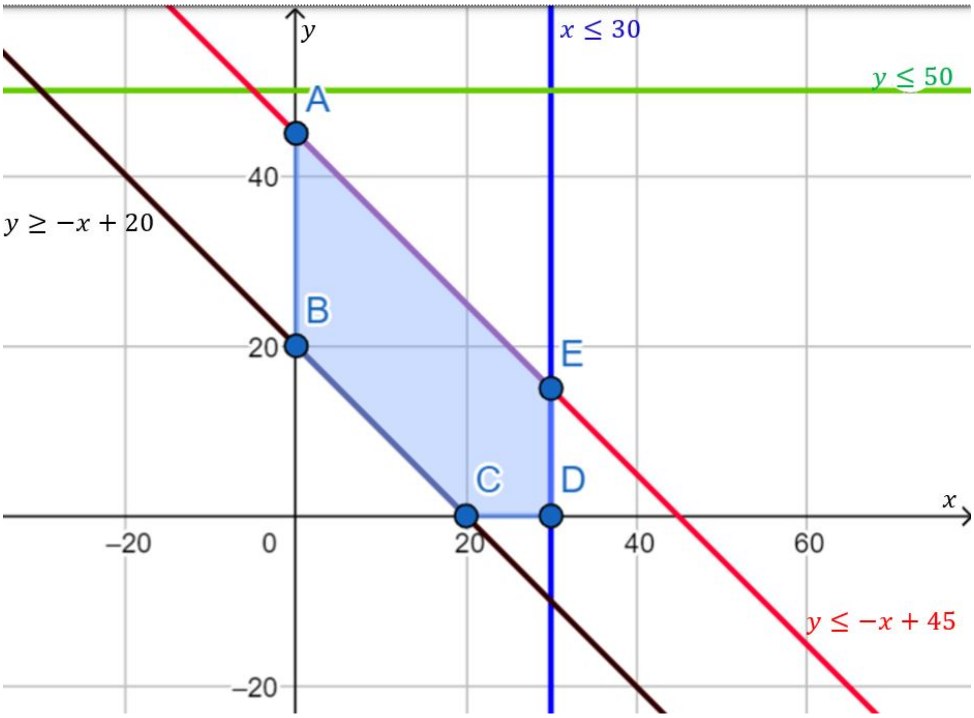
$$\min z(x, y) = 50x + 90y + 12.800$$

Količina zabojnikov, ki jih dostavijo iz poljubnega pristanišča dostavijo do poljubnega logističnega centra, je večja ali enaka nič:

- Reka - Maribor: $x \geq 0$
- Reka - Ljubljana: $y \geq 0$
- Reka - Krško: $45 - x - y \geq 0$
- Koper - Maribor: $30 - x \geq 0$
- Koper - Ljubljana: $50 - y \geq 0$
- Koper - Krško: $x + y - 20 \geq 0$

Če dane neenačbe narišemo v koordinatni sistem, dobimo konveksno množico $ABCDE$, ki je prikazana na sliki 108.

Slika 108: Grafični prikaz množice rešitev problema zabojniki




Iščemo vrednost, kjer namenska funkcija zavzame minimum. V spodnji tabeli so zapisane ekstremne točke konveksne množice $ABCDE$ in vrednost namenske funkcije v vsaki izmed njih.

| Ekstremna točka | Namenska funkcija | Vrednost | |
|---|---|---|---|
| $A(0{,}45)$ | $z(0{,}45) = 50 \cdot 0 + 90 \cdot 45 + 12.800$ | $16.850$ | |
| $B(0{,}20)$ | $z(0{,}20) = 50 \cdot 0 + 90 \cdot 20 + 12.800$ | $14.600$ | |
| $C(20{,}0)$ | $z(20{,}0) = 50 \cdot 20 + 90 \cdot 0 + 12.800$ | $13.800$ | $minimum$ |
| $D(30{,}0)$ | $z(30{,}0) = 50 \cdot 30 + 90 \cdot 0 + 12.800$ | $14.300$ | |
| $E(30{,}15)$ | $z(30{,}15) = 50 \cdot 30 + 90 \cdot 15 + 12.800$ | $15.650$ | |

Namenska funkcija doseže svoj minimum v točki $C(20, 0)$, kjer vrednost znaša 13.800 €. Optimalna shema za razvoz zabojnikov je torej:

| | Maribor | Ljubljana | Krško |
|---|---|---|---|
| Reka | 20 | 0 | 25 |
| Koper | 10 | 50 | 0 |

Iz pristanišča Reka naj odpeljejo 20 zabojnikov v logistični center Maribor in 25 zabojnikov v logistični center Krško. Iz pristanišča Koper odpeljejo 10 zabojnikov v logistični center Maribor in 50 zabojnikov v logistični center Ljubljana.

**Primer 57:**

KOMBINIRANI TRANSPORT

Iz Dovra morajo v Dunkerque dnevno prepeljati $600\ \text{ton}$ blaga. V Dunkerque imajo dve skladišči S1 in S2, kjer to blago uskladiščijo. Skladišče S1 lahko prejme $250\ \text{ton}$ blaga dnevno, skladišče S2 pa $350\ \text{ton}$ blaga dnevno. Blago se lahko do skladišč transportira s tovornimi vlaki, ki vozijo skozi predor, ali s tovorno ladjo. Z vlaki lahko prepeljejo $400\ \text{ton}$ blaga, z ladjami pa $200\ \text{ton}$ blaga dnevno. Transportni stroški tovornega vlaka do skladišča S1 znašajo $60\ €/\text{t}$, do skladišča S2 pa $80\ €/\text{t}$. Za ladjo znašajo stroški do S1 $50\ €/\text{t}$, do S2 pa $40\ €/\text{t}$. Na kakšen način naj se izvede transport iz Dovra do S1 in S2, da bodo transportni stroški najnižji? Koliko znašajo ti transportni stroški?

**Rešitev:**

Če s tovornim vlakom transportirajo $250 \text{ ton}$ materiala v skladišče S1 in $150 \text{ ton}$ v skladišče S2 ter s tovorno ladjo $200 \text{ ton}$ materiala v skladišče S2, bodo transportni stroški najnižji. Skupni transportni stroški bodo 35.000 €.

**Primer 58:**

LETALSKI PROMET

Z letalom AA 390 pripeljejo na letališče 800 ljudi, ki jih je potrebno prepeljati na dva terminala T1 in T2. Na prvi terminal T1 je namenjenih ¾ vseh ljudi, na terminal T2 pa preostanek. Za transport bodo uporabili avtobuse, s katerimi bodo prepeljali 450 ljudi, za 300 ljudi bodo uporabili kombije in za ostale taksije. Strošek za vsakega potnika, ki ga prepeljejo z avtobusom do T1 znaša 50 €, do T2 pa 20 €. Strošek za vsakega potnika, ki ga prepeljejo s kombijem do T1 ali do T2 znaša 30 €. Strošek za vsakega potnika, ki ga prepeljejo s taksijem do T1 znaša 70 €, do T2 pa 55 €. Kako naj organizirajo transport potnikov, da bo strošek minimalen? Kolikšen je ta strošek?

**Rešitev:**

Minimalen strošek 29.000 € dosežejo, če organizirajo prevoz, kot je zapisano v spodnji tabeli.

| | Terminal T1 | Terminal T2 |
|---|---|---|
| Avtobus | 250 | 200 |
| Kombi | 300 | 0 |
| Taksi | 50 | 0 |

**Primer 59:**

CVETLIČARNE

Dve cvetličarni (C1 in C2) vsak teden s cvetjem oskrbita dve nakupovalni središči (NS1 in NS2). Cvetličarna C1 tedensko vzgoji 1.000 lončnic, cvetličarna C2 pa 1.500 lončnic. Prvo nakupovalno središče NS1 je treba vsak teden oskrbeti z 800 lončnicami, drugo NS2 pa s 1.400 lončnicami. Stroški transporta od cvetličarne C1 do središča NS1 znašajo 2 € na lončnico, do NS2 pa 1,5 € na lončnico. Stroški transporta od cvetličarne C2 do središča NS1 znašajo 2,5 € na lončnico, do središča NS2 pa 3 € na lončnico. Kako naj si cvetličarni razdelita dobavo, da bodo stroški najmanjši? Koliko transportnih stroškov ima posamezna cvetličarna? Katera cvetličarna ne proda vsega cvetja? Koliko lončnic ji ostane?

**Rešitev:**

Minimalne stroške v višini 4.700 € cvetličarni dosežeta, če si delita dobavo kot je zapisano v spodnji tabeli (NS3 predstavlja navidezni ponor). Pri tem ima cvetličarna C1 1.500 €, cvetličarna C2 pa 3.200 € stroškov. Cvetličarni C2 ostane 300 neprodanih lončnic.

| | NS1 | NS2 | NS3 |
|---|---|---|---|
| C1 | 0 | 1.000 | 0 |
| C2 | 800 | 400 | 300 |

**Primer 60:**

RUDNIKI

Rudnik 1 (R1) lahko dnevno izkoplje 100 ton premoga in rudnik 2 (R2) 80 ton premoga. Rudnika oskrbujeta s premogom tri elektrarne (E1, E2 in E3), kjer bi bilo potrebno prvi zagotoviti 70 ton, drugi 50 ton in tretji 80 ton premoga. Stroški dostave premoga od R1 do E1 ali E2 znašajo 100 € na tono, do T3 pa 200 € na tono. Stroški R2 do E1 ali E3 znašajo 200 € na tono, do E2 pa 100 € na tono.

a.) Kako naj rudnika distribuirata premog, da bodo stroški najmanjši? Kolikšni so ti minimalni stroški?

b.) Pri kateri elektrarni optimalna distribucija premoga ne doseže nivoja povpraševanja? Kolikšen je primanjkljaj?

**Rešitev:**

a.) Distribucija premoga pri minimalnih stroških je predstavljena v spodnji tabeli. Minimalni stroški znašajo 24.000 €.

b.) V spodnji tabeli je s FR* označen navidezni izvor. Ta naj elektrarni E3 dostavi 20 ton premoga, torej elektrarna E3 ne prejme zadostne količine premoga. Primanjkljaj znaša 20 ton.

| | E1 | E2 | E3 | Omejitve |
|---|---|---|---|---|
| R1 | 70 | 0 | 30 | 100 |
| R2 | 0 | 50 | 30 | 80 |
| FR* | 0 | 0 | 20 | 20 |
| Omejitve | 70 | 50 | 80 | |

# 8 OSNOVE LINGO PROGRAMA

V poglavju bodo predstavljene osnovne značilnosti LINGO programa, saj med reševanjem primerov linearnega programiranja navajamo le sintakso programa za posamezne primere.

Da sestavimo linearni program v programu LINGO, ki bo rešljiv, moramo upoštevati nekaj osnovnih pravil.

Primer linearnega programa iz področja proizvodnega problema:

```
!Namenska funkcija;
max = 44*x1 + 20*x2 + 30*x3;
!Omejitve;
[Delo] 6*x1 + 4*x2 +1*x3 <= 30;
[Les] 3*x1 + 5*x2 + 4.2*x3 <= 56;
[Steklo] 6*x1 + 1.5*x2 + 7*x3 <= 68;
[Pogodbena obveza] x1 = 10;
```

- LINGO ne razločuje med veliki in malimi črkami, tako da je vseeno kako pišemo program. Pomembno je le, da ne uporabljamo šumnikov.

- Komentarji v programu niso obvezni, lahko pa jih vključimo kot pomoč pri razumevanju programa. Komentarji ne zmotijo programskega procesa. Zapisati pa jih je treba tako, da se začne z klicajem (!) in ob zaključku komentarja dodamo podpičje (;). V programu se komentarji obarvajo zeleno. Lahko jih umestimo kamorkoli v linearni program.

- Določeni operatorji in funkcije (min ali max) se pojavijo v modri barvi, da se ločijo od ostalega programa, ki je obarvan črno.

- Odločitvene spremenljivke v programu se morajo začeti s črko (brez šumnikov). Ostali sestavni deli oznake odločitvene spremenljivke so lahko tudi številke, vsebujejo pa lahko tudi podčrtaj (_). Spremenljivke so lahko sestavljene z največ 32 znaki.

- Za vsakim matematičnim izrazom umestimo podpičje (;), saj jih program dojame kot končno ločilo in brez njih ni sposoben prebrati programa. Brez podpičja bi program bral linearni program kot en sam matematični izraz. Zaradi tega lahko vpišemo tudi kakšen zelo dolg matematični izraz v večih vrsticah in bo kljub temu bran kot en izraz vse do podpičja.

- Znaka ≤ in ≥ sta v jeziku programa LINGO dva ločena znaka <= ali =>.

- Znak za množenje v programu predstavlja zvezdica (*) in je ne smemo izpustiti, saj program drugače ne bo rešljiv.

- V oglate oklepaje [] vpišemo poimenovanja omejitev. Branja linearnega programa to ne bo zmotilo, koristilo pa bo v procesu branja poročil, saj bo bolj vidno, na katero omejitev linearnega programa se kakšen rezultat nanaša. V primeru, da omejitev ne poimenujemo sami, jim LINGO dodeli ime, ki ustreza indeksu omejitev, vendar ta indeks vedno ne ustreza vrstnemu redu omejitev v izvirnem linearnem programu in lahko pride do napačne interpretacije rezultatov.

- Pogojev nenegativnosti odločitvenih spremenljiv ni potrebno pisati, saj je ta lastnost v programu že prednastavljena.

Reševanje vnešenega linearnega programa sprožimo s klikom na gumb Reši[50]  v orodni vrstici na vrhu glavnega okna. V primeru, da je bila pri vnosu linearnega programa storjena napaka, nas bo program o tem obvestil in prikazal na katem mestu je program pomanljkljivo napisan. Rešitev se bo izpisala v novo odprtem oknu Poročilo o rešitvi.

[50] Solve

Za pridobitev poročila Analiza občutljivosti je potrebno analizo občutljivosti v programu omogočiti. To storimo tako, da v orodni vrstici uporabimo ukaz Reševalnik/Možnosti[51]. V oknu ki se odpre izberemo zavihek Splošno reševanje[52] in v odseku senčni izračuni obkljukamo možnost Cene in intervali[53]. Poročilo sprožimo s klikom na zavihek Range.

[51] Options
[52] General Solver Tab
[53] Prices and Ranges

# 9 SLOVENSKO-ANGLEŠKI SLOVARČEK UPORABLJENIH POJMOV

| **Slovenski prevod** | **Angleški izraz** |
|---|---|
| analiza občutljivosti | Range report |
| celica s cilji | Objective Cell |
| celice s spremenljivkami | Variable Cells |
| celoštevilsko linearno programiranje | Integer Linear Programming |
| dopolnilna spremenljivka | Slack or Surplus |
| investicijski problem | Investment Problem |
| linearno programiranje | Linear Programming |
| lokacijski problem | Facility location problem |
| mešani celoštevilski linearni program | Mixed Linear Integer Programming |
| metoda razveji in omeji | Branch and Bound method |
| namenska funkcija | Objective function |
| odločitvene spremenljivke | Variables |
| omejitev | Constraint |
| operacijske raziskave | Operational research oz. Operations research |
| optimizacija z omejitvami | Constrained optimization |
| podatki | Data |
| poročilo o rešitvi | Solution Report |
| poročilo o občutljivosti Excel | Sensitivity Report |
| poročilo o odgovorih Excel | Answer Report |
| prehrambeni problem ali problem mešanja | Diet problem |
| problem nahrbtnika | Knapsack problem |
| problem trezorja | LockBox Problem |
| proizvodni problem | Production problem |
| razpon desnih strani neenačb | Righthand Side Ranges |
| reducirani strošek | Reduced Cost |
| Reševalnik | Solver |

| | |
|---|---|
| reši | Solve |
| s spreminjanjem celic s spremenljivkami | By Changing Variabe Cells |
| senčna cena/dualna cena | Shadow price / Marginal value / Pi value / Dual value |
| simpleksno linearno programiranje | Simplex LP |
| sklic na celico | Cell Reference |
| teorija iger | Game Theory |
| transportni problem | Transportation problem |
| vir | Resource |
| vrednost | Value |
| vrednost namenske funkcije | Objective Value |

# SEZNAM LITERATURE


Beasley, L. E. (b. d.). *OR-Notes.* Najdeno 25. junija 2019 na spletni strani: http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/dea.html

Bradley, S. P., Hax, A. C., & Magnanti, T. L. (1977). *Applied mathematical programming*. Minnesota: Addison-Wesley.

Cornuéjols, G., Trick M. A., & Saltzman, M. J. A. (1995). *Tutorial on Integer Programming.* Najdeno 14. avgusta 2019 na spletni strani: http://www.math.clemson.edu/~mjs/courses/mthsc.440/integer.pdf

Dantzig, D. B. (1963). *Linear Programming and Extensions.* Santa Monica, California: Princeton University Press.

*Deterministic Modeling: Linear Optimization with Applications (b. d.).* Najdeno 10. avgusta 2019 na spletni strani: http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partVIII.htm

Dragan, D. (2009). *Upravljanje logističnih sistemov*. Celje: Fakulteta za logistiko.

*History of Operations Research* (n. d.). Najdeno 15. maja na spletni strani: http://www.phpsimplex.com/en/history.htm

Lindo Systems Inc. (2018). *LINGO The Modeling Language and Optimizer.* Lindo Systems Inc. Chicago: Illinois.

*Linearno programiranje, zapiski iz predavanj Matematični praktikum.* (2007/2008). Ljubljana: Biotehniška fakulteta.

O'Kelly, M.E. (1987). A Quadratic Integer Program for the Location of Interacting Hub Facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393-404.

de Neufville, R., Clark, J. in Field, R. F. (2002). *LP Sensitivity Analysis/Engineering Systems Analysis for Design*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.

Nocedal, J. in Wright, S. J. (1999). *Numerical optimization*. ZDA: Springer.

Singiresu, S. R. (1996). *Engineering Optimization, Theory and Practice,* 3th Edition. New York: John Wiley & Sons.

Usenik, J. (2007). *Kvantitativne metode v logistiki*. Krško: Valvasorjev raziskovalni center.

Usenik, J. (2010). *Matematične metode II*. Krško: Fakulteta za energetiko UM.

Usenik. J. (2011). *Kvantitativne metode (zapiski predavanj – skripta).* Krško: Fakulteta za energetiko

Usenik, J. (2017). *Generalizirano zvezno variabilno dinamično lienarno programiranje*. Novo mesto: Fakulteta za industrijski inženiring.

Vadnal, A. (1977). *Rešeni problemi linearnega programiranja.* Ljubljana: Državna založba Slovenije.

Winston, W. L., & Goldberg, J. B. (2004). *Operations research: applications and algorithms (Vol. 3) .*Belmonte: Thomson/Brooks/Cole.