UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA LOGISTIKO

Visokošolski učbenik

STOHASTIČNI PROCESI V LOGISTIKI

Dejan Dragan

Celje, Junij 2013

Naslov:

Stohastični procesi v logistiki

Izdajatelj:

Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko

Avtor:

doc. dr. Dejan Dragan

Pomoč pri urejanju:

Tea Vizinger

Staša Gyorkoš

Recenzenta:

Izr. prof. dr. Đani Juričić

Doc.dr. Damir Vrančić

Oblikovanje naslovnice:

doc. dr. Dejan Dragan

Število izvodov: 20

KAZALO

Predgovor

To delo je zasnovano kot visokošolski učbenik, ki obravnava snov predmeta »Stohastični procesi v logistiki«, ki se predava na podiplomskem študiju Fakultete za logistiko.

Delo pokriva kratke teoretične osnove in zbirko analitično ali numerično rešenih nalog s področja teorije verjetnosti, stohastičnih procesov, markovskih verig in množične strežbe v logistiki. Mišljeno je kot trenutno poglavitno gradivo, ki naj bi ga študentje uporabljali poleg ostalih gradiv (prosojnic, itn) pri študiju tega predmeta. Delo predstavlja prvo verzijo učbenika, ki bo v naslednjih verzijah še nekoliko bolj razširjen z nekaterimi dodatnimi temami s področja stohastičnih procesov v logistiki.

Pri delu s študenti je bilo ugotovljeno, da potrebujejo veliko računskih vaj pri osvajanju snovi s tega področja. To pomeni, da morajo preizkusiti metode za reševanje problemov na kar največjem naboru nalog, da so res učinkovito kos izpitnim vprašanjem in sposobni kvalitetnega razumevanja snovi.

V okviru tega se pričakuje vsaj osnovno predznanje študentov s področja visokošolske matematike, vključno s poznavanjem funkcij več spremenljivk in znanjem integralnega računa. Zaželeno je tudi poznavanje osnovnih mehanizmov iz teorije sistemov.

V gradivu je takorekoč vsaka naloga opremljena ne le s končno rešitvijo, pač pa tudi s celotnim postopkom reševanja. Pri tem je nazorno prikazan prav vsak korak računanja, z jasnim ciljem, da lahko sleherni študent ujame ritem razlage in slednjemu brez težav sledi do konca izračunov. Poleg tega so ponekod v zbirki nalog dodani tudi računalniški programi v Matlabu oz. Scilabu, z namenom, da bi se študent vsaj v grobem spoznal tudi z uporabo programskih orodij pri reševanju nekaterih obravnavanih problemov.

To delo seveda ni v celoti originalno, pač pa se opira na številne učbenike in druga gradiva. Večina slednjih je navedenih v seznamu literature, zato na tem mestu naštejmo le tista gradiva, na katera smo se najbolj opirali pri tvorbi tega dela: Hudoklin-Božič: Stohastični procesi, Juričić in Dragan: Stohastični procesi v logistiki, Prosojnice iz predavanj, Hsu: Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes, ter Usenik: Matematične metode v prometu.

Ker je delo zasnovano na takšen način, da v smislu interdisciplinarnosti pokriva različna področja znanosti s problematiko stohastičnih procesov, verjamemo, da bi bilo primerno tudi za študente drugih fakultet, še posebej naravoslovno-tehniških.

Poudarimo še, da je to delo šele prva verzija učbenika, zato ni izključena možnost določenih tiskarskih in podobnih napak. Za morebitne napake se bralcu že vnaprej opravičujemo in bomo hvaležni za vsak kritičen komentar.

Avtor

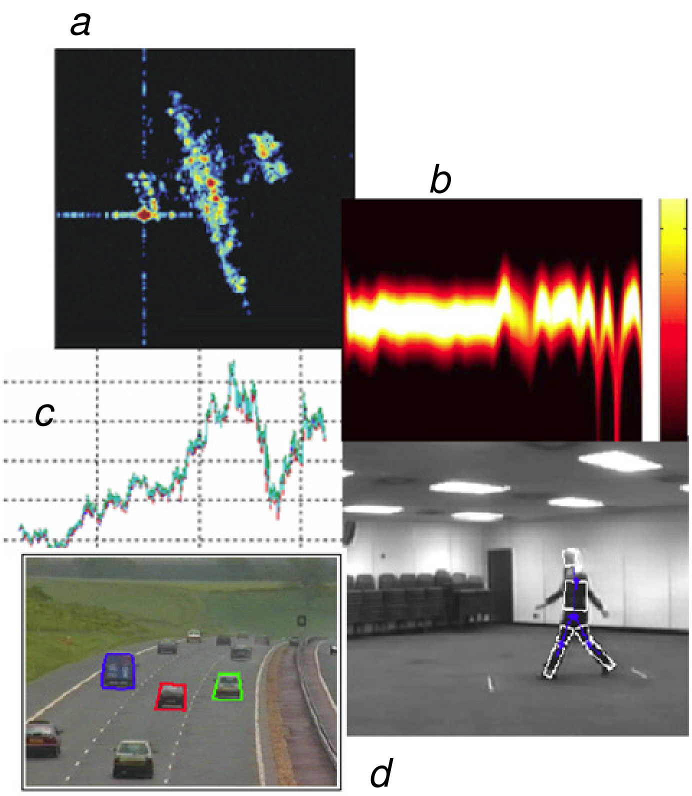
1 UVOD

Stohastični procesi so matematična abstrakcija empiričnih procesov, katerih potek je voden na osnovi zakonov verjetnosti.Veliko realnih procesov ima značilnosti stohastičnih procesov, zato je poznavanje njihovega mehanizma zelo pomembno za razumevanje v praksi nastopajočih situacij [12].

Teorija stohastičnih procesov igra izredno pomembno vlogo pri raziskovanju naključnih fenomenov, odvisnih od časa. Prvi rezultati v tej smeri so bili doseženi pri raziskavah Brownovega gibanja, telefonskega prometa in šumov elektronskih cevi, kjer so poglavitno vlogo igrali Einstein, Erlang in Shottky. Temeljne osnove pri razvoju matematične teorije stohastičnih procesov pa je postavil Kolmogorov leta 1931. Od tedaj je bilo napisanih že veliko knjig in člankov, tako s področja teorije stohastičnih procesov, kot tudi s področja različnih aplikacij, kjer se uporablja tovrstna teorija [12].

V današnjem času tako rekoč ni več veje znanosti, kjer ne bi bilo zaželeno tudi poznavanje teorije stohastičnih procesov, pa naj gre za področje fizikalnih, ekonomskih, bioloških, socialnih, inženirskih, ali kakšnih drugih znanosti. Izsledke teorije stohastičnih procesov lahko uporabimo tudi pri projektiranju sistemov kontrole in regulacije procesov ter sistemov kontrole kakovosti, pri analizi zanesljivosti sistemov, analizi in napovedovanju časovnih vrst, sledenju pozicije letala na osnovi radarskih signalov, rekonstrukciji signala iz šuma pri telekomunikacijah, sledenju ljudem in vozilom pri nadzoru prometa, itn (glej sliko1) [12].

Tudi pri upravljanju logističnih sistemov igrajo stohastični procesi zelo veliko vlogo. Pri slednjih gre namreč za matematični instrumentarij, ki nam pomaga ocenjevati stopnjo negotovosti v nekem naključnem procesu. Z drugimi besedami, teorija stohastičnih procesov predstavlja sklop konceptov in orodij, ki nam, če že ne morejo ponuditi zanesljivih odgovorov, vsaj postrežejo najbolj verjetne izide s pripadajočo stopnjo negotovosti.



Slika 1: Primeri uporabe teorije stohastičnih procesov: a) Sledenje pozicije letala na osnovi radarskih signalov, b) rekonstrukcija signala iz šuma pri telekomunikacijah, c) napovedovanje časovnih vrst, d) sledenje ljudem in vozilom pri nadzoru prometa.

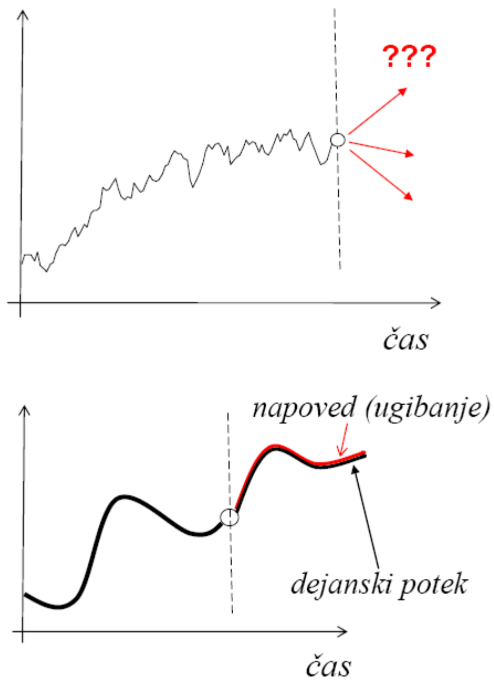
Negotovost je eden glavnih problemov pri razumevanju procesov, ki imajo naključen značaj, kar se v praksi pogosto dogaja. Poglejmo si nekaj primerov, kjer se pojavlja negotovost:

- Kakšno bo povpraševanje po nekem izdelku na trgu v naslednjem letu?
- Kolikšno bo število prijavljenih potnikov na letalski liniji?
- Kakšno bo vreme čez 3 tedne?
- Kolikšne bodo jutrišnje cene delnic?
- Kakšna bo cena nafte?
- Kakšna bo temperatura v Celju v naslednjih dneh? Itn.

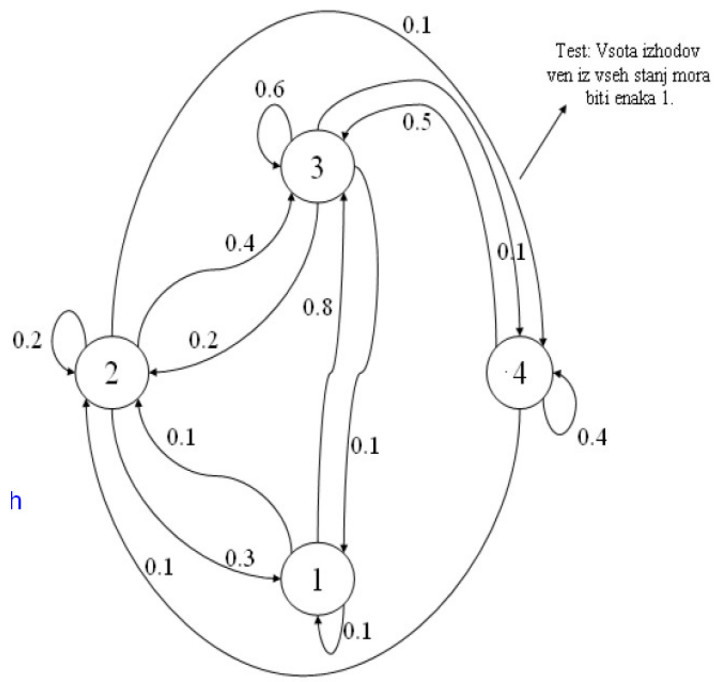
Podajmo nekaj najbolj značilnih primerov uporabe teorije stohastičnih procesov v logistiki:

- Napovedovanje povpraševanja (slika 2),
- Napovedovanje obnašanja logističnega procesa (slika 3),
- Množična strežba (slika 4),

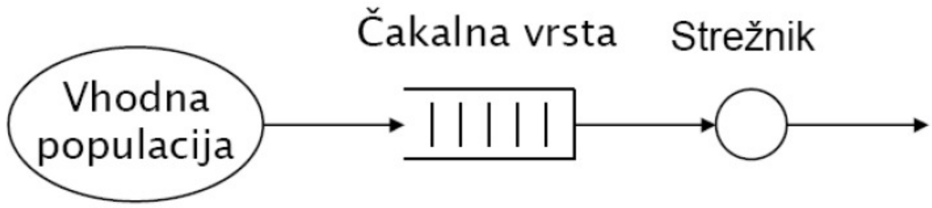
- Sledenje in reševanje problemov navigacije s pomočjo Kalmanovega filtra,
- Upravljanje zalog pri stohastičnem povpraševanju, itn.



Slika 2: Ilustracija problema napovedovanja povpraševanja



Slika 3: Primer ilustracije avtomata (Markovske verige), ki napoveduje obnašanje nekega logističnega procesa na osnovi izračuna verjetnosti za zasedbo stanj v prihodnjih časih



Slika 4: Primer enokanalne množične strežbe

Ena izmed pomembnih aplikacij teorije stohastičnih procesov v logistiki je tudi teorija množične strežbe, s pomočjo katere lahko obravnavamo vrsto organizacijskih problemov pri prometu, telekomunikacijah, vzdrževanju strojev in naprav, planiranju zalog, vključevanju računalnikov v proizvodne in poslovne procese ipd [12]. Seveda je cilj tovrstne teorije izvesti kar najbolj kvalitetno analizo sistemov množične strežbe (kateri so npr. čakanje avtomobilov na bencinski črpalki, čakanje letal na vzlet ali pristanek, čakanje strank v banki, itn), ter poskušati optimirati delovanje takšnih sistemov (npr. vpeljati več ali manj strežnikov, zvečati produktivnost strežnika, itn). Kot bo razvidno kasneje v učbeniku, je teoriji množične strežbe posvečen dobršen del tega gradiva.

Namen pričujočega teksta je zlasti seznaniti študente z metodami matematične analize nekaterih vrst stohastičnih procesov, ki so primerni kot modeli realnih logističnih procesov. Tako so v 4. in 5. poglavju obdelani: Markovski procesi z diskretnimi stanji v zveznem času, Poissonovi procesi, rojstni procesi, smrtni procesi, rojstno smrtni procesi, ter analitični modeli enostavnih sistemov množične strežbe.

Ker je za razumevanje teorije stohastičnih procesov bistvenega pomena tudi poznavanje teorije verjetnosti oz. verjetnostnega računa, je temu področju namenjeno 3. poglavje v učbeniku, ki se tematsko dopolnjuje s temeljnimi principi kombinatorike v 2. poglavju. V okviru teorije verjetnosti so podani tako osnovni pojmi, kot tudi razlaga naključnih spremenljivk in njihovih številskih karakteristik. Poglavje se sklene z nekaterimi bolj zahtevnimi pojmi iz teorije verjetnosti, kot npr. združeno porazdeljenimi naključnimi spremenljivkami, mejnimi in pogojnimi porazdelitvami, metodo maksimalne podobnosti za ocenjevanje parametrov stohastičnih modelov, itn.

V drugem delu učbenika je v 6. poglavju dodana tudi zbirka rešenih nalog tako iz teorije verjetnosti, kot tudi teorije stohastičnih procesov in sistemov množične strežbe. Pri tem so bile številne naloge zbrane tudi iz preteklih kolokvijev in izpitov, ali pa so se obravnavale pri avditornih vajah preteklih let.

2 KOMBINATORIKA

Pri kombinatoriki se sprašujemo o raznih možnih razporeditvah elementov kakšne množice. Glede na pogoje v posameznih situacijah imamo opravka z različnimi poimenovanji razporeditev elementov, povsod pa se sklicujemo na takoimenovani osnovni izrek kombinatorike [33].

2.1 Osnovni izrek kombinatorike

Naj bo danih *r* končnih nepraznih množic. Prva naj ima n_1 elementov, druga naj ima n_2 elementov, itn, *r*-ta naj ima n_r elementov. S temi elementi lahko sestavljamo razporeditve (urejene skupine) po *r* elementov tako, da prvo mesto v posamezni razporeditvi zasede en element iz prve množice, drugo mesto v posamezni razporeditvi zasede en element iz druge množice, itn, *r*-to mesto v posamezni razporeditvi pa zasede en element iz *r*-te množice. Potem nas zanima, koliko različnih možnosti razporeditev imamo na razpolago? Zastavljeno vprašanje lahko povemo tudi drugače. Denimo je neka operacija sestavljena iz *r* faz, pri čemer je mogoče opraviti prvo fazo na n_1 načinov, drugo fazo na n_2 načinov, itn, *r*-to fazo pa na n_r načinov. Na koliko načinov je potem mogoče opraviti celotno operacijo? Na zastavljena vprašanja je mogoče odgovoriti s takoimenovanim osnovnim izrekom kombinatorike [33].

Izrek [33]:

Če je neko opravilo sestavljeno iz r faz in je mogoče i-to fazo opraviti na n_i *načinov,* $i = 1, 2, ..., r$*, potem je mogoče celotno operacijo opraviti na:*

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r \tag{2.1}$$

načinov.

Poglejmo si primer [33]:

Iz Novega Mesta do Ljubljane lahko pridemo po treh različnih poteh, Iz Ljubljane do Kopra tudi po treh, iz Kopra do Portoroža pa po dveh. Na koliko različnih načinov lahko pridemo iz Novega Mesta do Portoroža?

Gotovo velja naslednje:

$$\begin{aligned} &r = 3 \\ &n_1 = 3,\;\; n_2 = 3,\;\; n_3 = 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

torej glede na izrek (2.1) velja:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \tag{2.3}$$

Odtod sledi, da lahko iz Novega Mesta do Portoroža lahko pridemo na 18 različnih načinov.

2.2 Permutacije

Ločimo permutacije brez ponavljanja in permutacije s ponavljanjem. Poglejmo si najprej prve.

2.2.1 Permutacije brez ponavljanja

Dano imamo množico z n različnimi elementi. Te lahko razporedimo (razvrstimo) na n mest na več načinov v različnem vrstnem redu. Vsaki takšni razporeditvi pa pravimo permutacija [33].

Do izraza za število možnih permutacij pridemo z naslednjim razmišljanjem [33]. Denimo imamo na začetku n elementov in n praznih mest (predalov), kamor bomo te elemente spravljali. Prvo mesto lahko zapolnemo na n načinov, ker imamo na razpolago še vseh n elementov. Ko je prvo mesto polno, ostane na razpolago za zapolnitev drugega mesta še (n-*1*) elementov. Ko je tudi drugo mesto polno, ostane na razpolago za zapolnitev tretjega mesta še (n-*2*) elementov. Itn, torej ostaneta za predzadnje mesto na razpolago še 2 elementa, ter za zadnje mesto na razpolago le še en element. Na osnovi tega razmišljanja in izreka (2.1) je skupno število vseh možnih permutacij enako:

$$\begin{aligned} n_1 &= n, \\ n_2 &= (n-1) \\ n_3 &= (n-2) \\ &\dots \\ n_{r-1} &= 2 \\ n_r &= 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$P_n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Poglejmo si primer [33]:

Na koliko načinov lahko na knjižni polici razporedimo 5 matematičnih, 6 kemijskih in 7 zgodovinskih knjig, če morajo knjige posameznega področja stati skupaj?

Število razporeditev matematičnih knjig je na osnovi izraza (2.4) enako:

$$P_5 = 5 \cdot (5-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 5! \tag{2.5}$$

Število razporeditev kemijskih knjig je na osnovi izraza (2.4) enako:

$$P_6 = 6 \cdot (6-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 6! \tag{2.6}$$

Število razporeditev zgodovinskih knjig pa je na osnovi izraza (2.4) enako:

$$P_7 = 7 \cdot (7-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 7! \tag{2.7}$$

Poleg tega moramo razporejati še cele skupine knjig, saj morajo knjige istega področja stati skupaj. Ker so skupine tri, je možnosti tega razporejanja toliko, kolikor je permutacij treh elementov, torej 3!. Na osnovi izreka (2.1) je torej skupno število vseh naborov enako:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3! = 2\,612\,736\,000 \tag{2.8}$$

2.2.2 Permutacije s ponavljanjem

Ko je v množici n elementov, ki jih razporejamo na n mest, nekaj elementov med seboj enakih, govorimo o permutacijah s ponavljanjem. Med seboj enaki elementi imajo namreč enak status, zato jih jemljemo kot elemente, ki se ponavljajo [33].

Denimo se med n elementi en element ponovi k-krat. V tem primeru je število med seboj različnih permutacij manjše od $n!$ za tolikokrat, kolikokrat se lahko med seboj premeščajo ti enaki elementi, to je $k!$. Potem za število vseh permutacij velja [33]:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!} \tag{2.9}$$

Podobno velja, če se med n elementi ponovijo dva, trije ali več elementov. Torej v splošnem velja, da je število permutacij n elementov, kjer se en element ponovi r_1 - krat, drug element r_2 -krat, itn, m-ti element r_m -krat, enako [33]:

$$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_m!} \tag{2.10}$$

Poglejmo si primer [33]:

Koliko štirimestnih števil lahko sestavimo iz cifer 1, 1, 2, 4?

Očitno na osnovi izraza (2.9) velja:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12 \tag{2.11}$$

saj se en element, to je cifra 1, ponovi dvakrat.

2.3 Variacije

Pri variacijah nas zanima, na koliko različnih načinov lahko n elementov razporedimo na r mest, pri čemer je $n \neq r$. Pri tem je r red variacije. Tudi pri variacijah ločimo varianto brez ponavljanja in s ponavljanjem [33].

2.3.1 Variacije brez ponavljanja

Imamo *n* elementov in *r* mest, kamor te elemente postavljamo. Prvo mesto lahko zapolnemo na *n* načinov, ker imamo na razpolago še vseh *n* elementov. Ko je prvo mesto polno, ostane na razpolago za zapolnitev drugega mesta še (*n-1*) elementov. Ko je tudi drugo mesto polno, ostane na razpolago za zapolnitev tretjega mesta še (*n-2*) elementov. Itn, torej ostane za *r*-to mesto na razpolago še *n-(r-1)* elementov. Na osnovi tega razmišljanja in izreka (2.1) je skupno število vseh možnih variacij enako [33]:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = n, \\
&n_2 = (n-1) \\
&n_3 = (n-2) \\
&\ldots \\
&n_{r-1} = (n-r) \\
&n_r = (n-r+1)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$V_n^{\ r} = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

pri čemer je gotovo $r < n$.

Poglejmo si primer [33]:

*Politična stranka želi izmed 100 svojih članov izbrati predsednika, podpredsednika in t*ajnika. Na koliko različnih načinov to lahko stori?

Očitno želimo 100 članov razporediti na 3 mesta in gre za variacije brez ponavljanja. Število vseh možnosti potem je na osnovi izraza (2.12):

$$
\begin{aligned}
&V_n^{\ r} = \frac{n!}{(n-r)!} \\
&V_{100}^{\ 3} = \frac{100!}{(100-3)!} = 98 \cdot 99 \cdot 100 = 970\,200
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

2.3.2 Variacije s ponavljanjem

V tem primeru se lahko kateri od elementov ponovi in lahko tudi velja: $r > n$. Število variacij n elementov reda r s ponavljanjem je enako izrazu [33]:

$$^{(p)}V_n^{\ r} = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{r-krat} = n^r \tag{2.14}$$

Poglejmo si primer [33]:

Na koliko načinov lahko iz kupa 32 kart povlečemo eno za drugo tri karte, če izvlečene karte vračamo?

Ker želimo razporediti 32 kart na 3 mesta, gre očitno za variacije. Ker pa karte vračamo, gre za variacije s ponavljanjem. Različnih možnosti je na osnovi izraza (2.14) enako:

$$^{(p)}V_n^{\ r} = n^r \tag{2.15}$$
$$^{(p)}V_{32}^{\ 3} = 32^3 = 32768$$

2.4 Kombinacije

Tudi pri kombinacijah ločimo takšne brez ponavljanja in takšne s ponavljanjem. V nadaljevanju si bomo pogledali le prve, torej kombinacije brez ponavljanja.

2.4.1 Kombinacije brez ponavljanja

Gre za število razporeditev *n* elementov na *r* mest, pri čemer vrstni red v *r*-terici ni pomemben, kar pomeni, da iz množice z *n* elementi tvorimo podmnožice z *r* elementi. Ko iz *n* elementov sestavimo neko skupino *r* elementov, dobimo eno variacijo oz. eno kombinacijo. Če v tej skupini elemente premeščamo, dobimo vsakič novo variacijo, kombinacija pa ostane vedno ista. Število možnih premeščanj *r* elementov je *r*!, torej je možnih kombinacij natanko *r*! - krat manj kot variacij. Odtod sledi za število kombinacij brez ponavljanja [33]:

$$K_n^{\ r} = \frac{V_n^{\ r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r} \tag{2.16}$$

Poglejmo si primer [33]:

Iz kupa 32 kart hkrati potegnemo tri karte. Koliko različnih potegov je možnih?

Na osnovi izraza (2.16) dobimo:

$$K_{32}{}^{3}=\binom{32}{3}=\frac{32!}{(32-3)!\cdot 3!}=\frac{32!}{29!\cdot 3!}=\frac{30\cdot 31\cdot 32}{6}=4960 \qquad (2.17)$$

Tako smo končali s kratkim pregledom kombinatorike, v nadaljevanju pa sledi dokaj obsežno poglavje teorije verjetnostnega računa.

3 TEORIJA VERJETNOSTI

Matematična teorija verjetnosti nam daje osnovna orodja za konstrukcijo in analizo matematičnih modelov, ki opisujejo naključne fenomene. Pri študiju tovrstnih fenomenov pa se srečujemo z eksperimenti, pri katerih izida ne moremo napovedati vnaprej [30]. Verjetnostni račun se torej ukvarja z zakonitostmi naključnih izidov pri ponovitvah poskusov, ki potekajo pod enakimi ali vsaj zelo podobnimi pogoji.

Verjetnostni račun se v zadnjih desetletjih vedno krepkeje uveljavlja ne le kot samostojna panoga teoretične matematike, pač pa tudi kot zelo uspešen sklop raziskovalnih metod na številnih drugih znanstvenih področjih, kot npr. pri fiziki, astronomiji, biologiji, ekonomiji, psihologiji, inženirskih znanostih, itn. Uporabnost verjetnostnega izračuna izvira zlasti iz njegove povezave s statistiko, katere teoretične osnove temeljijo na zakonih verjetnostnega računa [34].

Koncept naključnosti so poznali že Egipčani in Grki, pri čemer so izide pojasnjevali z voljo bogov. Leta 1662 je plemič Chevalier de Mere zastavil matematiku Pascalu vprašanje, zakaj določene stave prinašajo dobiček, druge pa ne. Pascal se je o tem začel dopisovati s Fermatom in iz tega so nastali začetki verjetnostnega računa. Istega leta je Anglež John Graunt sestavil na osnovi podatkov prve zavarovalniške tabele. Teorijo verjetnosti kot uporabno vedo pa je utrdil Bernoulli v začetku 18 stoletja. Leta 1865

Mendel uporabi verjetnostno analizo pri razlagi dednosti, konec 19. stoletja pa teorija verjetnosti prodre v fiziko (začetek statistične fizike). V 20. stoletju se teorija verjetnosti razširi praktično na vsa področja znanosti in tehnike [18].

3.1 Negotovost

V naravi se srečujemo z dvema tipoma dogodkov [18]:

- deterministični in
- naključni.

Razlika je seveda v tem, da prve lahko točno predvidimo, drugim pa ne moremo vnaprej napovedati izida. Poglejmo dva primera determinističnih dogodkov:

- Primer 1: Če vodo ohladimo na -5 stopinj, se bo čez nekaj časa ustvaril led.
- Primer 2: Če kroglo spustimo z višine 1m od tal, bo ta padla na tla v času 0.45s.

Oba dogodka sta deterministična. To pomeni, da pri ponovitvi poskusa natančno vemo, kaj se bo zgodilo. Poglejmo si še tri primere naključnih dogodkov:

- Primer 3: Kolikšna bo vrednost delnice Mercatorja čez 1 mesec?
- Primer 4: Kdo bo letošnji zmagovalec lige prvakov?
- Primer 5: Vplačam srečko za loterijo. Ali bom zadel?

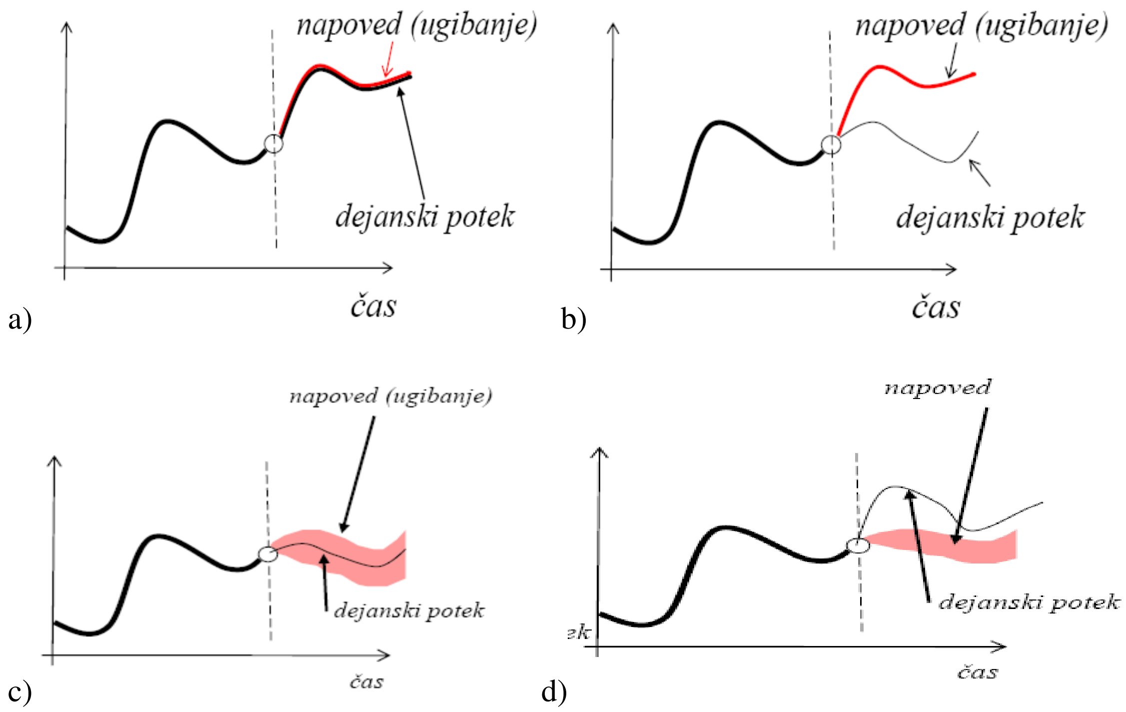
V teh primerih gre za naključne dogodke, kjer je njihov izid nemogoče povsem zanesljivo napovedati. Kljub temu pa življenje terja od nas odločitve, četudi ne moremo vedno jasno opredeliti njihovih posledic. Na primer se moramo odločiti:

- Ali naj kupimo delnice Mercatorja ali Krke?
- Ali je bolje naložiti denar v nepremičnino?
- Direktorja logističnega podjetja zanima povračilna doba investicije, da se lažje odloči, ali iti v investicijo ali ne.

Čeprav pride intuicija vedno prav (seveda tistim, ki jo imajo), je za učinkovito odločanje zelo koristno, če premoremo kvantitativno oceno možnosti (verjetnosti) za posamezne opcije. Orodja za to pa najdemo v teoriji verjetnosti [18].

V okviru tega nas zanima, kakšni so lahko odgovori, kaj se bo zgodilo. Denimo se ukvarjamo z napovedovanjem časovnih vrst (glej sliko 2). V tem primeru ločimo [18]:

- Napoved z veliko zanesljivostjo in veliko točnostjo (slika 5 a),
- Napoved s slabo zanesljivostjo in veliko točnostjo (slika 5 b),
- Napoved z veliko zanesljivostjo in slabo točnostjo (slika 5 c),
- Napoved s slabo zanesljivostjo in slabo točnostjo (slika 5 d),



Slika 5: Primeri zanesljivosti in točnosti neke napovedi: a) Velika zanesljivost in velika točnost, b) Slaba zanesljivost in velika točnost, c) Velika zanesljivost in slaba točnost, d) Slaba zanesljivost in slaba točnost.

Torej je v svetu kompleksnih dinamičnih procesov negotovost osrednja lastnost. Za sistematično računanje z negotovostjo pa potrebujemo [18]:

- konsistenten in
- logičen

sistem razmišljanja. Tega pa vsebuje teorija verjetnosti, ki nam s pomočjo matematičnega aparata pomaga ocenjevati stopnjo negotovosti v naključnih procesih.

3.2 Osnovni pojmi in dogodki

Pojem verjetnosti poznamo že iz vsakdanjega življenja [34]. Pogosto pravimo o kakšnem dogodku, da je zelo verjeten, da je malo verjeten, da je neverjeten itn. Npr. pri metu kocke pravimo, da je verjetno, da vržemo šest pik. Pri loteriji je zelo malo verjetno, da zadanemo glavni dobitek, bolj verjetno je, da zadanemo kakšen manjši dobitek, najverjetneje pa je, da ostanemo praznik rok. Vsebina takšnih izjav je prej ko slej nedoločena in marsikdaj odvisna tudi od človekovega razpoloženja.

S takšnimi in podobnimi izjavami se ukvarja verjetnostni račun [34]. Pri njem srečujemo pojme, ki ji deloma poznamo iz vsakdanjega življenja, vendar pa ti običajno vsebujejo premalo opredeljeno vsebino v primerjavi z ustreznimi pojmi verjetnostnega računa. Da se izognemo zmedi, ki bi lahko nastala zaradi terminoloških nesporazumov, bomo najprej obrazložili ali definirali nekaj pojmov, ki jih srečujemo v verjetnostnem računu.

Verjetnostni račun proučuje naključne pojave. To so pojavi, ki ob ponovljenih poskusih (pri enakih pogojih) rezultirajo v različnih izidih. Vendar, če število ponovitev postane veliko, se pokažejo določene konsistentne lastnosti.

Temeljni pojmi, ki se pojavijo pri verjetnostnem računu, so [18, 34]:

- poskus,
- dogodek, ter
- verjetnost dogodka.

<u>Poskus</u>

Poskus je dejanje, ki ga opravimo v natanko določenih pogojih, izid pa vnaprej ni znan. Skratka, s poskusom mislimo realizacijo kakšne množice skupaj nastopajočih dejstev [34].

Primeri poskusov so:

- metanje kovanca,
- metanje kocke,
- merjenje temperature v sobi,

- gibanje tečaja delnice, itn.

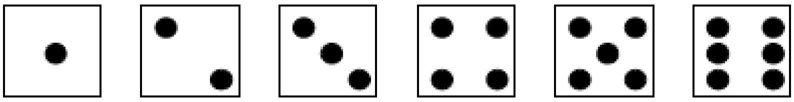
Dogodek

Vzemimo, da je z določenim poskusom povezano dejstvo, ki se pri poskusu lahko zgodi ali pa ne zgodi. Tako dejstvo imenujemo dogodek.

Torej je elementarni dogodek oziroma izid E poskusa možen rezultat poskusa (opomba: kot bo razvidno v nadaljevanju, elementarne dogodke večkrat označimo tudi s črko ω).

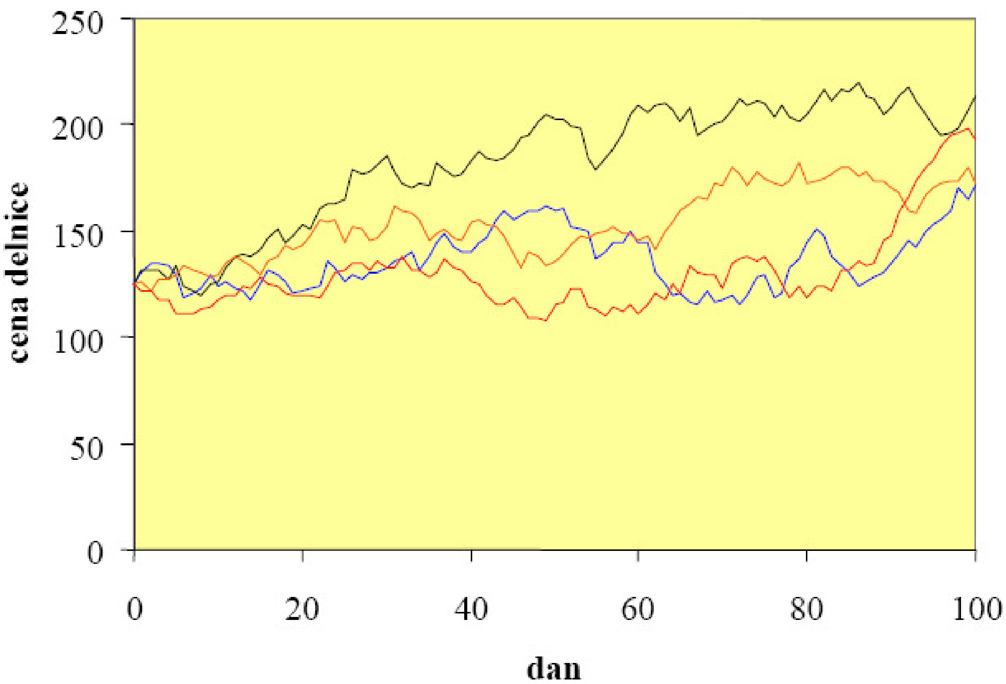
Primeri dogodkov so:

- Možni izid meta kovanca je številka (Š) ali hrbet (H). Torej velja: E∈ {Š,H}
- Metanje kocke. Možni izidi so E ∈ {1,2,3,4,5,6} (glej sliko 6)



Slika 6: Možni izidi pri metanju kocke

- Napoved tečaja delnice za naslednjih 100 dni. Spodaj so narisani 4 možni izidi (glej sliko 7). Seveda v tem primeru možnih izidov neskončno mnogo.



Slika 7: Štirje možni izidi pri gibanju tečaja delnice

Prostor vseh možnih izidov

Prostor vseh možnih izidov (elementarnih dogodkov) S je množica vseh elementarnih dogodkov. Prostor S lahko vsebuje [18]:

- končno število izidov,
- neskončno, toda števno število izidov,
- ne-števno neskončno število izidov.

Primera končnega števila izidov sta npr. [18]:

- Enkratni met kocke: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- Met dveh kock:

$$
\begin{aligned}
S =\{\, &(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\
&(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\
&(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\
&(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\
&(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\
&(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\,\}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Primer neskončnega, toda števnega števila izidov [18]:

Kupimo avto. Naj bo dogodek število dni do pojavitve prve napake. Napaka se lahko zgodi že takoj, to je E1 = 0 (0. dan), naslednji, 1. dan, to je E2 = 1, itn. Torej velja:

$$S=\{0,1, 2, 3, ...\}$$

Množica S je v tem primeru števna, število elementarnih izidov pa je neskončno.

Primer neskončnega, in ne-števnega števila izidov [18]:

Poskus merjenja temperature v predavalnici. Elementarni izid je realno število med -30 in +50 stopinj C, pri čemer velja (glej sliko 8):

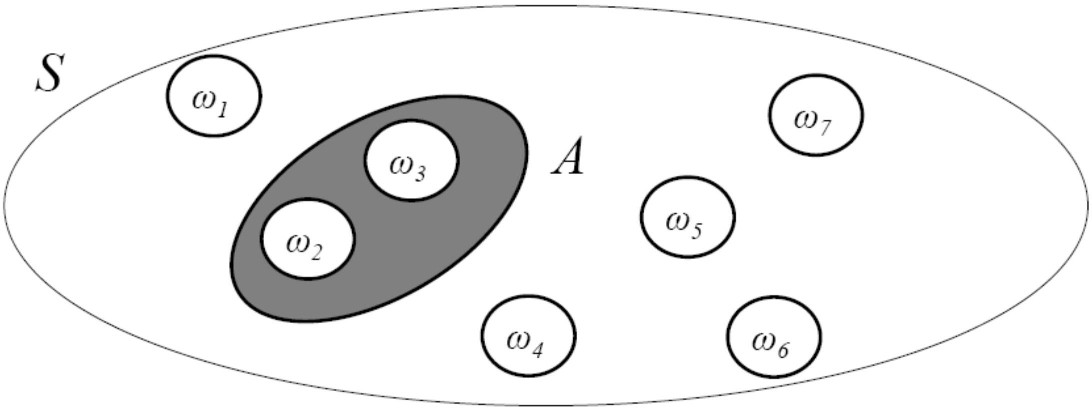
$$S = \{-30 \leq x < 50\} = [-30,50]$$

Slika 8: Neskončno in ne-števno število elementarnih izidov pri merjenju temperature

Množica S v tem primeru seveda ni števna!

Sestavljeni dogodek

Sestavljeni dogodek A je dogodek, sestavljen iz več elementarnih dogodkov $E_i = \omega_i$. Seveda je dogodek A podmnožica množice S (prostora vseh možnih dogodkov). Pomen sestavljenega dogodka A prikazuje slika 9 [18].



Slika 9: Neskončno in ne-števno število elementarnih izidov pri merjenju temperature

Primer sestavljenega dogodka:

Kocko vržemo enkrat. Naj bo A = dogodek, da bo izid sodo število. Torej upoštevamo, da se A zgodi, če pade 2, 4 ali 6. Torej velja: A = {2, 4, 6}.

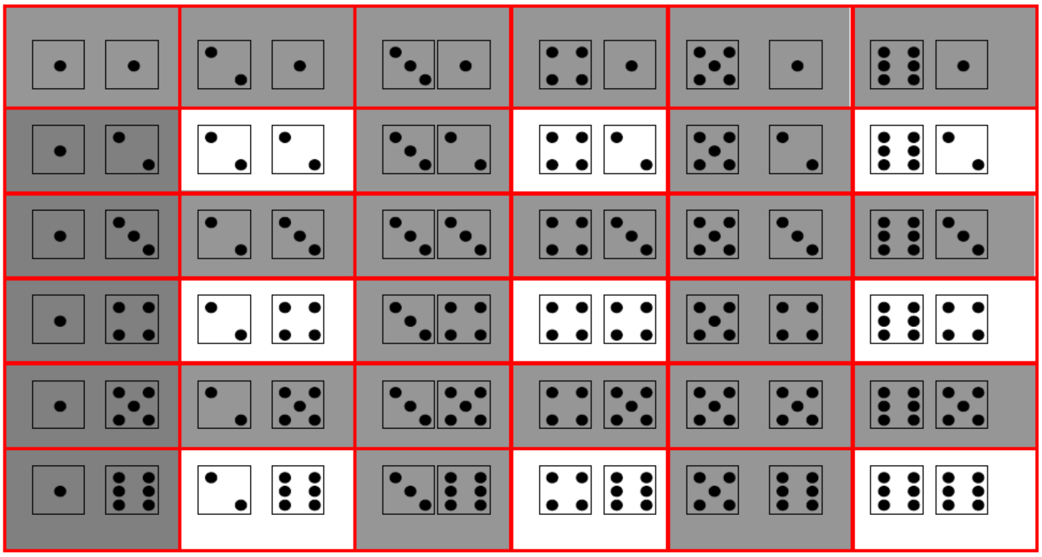
Primer sestavljenega dogodka:

Kocko vržemo dvakrat. Naj bo A dogodek, da je seštevek številk enak 7. Dogodek je potem sestavljen iz naslednjih elementarnih dogodkov:

A ={ (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)}.

Primer sestavljenega dogodka:

Kocko mečemo dvakrat. Dogodek A = vsaj eno število je liho. Ta dogodek sestoji iz 36 -9 = 27 elementarnih dogodkov (glej sliko 10).



Slika 10: Sestavljen dogodek (osenčeno sivo) iz 27 elementarnih dogodkov, ki predstavljajo dejstvo, da je vsaj eno število liho (nista obe sodi).

Ostali dogodki

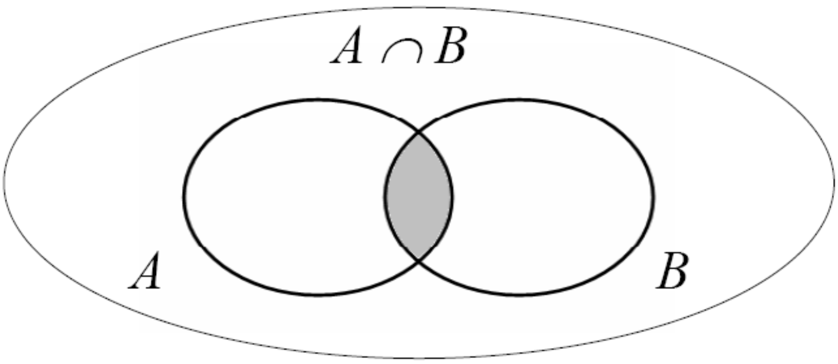
Ločimo še nekaj vrst dogodkov [18, 34]:

- Prazen (nemogoč) dogodek je dogodek brez izidov,
- Zanesljiv (gotov) dogodek je dogodek, ki se bo gotovo zgodil.

Presek (produkt) dogodkov

Če sta A in B dva dogodka, potem je A in B dogodek, ko se A in B zgodita hkrati. Presek označimo z $A \cap B = A \cdot B$, sestavljen pa je iz vseh elementarnih dogodkov, ki pripadajo A in B hkrati (glej sliko 11). Velja torej [18]:

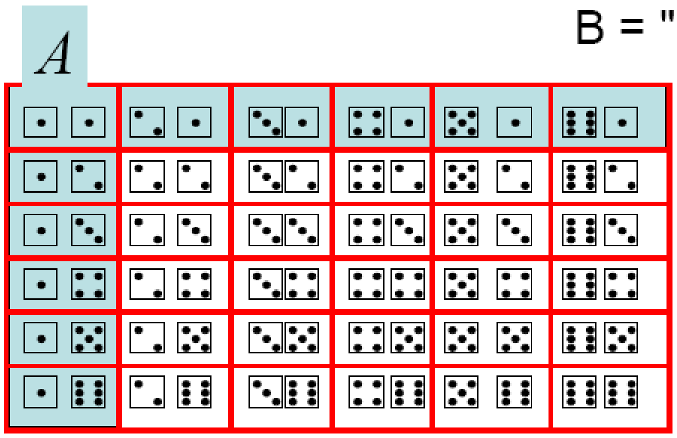
$$A \cap B = \{\omega_i \,|\, \omega_i \in A \text{ in } \omega_i \in B\} \tag{3.2}$$



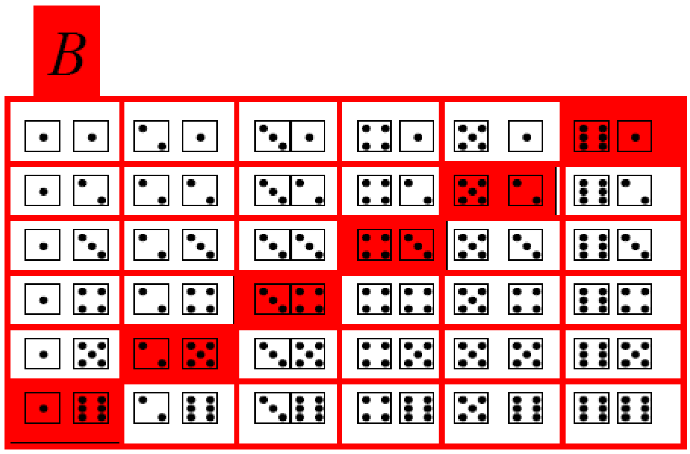
Slika 11: Presek dogodkov A in B

Primer preseka dogodkov [18]:

Imamo met dveh kock. Dogodek A = "gotovo pade 1 enka", dogodek B = " vsota je 7". Potem je dogodek preseka enak: $A \cap B = \{(6,1),(1,6)\}$ (glej slike 12, 13 in 14).

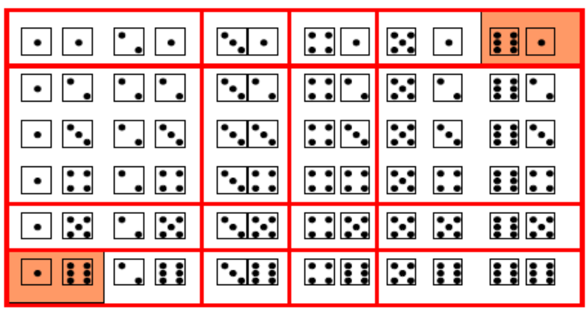


Slika 12: Dogodek A = »gotovo pade ena enka«



Slika 13: Dogodek B = »vsota je sedem«

$$A \cap B = \{(6,1),(1,6)\}$$

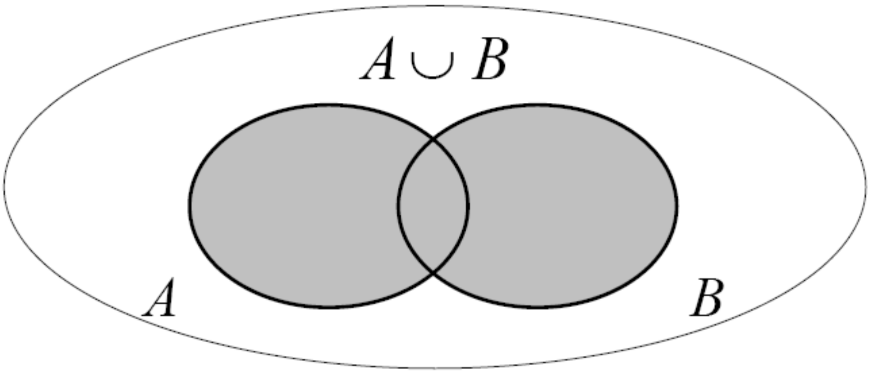


Slika 14: Presek dogodkov A in B

Unija (vsota) dogodkov

Če sta A in B dva dogodka, potem je unija dogodkov A ali B dogodek , ki se zgodi, če se zgodi bodisi A ali B. Označimo takšen dogodek z $A \cup B = A + B$ in ga definiramo takole (glej sliko 15) [18]:

$$A \cup B = \{ \omega_i | \omega_i \in A \ ali \ \omega_i \in B \} \tag{3.3}$$



Slika 15: Unija dogodkov A in B

Primer unije dogodkov:

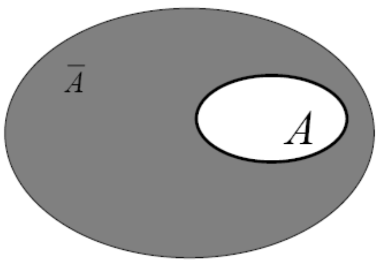
Imamo met dveh kock. A="gotovo pade ena enka", B="vsota števil je 7". Njuna unija je:

$A \cup B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5)\}$

Nasprotni dogodek

Nasprotni dogodek dogodka A je katerikoli dogodek, ki je sestavljen iz elementarnih dogodkov, ki ne nastopajo v A (glej sliko 16) [18]:

$$\overline{A} = \{ \omega_i | \omega_i \notin A \} \tag{3.4}$$



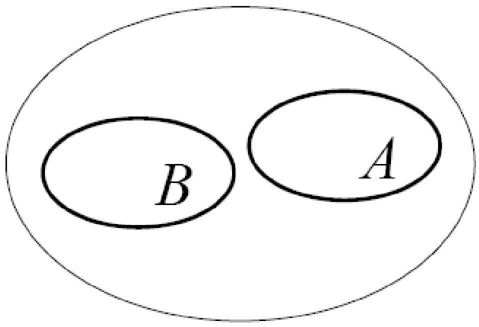
Slika 16: Nasprotni dogodek dogodka A

Primer nasprotnega dogodka:

Mečemo kocko enkrat. Če je dogodek A, da bo padlo liho število, potem je $\overline{A}$ *= {2,4,6}.*

<u>Nezdružljivi dogodki</u>

Dogodka A in B sta nezdružljiva, če velja: $A \cap B = \varnothing$. Torej nezdružljiva dogodka nimata skupnih elementarnih dogodkov (glej sliko 17) [18].



Slika 17: Nezdružljiva dogodka

Primer nezdružljivih dogodkov:

Mečemo kocko enkrat. Če je A dogodek, da bo padlo liho število in B dogodek, da bo padla 6, potem sta A in B gotovo nezdružljiva.

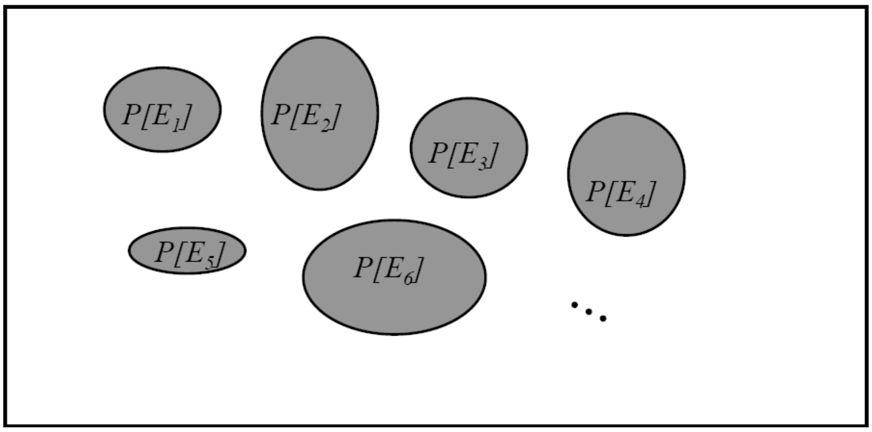
3.3 Lastnosti verjetnosti

Naj bo S množica vseh možnih elementarnih izidov Ei ⊂ S. Verjetnost P je potem definirana takole [18]:

1. P[Ei] ≥ 0, za vsak Ei.
2. P[S] = 1.
3. Za množico med seboj nezdružljivih dogodkov E1, E2,…, velja (glej sliko 18):

$$P[E_1 \cup E_2 \cup \cdots] = P[E_1] + P[E_2] + \cdots \qquad (3.5)$$

$$P\left[\bigcup_i E_i\right] = \sum_i P[E_i]$$



Slika 18: Verjetnost unije nezdružljivih dogodkov

Za nek dogodek E $\subseteq$S velja tudi [18]:

$$
\begin{aligned}
&P\left[\bar{E}\right]=1-P\left[E\right] \\
&S=E\cup\bar{E} \ \text{ in } \ E\cap\bar{E}=\phi \\
&1=P\left[S\right]=P\left[E\cup\bar{E}\right]=P\left[E\right]+P\left[\bar{E}\right] \\
&P\left[\bar{E}\right]=1-P\left[E\right]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

3.3.1 Enako verjetni elementarni dogodki

Naj bo $S=\{\omega_1,\omega_1,...,\omega_N\}$ in vsak elementarni dogodek ω_i enako verjeten:

$$P\left[\omega_i\right]=\frac{1}{N}, i=1,2,...,N \tag{3.7}$$

Naj bo dogodek A sestavljen iz n_A elementarnih dogodkov:

$$A=\{\omega_1,...,\omega_{n_A}\}, \quad \omega_i\in S \tag{3.8}$$

Ker so dogodki ω_i med seboj nezdružljivi, velja na osnovi (3.5) [18]:

$$
\begin{aligned}
P[A]&=P[\omega_1\cup\omega_2\cup...\cup\omega_{n_A}]=P[\omega_1]+P[\omega_2]+...+P[\omega_{n_A}]= \\
&=\underbrace{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+...\frac{1}{N}}_{n_A \text{ krat}}=\frac{n_A}{N}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Potemtakem velja [18]:

$$P[A] = \frac{\text{število elementarnih dogodkov v A}}{\text{število vseh možnih elementarnih dogodkov}} \tag{3.10}$$

Izraza (3.9) in (3.10) si lahko interpretiramo tudi kot kvocient med številom za dogodek A ugodnih izidov in številom vseh možnih izidov.

Poglejmo si primer:

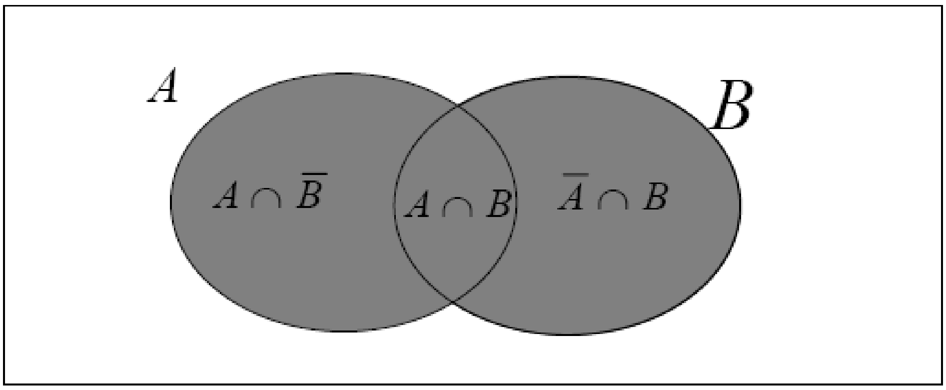
Pri enkratnem metu kocke naj bo dogodek A, da bo padlo praštevilo. Kolikšna je verjetnost P[A]?

Rešitev: Množica vseh možnih (elementarnih) izidov je S = {1,2,3,4,5,6}, in je torej N = 6. Izid A se zgodi, če se zgodi katerikoli elementarni izid iz množice {1,2,3,5}. Torej je $n_A = 4$ *. Ker so vsi elementarni izidi enako možni, velja na osnovi izrazov (3.9) oz. (3.10):*

$$P[A] = \frac{n_A}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{3.11}$$

3.3.2 Verjetnost vsote združljivih dogodkov

Denimo imamo dva dogodka A in B, ki sta med seboj združljiva. Želimo izračunati $P[A \cup B]$. Pri izračunu si pomagamo s sliko 19 [18].



Slika 19: Verjetnost unije dveh združljivih dogodkov

Gotovo lahko iz slike 19 definiramo naslednje med seboj nezdružljive dogodke [18]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(A \cap \overline{B}\right) \\ E_2 &= \left(A \cap B\right) \\ E_3 &= \left(\overline{A} \cap B\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Torej lahko za $P\left[A \cup B\right]$ zapišemo:

$$P\left[A \cup B\right] = P\left[E_1 \cup E_2 \cup E_3\right] = P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] \tag{3.13}$$

Ker so E_i nezdružljivi med seboj, na osnovi (3.5) sledi:

$$P\left[A \cup B\right] = P\left[E_1\right] + P\left[E_2\right] + P\left[E_3\right] = P\left[A \cap \overline{B}\right] + P\left[A \cap B\right] + P\left[\overline{A} \cap B\right] \tag{3.14}$$

Poglejmo si, kakšen je $P\left[A\right]$ (glej sliko 19):

$$P\left[A\right] = P\left[A \cap \overline{B}\right] + P\left[A \cap B\right] = P\left[E_1\right] + P\left[E_2\right] \tag{3.15}$$

Poglejmo si, kakšen je $P\left[B\right]$ (glej sliko 19):

$$P\left[B\right] = P\left[A \cap B\right] + P\left[\overline{A} \cap B\right] = P\left[E_2\right] + P\left[E_3\right] \tag{3.16}$$

Če seštejemo izraza (3.15) in (3.16), dobimo:

$$P\left[A\right] + P\left[B\right] = P\left[E_1\right] + 2P\left[E_2\right] + P\left[E_3\right] = \left\{P\left[E_1\right] + P\left[E_2\right] + P\left[E_3\right]\right\} + P\left[E_2\right] \tag{3.17}$$

Ker pa vemo, da na osnovi (3.14) velja $P\left[A \cup B\right] = P\left[E_1\right] + P\left[E_2\right] + P\left[E_3\right]$, sledi iz (3.17):

$$P\left[A\right] + P\left[B\right] = \left\{P\left[A \cup B\right]\right\} + P\left[E_2\right] \tag{3.18}$$

Tako dobimo končen rezultat za verjetnost unije združljivih dogodkov [18]:

$$\begin{aligned} P\left[A \cup B\right] &= P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[E_2\right] \\ P\left[A \cup B\right] &= P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cap B\right] \\ P\left[A \cup B\right] &= P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cdot B\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Seveda, če bi bila dogodka A in B med seboj nezdružljiva, bi izraz (3.19) prešel v obliko:

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A] + P[B] - \underbrace{P[A \cap B]}_{0} \\ P[A \cup B] &= P[A] + P[B] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Posplošitev izraza (3.19) na vsoto več kot dveh združljivih dogodkov ni tako preprosta, kot velja za situacijo pri le dveh združljivih dogodkih. Zato podajmo le končno obliko izpeljanega izraza, če bi imeli npr. opravka z verjetnostjo unije treh združljivih dogodkov:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cdot B] - P[A \cdot C] - P[B \cdot C] + P[A \cdot B \cdot C] \tag{3.21}$$

Poglejmo si še en primer verjetnosti vsote dveh združljivih dogodkov:

Iz kupa 32 kart na slepo izvlečemo eno karto. Kolikšna je verjetnost, da je karta kralj ali rdeča karta?

Označimo s K dogodek, da je izvlečena karta kralj, z R dogodek, da je izvlečena karta rdeča, s K.R pa dogodek, da je izvlečena karta kralj in hkrati rdeča karta (rdeči kralj). Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} K &= \{izvlečena\ \ karta\ \ je\ \ kralj\} \\ R &= \{izvlečena\ \ karta\ \ je\ \ rdeča\} \\ K \cdot R &= \{izvlečena\ \ karta\ \ je\ \ rdeči\ \ kralj\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Verjetnost, da je karta kralj, je:

$$P(K) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0.125 \tag{3.23}$$

Verjetnost, da je karta rdeča, je:

$$P(R) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0.5 \tag{3.24}$$

Verjetnost, da je karta rdeči kralj, je:

$$P(K \cdot R) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0.0625 \tag{3.25}$$

Ker sta dogodka K in R združljiva, na osnovi izraza (3.19) sledi:

$$P[K \cup R] = P[K] + P[R] - P[K \cdot R] = 0.125 + 0.5 - 0.0625 = 0.5625 \qquad (3.26)$$

Torej je verjetnost 56.25 %, da bo izvlečena karta kralj ali rdeča karta.

3.4 Pogojna verjetnost in verjetnost produkta dogodkov

V nekem poskusu *X* naj bosta *A* in *B* dva dogodka. Verjetnost dogodka *A* pri dodatnem pogoju, da na njegovo realizacijo vpliva dogodek *B*, imenujemo **pogojna verjetnost**. Označimo jo z $P(A/B)$ in preberemo kot *pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B*. Definirana je z naslednjim izrazom [33]:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \qquad (3.27)$$

Podobno velja tudi:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} \qquad (3.28)$$

Iz izrazov (3.27) in (3.28) pa lahko izrazimo tudi verjetnost produkta dveh dogodkov:

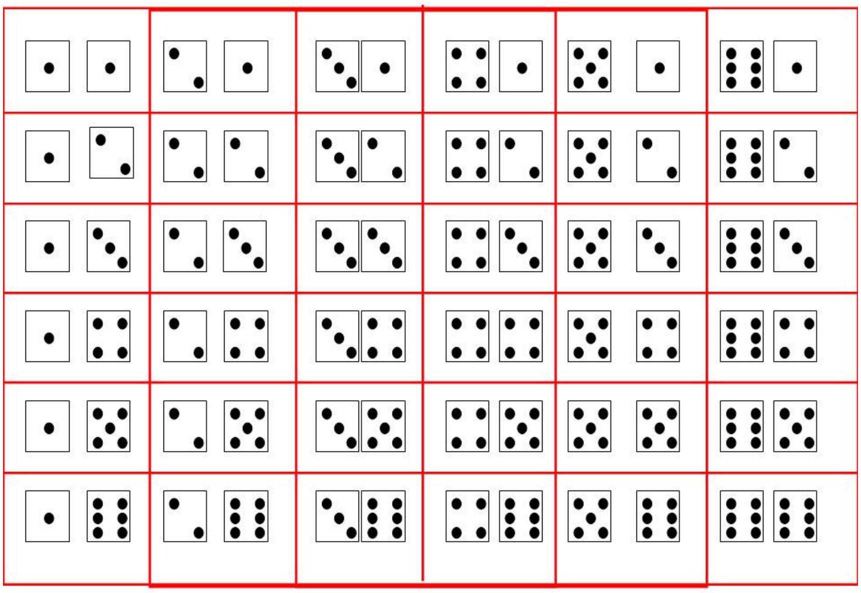
$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (3.29)$$

Ta izraz lahko posplošimo, če imamo opravka z več dogodki, npr z *n* dogodki. Potem velja [33]:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (3.30)$$

Poglejmo si nekaj primerov.

Vržemo dve (pošteni) kocki. Naj bo dogodek A enak: A={2 se pojavi vsaj na eni kocki} in dogodek *B enak: B={skupni seštevek je enak 6}. Poiščite pogojno verjetnost P[A/B] (glej sliko 20)!*



Slika 20: 36 možnih izidov pri metu dveh kock

Dogodek B je sestavljen iz naslednjih elementarnih dogodkov:

B = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}.

Dogodek $A \cap B$ dobimo, če v možnih izidih dogodka B poiščemo tiste, kjer se nahaja vsaj ena dvojka (saj ta lastnost pripada dogodku A):

$$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$$

Najprej izračunajmo verjetnost za dogodek B:

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

Nato izračunajmo verjetnost za dogodek $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

Odtod pa sledi na osnovi izraza (3.27):

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

Torej je 40% verjetnosti, da se bo dvojka pojavila vsaj na eni kocki, če je bil skupni seštevek enak 6.

V nadaljevanju si poglejmo še en primer [18].

Mož in žena rada gledata televizijo. Verjetnost, da jo mož gleda, je 80%, verjetnost, da jo žena gleda, pa je 65%. Verjetnost, da jo skupaj gledata, je 60%. Če vemo, da mož gleda neko oddajo, kakšna je verjetnost, da jo tudi žena gleda?

Naj bo A dogodek, da mož gleda oddajo in B dogodek, da jo gleda žena. Torej velja:

$$P(A)=0.8$$
$$P(B)=0.65$$

Verjetnost, da skupaj gledata oddajo, je:

$$P(A\cap B)=0.6$$

Odtod lahko na osnovi izraza (3.28) zapišemo:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75$$

Torej je 75% verjetnosti, da bo žena gledala oddajo, če vemo, jo gleda mož.

3.5 Zakon totalnih verjetnosti

Za zakon totalnih verjetnosti velja naslednji izrek [18]:

Naj bodo $E_1, E_2, ..., E_n$ med seboj nezdružljivi dogodki, ki skupaj tvorijo prostor S. Torej velja: $S=\{E_1, E_2, ..., E_n\}$. Potem za vsak dogodek A velja naslednji izraz:

$$
\begin{aligned}
&P[A] = P\left[A|E_1\right]\cdot P[E_1] + P\left[A|E_2\right]\cdot P[E_2] + ... + P\left[A|E_n\right]\cdot P[E_n] \\
&P[A] = \sum_{i=1}^{n} P\left[A|E_i\right] P[E_i]
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

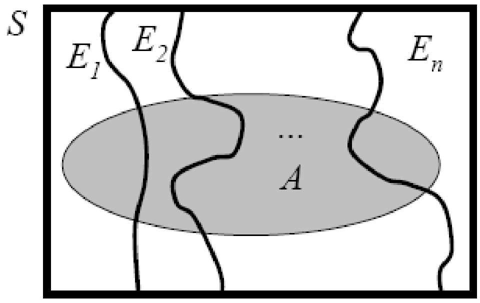
<u>Dokaz</u>: [18]

Gotovo lahko zapišemo naslednje (glej sliko 21):

$$A = \left(A \cap E_1\right) \cup \ldots \cup \left(A \cap E_n\right) \tag{3.32}$$

pri čemer velja:

$$\left(A \cap E_i\right) \cap \left(A \cap E_j\right) = \phi \tag{3.33}$$



Slika 21: Ilustracija principa totalne verjetnosti

Če izrazimo verjetnost dogodka A, dobimo:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\left[\left(A \cap E_1\right) \cup \ldots \cup \left(A \cap E_n\right)\right] = \\
&= P\left[\left(A \cap E_1\right)\right] + P\left[\left(A \cap E_2\right)\right] + ... + P\left[\left(A \cap E_n\right)\right] = \\
&= P\left[\left(A \cdot E_1\right)\right] + P\left[\left(A \cdot E_2\right)\right] + ... + P\left[\left(A \cdot E_n\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Na osnovi izraza (3.29) lahko za vsak člen v (3.34) uporabimo izraz za pogojno verjetnost in tako dobimo:

$$P(A) = \left(A|E_1\right)\cdot P(E_1) + \ldots + P\left(A|E_n\right)\cdot P(E_n) \tag{3.35}$$

Ker je dobljeni izraz enak izrazu (3.31), smo zgornji izrek dokazali.

Poglejmo si primer [18]:

Kocko mečemo enkrat. Če padeta 1 ali 2, vržemo še enkrat in končamo poskus. Kakšna je verjetnost, da bo končni seštevek meta (ali metov) vsaj 4?

Naj bo Ei dogodek, da je v prvem metu padlo število i. Očitno velja:

$$E_i = \{ padlo \;\; je \; število \, i \}, \; i = 1,2,3,4,5,6$$

$$P(E_i) = \frac{1}{6}$$

Imenujmo dogodek A kot:

$$A = \{ seštevek \;\; metov \geq 4 \}$$

Če v prvem metu pade 4, 5 ali 6, potem se dogodek A gotovo realizira. To pomeni:

$$P(A / E_i) = 1, i = 4,5,6$$

Če v prvem metu pade 3, potem ne bomo še enkrat metali in potemtakem zagotovo ne bo mogoče realizirati dogodka A. Drugače povedano to pomeni:

$$P(A / E_3) = 0$$

Če v prvem metu pade 1 (dogodek E_1), potem se A realizira le, če se v drugem metu realizira dogodek B_1:

$$B_1 = \{ v \; 2. \, metu \;\; pade \;\; število \geq 3 \}$$

Odtod pa sledi:

$$P(A / E_1) = P(B_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Če v prvem metu pade 2 (dogodek E_2), potem se A realizira le, če se v drugem metu realizira dogodek B_2:

$$B_2 = \{ v \; 2. \, metu \;\; pade \;\; število \geq 2 \}$$

Odtod pa sledi:

$$P(A / E_2) = P(B_2) = \frac{5}{6}$$

Na osnovi izraza (3.31) dobimo naslednjo totalno verjetnost:

$$P[A] = P\left[A \middle| E_1\right] \cdot P[E_1] + P\left[A \middle| E_2\right] \cdot P[E_2] + ... + P\left[A \middle| E_6\right] \cdot P[E_6]$$

$$P[A] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{2} = \frac{4+5+18}{36} = \frac{27}{36}$$

3.6 Neodvisnost dogodkov

Dogodka A in B sta neodvisna, če velja [18, 33]:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3.36}$$

Posledica izraza (3.36) je, da izraz za pogojno verjetnost (3.27) preide v obliko:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \tag{3.37}$$

Podobno potem velja tudi:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \tag{3.38}$$

Z drugimi besedami medsebojna neodvisnost dogodkov A in B pomeni, da informacija o A nič ne prispeva k informaciji o B in obratno.

Pokazati se da, da v primeru neodvisnosti dogodkov A in B velja tudi medsebojna neodvisnost dogodkov [33]:

$$\begin{gathered} A \ \ in \ \ \overline{B} \\ \overline{A} \ \ in \ \ B \ \ ter \\ \overline{A} \ \ in \ \ \overline{B}. \end{gathered}$$

Pojem neodvisnosti dogodkov lahko razširimo tudi na več, npr. *n* dogodkov: Če so ti dogodki neodvisni, potem velja [33]:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \tag{3.39}$$

Poglejmo si primer [18]:

Kovanec vržemo trikrat. Naj bo A = "prva številka pade pri drugem metu" in B="padlo je več pisem kot številk". Ali sta A in B neodvisna?

Najprej ugotovimo prostor vseh možnih izidov S:

$$S = \{PPP, PPŠ, PŠP, PŠŠ, ŠPP, ŠPŠ, ŠŠP, ŠŠŠ\}$$

Dogodka A in B sta sestavljena iz naslednjih elementarnih dogodkov:

$$A = \{PŠP, PŠŠ\}$$
$$B = \{PPŠ, PŠP, ŠPP, PPP\}$$

Izračunajmo verjetnosti dogodkov A in B, ter preseka obeh dogodkov $A \cap B = \{PŠP\}$:

$$P[A] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$
$$P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ in}$$
$$P[A \cap B] = \frac{1}{8}$$

Ker je produkt verjetnosti dogodkov $P(A) \cdot P(B)$ enak verjetnosti preseka (produkta) teh dveh dogodkov $P(A \cap B) = P(A \cdot B)$, je izraz (3.36) izpolnjen, dogodka A in B pa sta neodvisna.

3.7 Bayesovo pravilo

Poglejmo si naslednji izrek [18]:

Naj bodo $E_1, E_2, ..., E_k$ elementarni dogodki, ki so med seboj izključujoči. Potemtakem velja:

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k \qquad (3.40)$$
$$E_i \cap E_j = \phi$$

Dan imamo tudi določen dogodek B. Bayesovo pravilo se potem glasi v naslednji obliki:

$$P\left[E_i \middle| B\right] = \frac{P\left[B \middle| E_i\right] P[E_i]}{P\left[B \middle| E_1\right] P[E_1] + \ldots + P\left[B \middle| E_k\right] P[E_k]}, \; i = 1, 2, ..., k$$
$$P\left[E_i \middle| B\right] = \frac{P\left[B \middle| E_i\right] P[E_i]}{\sum_{j=1}^{k} P\left[B \middle| E_j\right] P\left[E_j\right]}, \; i = 1, 2, ..., k \qquad (3.41)$$

Ker pa z upoštevanjem izraza (3.31) za totalno verjetnost velja tudi:

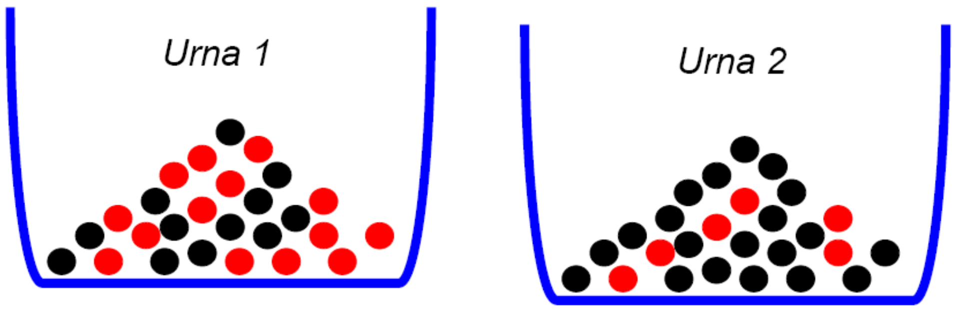
$$
\begin{aligned}
&P[B] = P\left[B|E_1\right] \cdot P[E_1] + P\left[B|E_2\right] \cdot P[E_2] + ... + P\left[B|E_k\right] \cdot P[E_k] \\
&P[B] = \sum_{j=1}^{k} P\left[B|E_j\right] P\left[E_j\right]
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

lahko izraz (3.41) zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$
P\left[E_i|B\right] = \frac{P\left[B|E_i\right] P[E_i]}{P(B)}, \ i = 1, 2, ..., k \tag{3.43}
$$

Osvetlimo uporabnost Bayesovega pravila na naslednjem primeru [18]:

Imamo dve žari (urni). Prva vsebuje 14 rdečih in 12 črnih kroglic. Druga žara vsebuje 6 rdečih in 20 črnih kroglic. Naključno izberemo eno žaro in iz nje izvlečemo (spet naključno) eno kroglico. Če smo izvlekli rdečo kroglico, kolikšna je verjetnost, da smo jo izvlekli iz prve žare (glej sliko 22)?



Slika 22: Dve žari, kjer ilustriramo uporabnost Bayesovega pravila

Označimo z A naslednji dogodek:

$$A = \{izbrali \ \ smo \, 1.žaro\}$$

Seveda je potem $\bar{A}$ dogodek, da smo izbrali 2. žaro. Gotovo velja naslednje:

$$P[A] = P\left[\bar{A}\right] = \frac{1}{2}$$

Označimo z B dogodek:

$$B = \{izbrali \ \ smo \ rdečo \ \ kroglico\}$$

Zanima nas verjetnost $P(A/B)$, ki jo na osnovi izraza (3.43) dobimo s pomočjo izraza:

$$P\left[A|B\right]=\frac{P\left[B|A\right]P\left[A\right]}{P(B)}$$

V nadaljevanju izračunamo $P(B/A)$, torej verjetnost, da smo potegnili rdečo kroglico, če vemo, da smo jo potegnili iz 1. žare. Gotovo velja naslednje:

$$P\left[B|A\right]=\frac{14r}{14r+12\check{c}}=\frac{14}{26}=\frac{7}{13}$$

Izračunati moramo tudi verjetnost $P(B)$, ki pa jo dobimo na osnovi izreka o totalni verjetnosti (glej izraz (3.42)):

$$P\left[B\right]=P\left[B/A\right]\cdot P\left[A\right]+P\left[B|\bar{A}\right]\cdot P\left[\bar{A}\right]$$

Za izračun $P(B)$ pa najprej potrebujemo še izračun verjetnosti $P(B/\bar{A})$, torej verjetnosti, da smo potegnili rdečo kroglico, če vemo, da smo jo potegnili iz 2. žare. Gotovo velja naslednje:

$$P\left[B|\bar{A}\right]=\frac{6r}{6r+20\check{c}}=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$$

Torej za $P(B)$ velja:

$$P\left[B\right]=\frac{7}{13}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$$

Sedaj, ko smo izračunali vse delne rezultate, lahko izračunamo tudi $P(A/B)$:

$$P\left[A|B\right]=\frac{P\left[B|A\right]P\left[A\right]}{P(B)}=\frac{\frac{7}{13}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{13}}=\frac{7\cdot 13}{13\cdot 2\cdot 5}=\frac{7}{10}$$

Torej je verjetnost 70%, da smo izvlekli kroglico iz prve žare, če vemo, da je bila rdeča.

3.8 Diskretne naključne spremenljivke

Pri nekaterih poskusih so lahko izidi tudi števila. Npr., pri kockanju je izid število pik, torej neko naravno število med 1 in 6. Pri *n*-kratni ponovitvi poskusa je izid frekvenca danega dogodka A, torej katerokoli celo število od 0 do n. Pri streljanju v tarčo pa imamo lahko za izid razdaljo med lego zadetka in sredino tarče, se pravi kakšno nenegativno realno število, seveda ne neomejeno veliko.

Na takšne poskuse lahko gledamo, kot da jim je prirejena neka količina, ki ima lahko različne vrednosti. Katero vrednost pa ta količina zavzame pri dani ponovitvi poskusa, pa je odvisno od naključja (slučaja). Zato imenujemo takšne količine naključne (slučajne) spremenljivke [14].

Pri slučajnih spremenljivkah moramo poznati dvoje [14, 33]:

- zalogo vrednosti,
- predpis, ki določa verjetnosti, da naključna spremenljivka zavzame določeno vrednost (porazdelitven zakon).

Slučajna spremenljivka je torej količina, ki ima svojo vrednost odvisno od slučaja in je natanko določena s svojo zalogo vrednosti ter s svojim porazdelitvenim zakonom [33].

Slučajne spremenljivke običajno označujemo z *X, Y, Z*, itn, ali pa tudi $X_1, X_2, X_3, \ldots$, pripadajoče vrednosti slučajnih spremenljivk pa označujemo z malimi črkami *x, y, z*, itn, oz. $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Dogodek, da slučajna spremenljivka zavzame določeno vrednost iz svoje zaloge, označujemo z $(X = x)$, $(x_1 < X < x_2)$, $(X \geq x)$, itn [33].

Slučajne spremenljivke v splošnem delimo na:

- diskretne slučajne spremenljivke, ter
- zvezne slučajne spremenljivke.

Diskretne slučajne spremenljivke so tiste spremenljivke, katerih zaloga vrednosti je neko končno ali neskončno zaporedje. Pri zveznih slučajnih spremenljivkah pa zalogo vrednosti ne moremo numerirati z naravnimi števili, pač pa je zaloga vrednosti določen končen ali neskončen interval realnih števil [14,33].

Poglejmo si nekaj pojmov [14]:

- $(X = x)$ je dogodek, da zavzame naključna spremenljivka *X* vrednost *x*,
- $P(x) = P(X = x)$ pa pomeni verjetnost tega dogodka,
- $(X > x)$ je dogodek, da zavzame naključna spremenljivka *X* vrednost, ki je večja od *x*,
- $P(X > x)$ pa je verjetnost tega dogodka. Itn...

Funkcijo $P(x) = P(X = x)$ običajno imenujemo tudi funkcija porazdelitve verjetnosti [18]. V terminologiji v različni literaturi se srečamo tudi z izrazom verjetnostna funkcija, s katero običajno podajamo splošno obliko porazdelitvenega zakona diskretnih slučajnih spremenljivk [33]. V povezavi s tem si poglejmo naslednjo definicijo [33]:

Verjetnostna funkcija p_k *diskretne slučajne spremenljivke X je funkcija, ki ima pri vsakem mogočem k svojo vrednost enako verjetnosti dogodka* $(X = x_k)$*, torej velja:* $p_k = P(X = x_k) = P(x_k)$*. Pri tem k preteče vse tiste cele vrednosti, za katere spada* x_k *v zalogo vrednosti diskretne slučajne spremenljivke X.*

Zaradi preglednosti običajno zapišemo pri diskretnih naključnih spremenljivkah zalogo vrednosti in porazdelitveni zakon v obliki takoimenovane verjetnostne sheme. Npr., za naključno spremenljivko *X* zapišemo shemo takole:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

Seveda pri tem velja, da je [34]:

$$p_1 + p_2 + ... p_n = 1 \tag{3.45}$$

saj sestavljajo $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ popoln sistem vrednosti.

Na koncu tega poglavja si poglejmo še dva primera, odkoder bo popolnoma jasna razlika med diskretnimi in zveznimi naključnimi spremenljivkami.

Primer [18]:

Enkrat vržemo dva kovanca. Naj diskretna spremenljivka X označuje število padlih grbov. Poiščite verjetnostno shemo.

X je diskretna naključna diskretna spremenljivka, ki lahko zavzame vrednosti 0,1,2 z verjetnostmi:

$$P\left[X = 0\right] = P[(\check{S}, \check{S})] = \frac{1}{4}$$
$$P\left[X = 1\right] = P[(\check{S}, G), (G, \check{S})] = \frac{2}{4}$$
$$P\left[X = 2\right] = P[(G, G)] = \frac{1}{4}$$

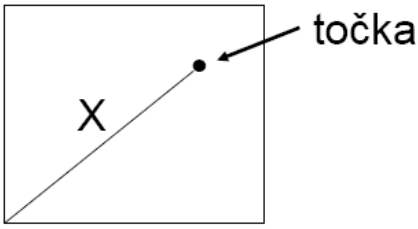
kjer *Š* pomeni padlo številko, *G* pa padli grb.

Verjetnostna shema torej je:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Primer [18]:

Znotraj kvadrata stranice 1 naključno izberemo zočko. Oddaljenost točke od levega spodnjega roba je naključna spremenljivka X. Ker X lahko zavzame katerokoli realno vrednost med 0 in $\sqrt{2}$, *je X zvezna naključna spremenljivka (glej sliko 23).*



Slika 23: Ilustracija primera zvezne naključne spremenljivke X

3.8.1 Primeri diskretnih porazdelitev

Porazdelitveni zakon diskretne naključne spremenljivke se imenuje na kratko diskretna porazdelitev [14]. Naštejmo nekatere važnejše diskretne porazdelitve [14]:

- Binomska porazdelitev,
- Enakomerna porazdelitev, ter
- Poissonova porazdelitev.

Diskretna naključna spremenljivka je porazdeljena enakomerno, če sestavljajo njeno zalogo vrednosti števila $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ (vsa različna med seboj) in za vsak k od 1 do n velja [14]:

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n} \tag{3.46}$$

Zgled za enakomerno diskretno porazdelitev je npr. število pik pri kockanju [14].

Za binomsko porazdelitev je značilno, da je porazdeljena naključna spremenljivka X po takoimenovanem binomskem zakonu, pri čemer ima zalogo vrednosti $\{0,1,2,...,n\}$. Po binomskem zakonu je porazdeljena frekvenca dogodka A v n ponovitvah poskusa, v katerem ima A verjetnost p. Verjetnostna funkcija se glasi ($0 < p < 1$):

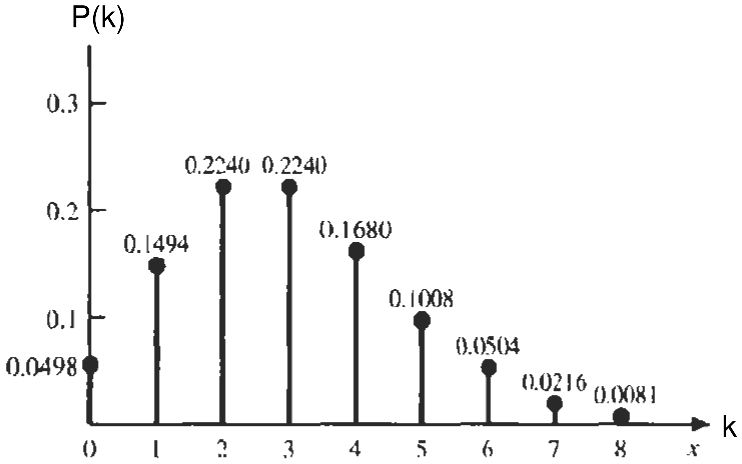
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,...,n \tag{3.47}$$

Binomsko porazdelitev si bomo natančneje pogledali v nadaljevanju.

Naključna spremenljivka, porazdeljena po Poissonovem zakonu, ima zalogo vrednosti $\{0,1,2,...\}$ in verjetnostno funkcijo [14]:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,... \tag{3.48}$$

Primer Poissonove porazdelitve je za parameter $\lambda = 3$ ilustriran na sliki 24.



Slika 24: Primer Poissonove porazdelitve za $\lambda = 3$

Seveda poleg naštetih diskretnih porazdelitev obstajajo še tudi druge porazdelitve, kot npr.:

- Pascalova porazdelitev,
- Geometrijska porazdelitev,
- Hipergeometrijska porazdelitev, itn.

Več o tovrstnih porazdelitvah si lahko bralec pogleda v literaturi [11, 33].

Preden gremo na natančnejšo obravnavo binomske porazdelitve in z njo tesno povezanega Bernoullijevega poskusa, pa si v nadaljevanju oglejmo še nekaj lastnosti takoimenovane kumulativne porazdelitve.

3.9 Kumulativna porazdelitev verjetnosti

Funkcija kumulativne porazdelitve verjetnosti *F(x)* naključne spremenljivke *X* je definirana na naslednji način [18]:

$$F(x) = P[X \leq x], \quad -\infty < x < \infty \tag{3.48}$$

Funkcija (3.48) je zanimiva zato, ker se da tudi iz nje razbrati veliko informacije o naključnem eksperimentu. Poglejmo si nekaj njenih lastnosti [11]:

$$\begin{aligned}
&1.\quad 0 \leq F(x) \leq 1 \\
&2.\quad F(x_1) \leq F(x_2), \quad \textit{če}\ \ x_1 \leq x_2 \\
&3.\quad F(-\infty) = 0 \\
&4.\quad F(\infty) = 1
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Velja tudi naslednje [11]:

$$\begin{aligned}
&F(b) = P(X \leq b) \\
&F(a) = P(X \leq a) \\
&F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \\
&= \underbrace{P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b)}_{P(X \leq b)} - P(X \leq a) = P(a \leq X \leq b) \\
&\textit{torej}: \\
&F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Prav tako še velja:

$$\begin{aligned}
&F(a) = P(X \leq a) \\
&P(X \leq a) + P(X > a) = 1 \\
&P(X > a) = 1 - P(X \leq a) \\
&P(X > a) = 1 - F(a)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Zveza med kumulativno porazdelitvijo verjetnosti in verjetnostno funkcijo je pri diskretnih naključnih spremenljivkah naslednja:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(x_k) \tag{3.52}$$

Princip kumulativne porazdelitve verjetnosti osvetlimo na naslednjem primeru [18]:

Primer: Enkrat vržemo dve kocki. Pri tem naključna spremenljivka X predstavlja vsoto padlih številk. Prostor vseh možnih dogodkov in pripadajoče vrednosti X so ilustrirane na sliki 25. Izračunajte verjetnosti za posamezne izide spremenljivke X, ter narišite funkciji porazdelitve verjetnosti in kumulativne porazdelitve verjetnosti.

(1,1) 2	(1,2) 3	(1,3) 4	(1,4) 5	(1,5) 6	(1,6) 7
(2,1) 3	(2,2) 4	(2,3) 5	(2,4) 6	(2,5) 7	(2,6) 8
(3,1) 4	(3,2) 5	(3,3) 6	(3,4) 7	(3,5) 8	(3,6) 9
(4,1) 5	(4,2) 6	(4,3) 7	(4,4) 8	(4,5) 9	(4,6) 10
(5,1) 6	(5,2) 7	(5,3) 8	(5,4) 9	(5,5) 10	(5,6) 11
(6,1) 7	(6,2) 8	(6,3) 9	(6,4) 10	(6,5) 11	(6,6) 12

Slika 25: Prostor vseh možnih dogodkov in pripadajoče vrednosti naključne spremenljivke *X* pri enkratnem metu dveh kock

Najprej izračunajmo verjetnosti za posamezne izide spremenljivke *X*:

$$
\begin{aligned}
&P(1) = P[X = 1] = 0 \\
&P(2) = P[X = 2] = P\left[\{(1,1)\}\right] = \frac{1}{36} \\
&P(3) = P[X = 3] = P\left[\{(1,2),(2,1)\}\right] = \frac{2}{36} \\
&P(4) = P[X = 4] = P\left[\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\right] = \frac{3}{36} \\
&P(5) = \frac{4}{36}, P(6) = \frac{5}{36}, P(7) = \frac{6}{36}, P(8) = \frac{5}{36}, P(9) = \frac{4}{36} \\
&P(10) = \frac{3}{36}, P(11) = \frac{2}{36}, P(12) = \frac{1}{36} \\
&P(i) = P[X = i] = 0, \qquad i = 13, 14, \ldots
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

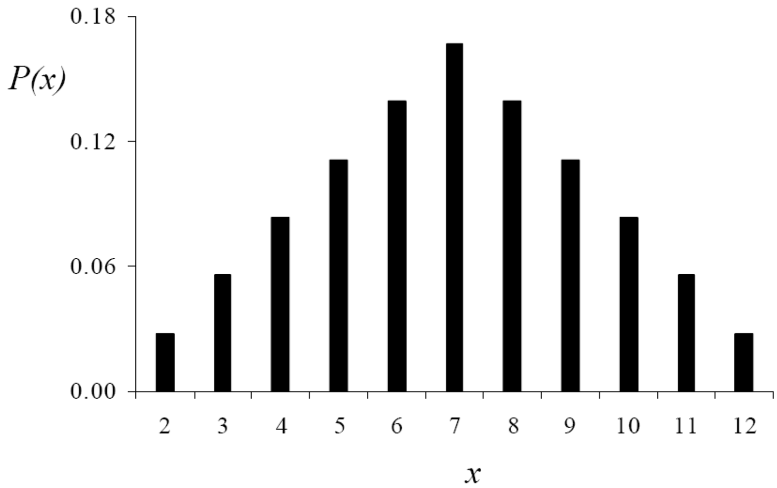
Nato na osnovi izračunanih izrazov v (3.53) narišemo funkcijo porazdelitve verjetnosti, kar prikazuje slika 26. Vrednosti funkcije kumulativne porazdelitve verjetnosti pa izračunamo s pomočjo izraza (3.52). Tako dobimo:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ 0+\frac{1}{36} & 2\le x<3 \\ 0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36} & 3\le x<4 \\ 0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36} & 4\le x<5 \\ \ldots & \end{cases} \tag{3.54}$$

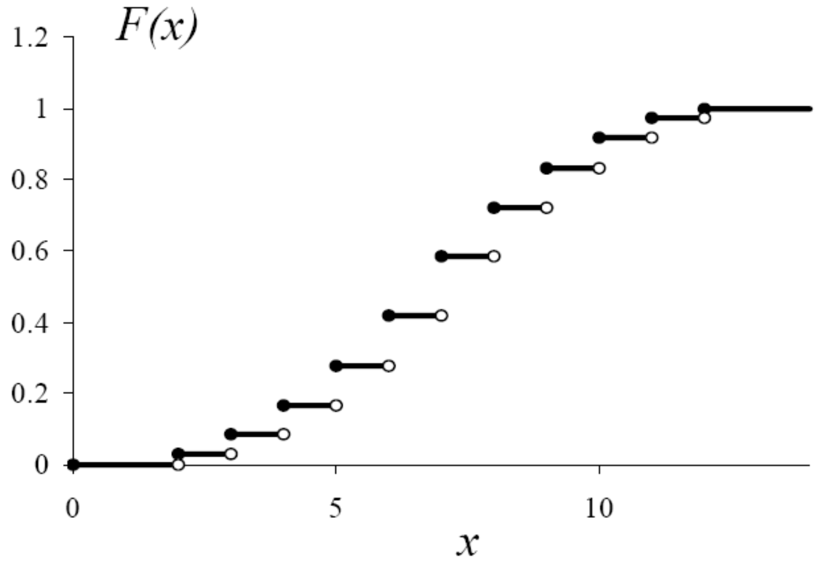
oziroma, če izračunamo vse vrednosti, dobimo:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \frac{1}{36} & 2\le x<3 \\ \frac{3}{36} & 3\le x<4 \\ \frac{6}{36} & 4\le x<5 \\ \frac{10}{36} & 5\le x<6 \\ \frac{15}{36} & 6\le x<7 \\ \frac{21}{36} & 7\le x<8 \\ \frac{26}{36} & 8\le x<9 \\ \frac{30}{36} & 9\le x<10 \\ \frac{33}{36} & 10\le x<11 \\ \frac{35}{36} & 11\le x<12 \\ 1 & 12\le x \end{cases} \tag{3.55}$$

Nazadnje na osnovi izračunanega izraza (3.55) narišemo še funkcijo kumulativne porazdelitve verjetnosti, kar prikazuje slika 27.



Slika 26: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri enkratnem metu dveh kock



Slika 27: Funkcija kumulativne porazdelitve verjetnosti pri enkratnem metu dveh kock

3.10 Bernoullijeva porazdelitev

Predpostavimo, da imamo Bernoullijev poskus, pri katerem sta možna dva izida (S - success oz. uspeh, ter F - failure oz. neuspeh):

- ugoden izid (S), in
- neugoden izid (F).

Tipičen primer takšnega poskusa je proizvodnja, kjer je na koncu izdelek dober ali slab (izmet). Predpostavimo tudi, da je verjetnost za ugoden izid p, za neugoden izid pa $q = 1 - p$. Potem lahko definiramo takoimenovano Bernoullijevo naključno spremenljivko X, s katero opišemo izid Bernoullijevega poskusa [18]:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{če je izid F (neuspešen)} \\ 1 & \text{če je izid S (uspešen)} \end{cases} \tag{3.56}$$

Porazdelitev verjetnosti za takšno spremenljivko pa je definirana na naslednji način [11,18] (Bernoullijeva porazdelitev):

$$P(k) = P(X = k) = p^k \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}^{1-k}, \qquad k = 0,1 \tag{3.57}$$

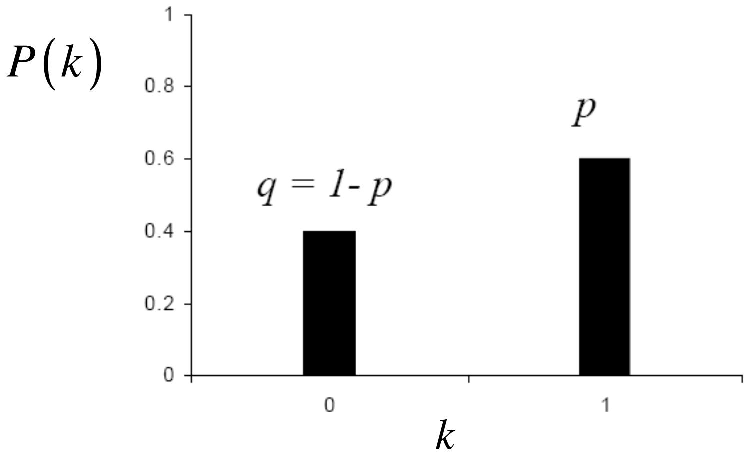
Izraz (3.57) lahko zapišemo tudi drugače:

$$\begin{aligned} P(0) &= P(X = 0) = p^0 \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}^{1-0} = q \\ P(1) &= P(X = 1) = p^1 \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}^{1-1} = p \end{aligned} \tag{3.58}$$

Torej velja:

$$P(k) = P[X = k] = \begin{cases} q & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases} \tag{3.59}$$

Ilustracijo Bernoullijeve porazdelitve prikazuje slika 28.



Slika 28: Ilustracija Bernoullijev porazdelitve

3.11 Binomska porazdelitev

Dva poskusa imenujemo med seboj neodvisna, če je vsak dogodek iz enega poskusa neodvisen od kateregakoli dogodka v drugem poskusu [14]. Tudi za več poskusov velja podobno. Če so dogodki teh poskusov med seboj v celoti neodvisni, potem so tudi poskusi med seboj neodvisni. V zaporedju neodvisnih poskusov ni potrebno, da bi bili poskusi med seboj enaki. Preprosteje pa je, če so. Zaporedje enakih neodvisnih poskusov lahko imenujemo tudi ponavljanje istega poskusa. Tako zaporedje je npr. metanje kocke, serijska proizvodnja, itn [14].

Med zaporedji enakih neodvisnih poskusov so še posebej zanimiva zaporedja Bernoullijevih poskusov, torej takšnih poskusov, kjer sta možna le dva izida (npr. met kovanca).

V nadaljevanju predpostavimo, da imamo opravka z Bernoullijevim poskusom, ki ga ponovimo n-krat, pri čemer je seveda vsaka ponovitev poskusa neodvisna od prejšnjih poskusov.

Naj bo naključna spremenljivka X število ugodnih izidov v seriji n-tih Bernoullijevih poskusov. Potem lahko ugotovimo, da so možne vrednosti X enake:

$$X \in \{0, 1, 2, ..., n\} \tag{3.60}$$

Če je npr. n = 5, potem lahko prostor elementarnih dogodkov, pripadajoče vrednosti naključne spremenljivke X in pripadajočo verjetnost elementarnih dogodkov podamo s sliko 29 (npr. imamo opravka s petkratnim metanjem kovanca, S = uspeh, F = neuspeh) [18].

Elementarni dogodki

Vrednosti X

Verjetnosti

FFFFF 0 q^5	*SFFFF* 1 pq^4	*FSFFF* 1 pq^4	*FFSFF* 1 pq^4	*FFFSF* 1 pq^4	*FFFFS* 1 pq^4	*SSFFF* 2 p^2q^3	*SFSFF* 2 p^2q^3
SFFSF 2 p^2q^3	*SFFFS* 2 p^2q^3	*FSSFF* 2 p^2q^3	*FSFSF* 2 p^2q^3	*FSFFS* 2 p^2q^3	*FFSSF* 2 p^2q^3	*FFSFS* 2 p^2q^3	*FFFSS* 2 p^2q^3
SSSFF 3 p^3q^2	*SSFSF* 3 p^3q^2	*SSFFS* 3 p^3q^2	*SFSSF* 3 p^3q^2	*SFSFS* 3 p^3q^2	*SFFSS* 3 p^3q^2	*FSSSF* 3 p^3q^2	*FSSFS* 3 p^3q^2
FSFSS 3 p^3q^2	*FFSSS* 3 p^3q^2	*SSSSF* 4 p^4q	*SSSFS* 4 p^4q	*SSFSS* 4 p^4q	*SFSSS* 4 p^4q	*FSSSS* 4 p^4q	*SSSSS* 5 p^5

Slika 29: Ilustracija prostora elementarnih dogodkov, pripadajoče vrednosti naključne spremenljivke X in pripadajoče verjetnosti elementarnih dogodkov pri petkratni ponovitvi Bernoullijevega poskusa (S = uspel poskus z verjetnostjo p, F = neuspel poskus z verjetnostjo q)

Iz slike 29 je razvidno, da X vsakič zavzame takšno vrednost, kolikor je bilo uspešnih poskusov S v posameznem elementarnem dogodku (petkratna ponovitev poskusa). Posamezne verjetnosti petkratne ponovitve poskusa so pa enake produktu verjetnosti posameznega poskusa (ki, kot vemo, zavzamejo p v primeru uspeha S in q v primeru neuspeha F). Tako je npr. $P(FFFFF) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5$, podobno je $P(SFFFF) = p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = p \cdot q^4$, itn.

Na osnovi slike 29 lahko izračunamo verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke X. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
&P(0) = P(X=0) = P(FFFFF) = q^5 \\
&P(1) = P(X=1) = \\
&= P(SFFFF) + P(FSFFF) + P(FFSFF) + P(FFFSF) + P(FFFFS) = \\
&= p \cdot q^4 + p \cdot q^4 + p \cdot q^4 + p \cdot q^4 + p \cdot q^4 = 5 \cdot p \cdot q^4 \\
&P(2) = P(X=2) = \ldots = 10 \cdot p^2 \cdot q^3 \\
&P(3) = P(X=3) = \ldots = 10 \cdot p^3 \cdot q^2 \\
&P(4) = P(X=4) = \ldots = 5 \cdot p^4 \cdot q \\
&P(5) = P(X=5) = P(SSSSS) = p^5
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Izračune v izrazu (3.61) lahko tudi bolj pregledno zapišemo v obliki verjetnostne sheme, prikazane na sliki 30.

x	0	1	2	3	4	5
$P(x) = P[X = x]$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

Slika 30: Verjetnostna shema za naključno spremenljivko X pri petkratni ponovitvi Bernoullijevega poskusa

Na podoben način, kot smo sklepali pri n = 5, torej petkratni ponovitvi Bernoullijevega poskusa, lahko sklepamo tudi za poljuben n. Tedaj je izid zaporedja Bernoullijevih poskusov neko poljubno zaporedje uspehov S in neuspehov F, ki ima dolžino n:

$$SSFSFFSFFF \ldots FSSSFFSFSFFS \tag{3.62}$$

Denimo je v tem zaporedju *k* uspehov in *n-k* neuspehov. Verjetnost, da je v zaporedju *k* uspehov, je:

$$P\left(k\ uspehov\ S\right)=\underbrace{p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot ...p}_{k-krat}=p^{k} \tag{3.63}$$

Verjetnost, da je v zaporedju n-k neuspehov, je:

$$P\left(n-k\ neuspehov\ F\right)=\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot ...q}_{(n-k)-krat}=q^{n-k} \tag{3.64}$$

Verjetnost, da se v seriji n poskusov zgodi *k* uspešnih poskusov in *n-k* neuspešnih poskusov, torej je:

$$P\left(k\ uspehov\ S\ in\ n-k\ neuspehov\ F\right)=\binom{n}{k}\cdot\underbrace{P\left(k\ uspehov\ S\right)}_{p^{k}}\cdot\underbrace{P\left(n-k\ neuspehov\ F\right)}_{q^{n-k}} \tag{3.65}$$

kjer smo z $\binom{n}{k}$ še upoštevali število vseh možnih zaporedij, kjer se zgodi *k* uspehov in *n-k* neuspehov [14, 18].

Na osnovi izrazov (3.63), (3.64) in (3.65) tako pridemo do izraza za Binomsko diskretno porazdelitev naključne spremenljivke *X*, ki jo izrazimo z naslednjo verjetnostno funkcijo (seveda je $p + q = 1$) [14,18]:

$$P\left(k\right)=P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\underbrace{\left(1-p\right)}_{q}^{n-k},\quad k=0,1,2,...,n \tag{3.66}$$

Princip binomske porazdelitve bomo osvetlili na naslednjem primeru [18]:

Kovanec mečemo 7-krat, t.j. n = 7. Naj bo X naključna spremenljivka, ki pove, kolikokrat je padlo pismo P. Poiščite binomsko porazdelitev naključne spremenljivke X!

Ker sta pri vsakem poskusu možna le dva izida P (pismo) ali Š (številka), ima *X* očitno binomsko porazdelitev, kjer sedemkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Seveda velja:

$$
\begin{aligned}
p &= P(P) = \frac{1}{2} \\
q &= P(\check{S}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke X izračunamo s pomočjo izraza (3.66):

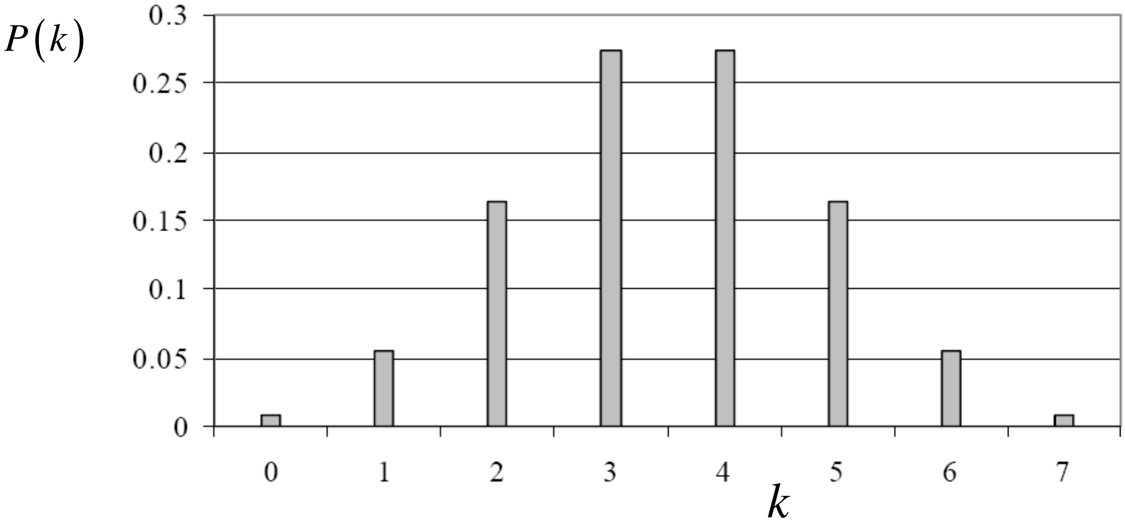
$$
\begin{aligned}
P(k) &= P(X = k) = \binom{7}{k} \cdot p^k \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}^{7-k}, \quad k = 0,1,2,...,7 \\
P(k) &= P(X = k) = \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}, \quad k = 0,1,2,...,7 \\
P(k) &= P(X = k) = \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7, \quad k = 0,1,2,...,7
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Če bi v izrazu (3.68) izračunali verjetnosti za vse $k = 0,1,...,7$, bi dobili verjetnostno shemo, kot jo prikazuje slika 31.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(k)$	$^1/_{128}$	$^7/_{128}$	$^{21}/_{128}$	$^{35}/_{128}$	$^{35}/_{128}$	$^{21}/_{128}$	$^7/_{128}$	$^1/_{128}$

Slika 31: Verjetnostna shema za naključno spremenljivko *X* pri sedemkratnem metu kovanca

Binomsko porazdelitev naključne spremenljivke *X* bi lahko na osnovi slike 31 predstavili tudi v obliki grafa, ki ga prikazuje slika 32.



Slika 32: Binomska porazdelitev naključne spremenljivke *X* pri sedemkratnem metu kovanca

3.12 Zvezne naključne spremenljivke

Za zgled tovrstnih spremenljivk uporabimo temperaturo v sobi. Ker je le-ta katerokoli realno število, recimo v intervalu med -10 stopinj in +40 stopinj, je teh števil neskončno mnogo. Kolikšna je torej verjetnost, da bo temperatura $X = 12.5$ stopinj? Kot se izkaže, je tovrstno vprašanje neprimerno zastavljeno. Zakaj? Zato, ker je elementarnih dogodkov za določeno temperaturo neskončno mnogo, saj je neskončno število možnih izidov poskusa merjenja temperature. Če bi uporabili isto logiko kot pri diskretnih naključnih spremenljivkah, bi dobili, da je verjetnost:

$$P\left(X = 12.5^{o}\right) = \frac{1}{\text{število vseh možnih izidov merjenja temperature}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

torej bi dobili popolnoma nesmiseln rezultat. Bolj smiselno bi se bilo vprašati, kakšna je verjetnost, da izmerjena temperatura zavzame vrednost npr. v intervalu med 12 in 13 stopinj, torej $P\left[12 < X \leq 13\right] = ?$

Če imamo opravka z zveznimi naključnimi spremenljivkami, potem njihova zaloga vrednosti vsebuje (končen ali neskončen) interval realnih števil [11]. Tedaj je kumulativna funkcija porazdelitve verjetnosti zvezna funkcija, za katero obstaja tudi odvod $\frac{dF(x)}{dx}$ [11]. Potem lahko vpeljemo tudi pojem zvezne funkcije porazdelitve **gostote** verjetnosti, ki se jo izračuna na naslednji način (za neko zvezno naključno spremenljivko *X*) [11, 18]:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} \tag{3.69}$$

Iz izraza (3.69) pa lahko izrazimo tudi:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{3.70}$$

torej povezavo med kumulativno funkcijo verjetnosti in funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti.

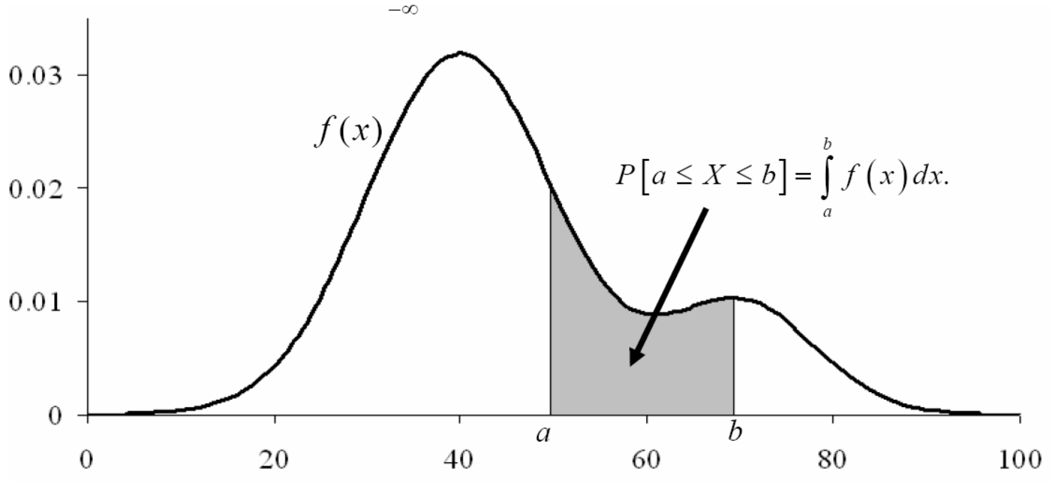
Tudi v primeru zveznih naključnih spremenljivk veljajo lastnosti v izrazu (3.49), ki smo jih predstavili že pri diskretnih naključnih spremenljivkah. Odtod sledijo za spremenljivko *f(x)* naslednje lastnosti [18,33]:

$$\begin{aligned}
&1.\ \textit{Ker je } F(x) \textit{ monotono naraščajoča funkcija, sledi}:\\
&f(x) = \frac{dF}{dx} \ge 0\\
&2.\ \textit{Ker je } F(\infty) = 1,\ \textit{sledi}:\\
&F(\infty) = P(X \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1\\
&3.\ \textit{Ker je } F(b) - F(a) = P(a \le X \le b),\ \textit{sledi}:\\
&\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = P(a \le X \le b)\\
&\textit{torej}:\\
&P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Primer zvezne funkcije porazdelitve gostote verjetnosti $f(x)$ in verjetnosti $P(a \le X \le b)$, da se zvezna naključna spremenljivka *X* nahaja na intervalu $[a,b]$, prikazuje slika 33 [18]. Kot je razvidno iz slike 33, je $P(a \le X \le b)$ enaka ploščini pod funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, ki jo dobimo z integracijo $f(x)$ na tem intervalu.

funkcija porazdelitve gostote verjetnosti, $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

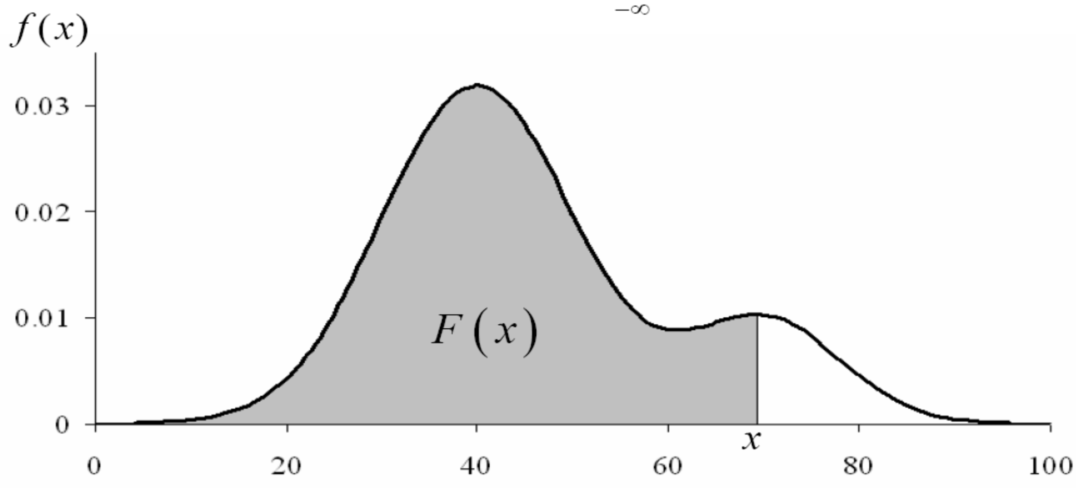


Slika 33: Primer zvezne funkcije porazdelitve gostote verjetnosti $f(x)$ in verjetnosti $P(a \le X \le b)$, da se zvezna naključna spremenljivka *X* nahaja na intervalu $[a,b]$.

Primer zvezne kumulativne funkcije porazdelitve verjetnosti $F(x)$ pa prikazuje slika 34 [18]. Kot je razvidno iz slike 34, je $F(x)$ enaka ploščini pod funkcijo $f(x)$ na intervalu $[-\infty, x]$, ki jo dobimo z integracijo $f(x)$ na tem intervalu.

Funkcija kumulativne porazdelitve verjetnosti, $F(x)$

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$



Slika 34: Primer zvezne kumulativne funkcije porazdelitve verjetnosti $F(x)$

3.12.1 Primeri zveznih porazdelitev

Porazdelitveni zakon zvezne naključne spremenljivke se imenuje na kratko zvezna porazdelitev [14]. Naštejmo nekatere važnejše zvezne porazdelitve [14]:

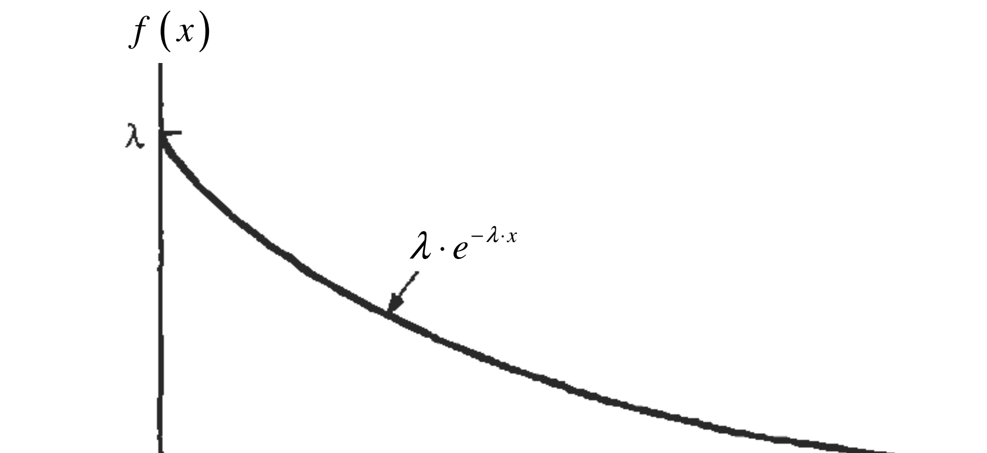
- Uniformna (enakomerna zvezna) porazdelitev,
- Normalna (Gaussova) porazdelitev,
- Eksponentna porazdelitev,
- Porazdelitev hi kvadrat,
- Studentova porazdelitev, itn.

Za nas so zanimive predvsem uniformna, normalna in eksponentna porazdelitev. Prvi dve si bomo natančneje pogledali v nadaljevanju. Več o lastnostnih posameznih zveznih porazdelitev si lahko bralec pogleda v literaturi [11, 14]. Zato si na tem mestu le na kratko poglejmo, kakšna je eksponentna porazdelitev.

Naključna spremenljivka se imenuje eksponentna s parametrom λ, če zanjo velja naslednja porazdelitev gostote verjetnosti [11]:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{3.72}$$

Primer eksponentne porazdelitve je prikazan na sliki 35.



Slika 35: Primer eksponentne porazdelitve

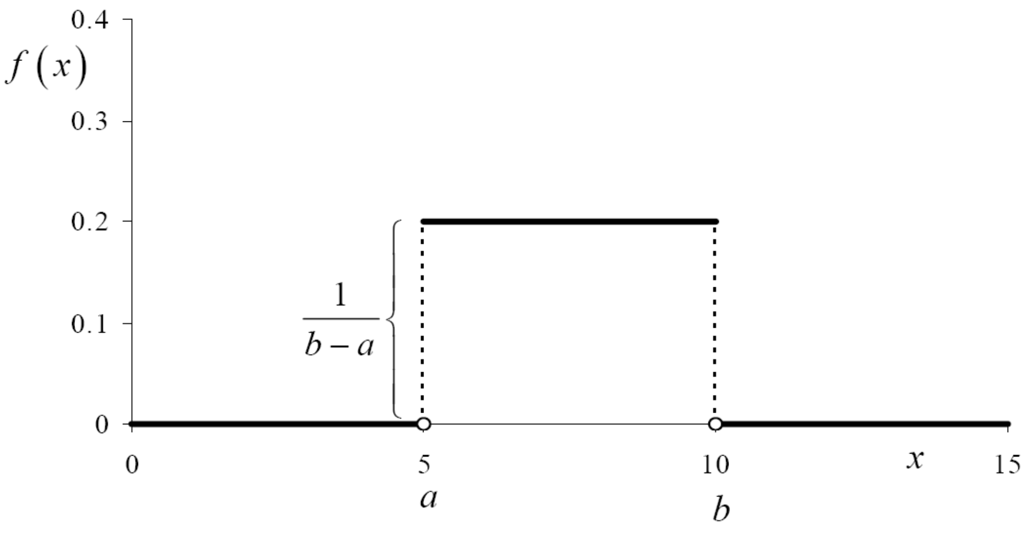
Najbolj zanimiva lastnost eksponentne porazdelitve je takoimenovana "memoryless" (Markovska) lastnost [11]. To pomeni, da če je življenjska doba nekega izdelka (komponente) eksponentno porazdeljena, potem je izdelek, ki je že bil v uporabi nekaj časa (ur), prav tako dober kot nov izdelek z obzirom na preostalo količino časa trajanja izdelka (do okvare). Torej izdelek "pozabi", koliko časa je že obratoval [11].

3.13 Uniformna porazdelitev

Naključna spremenljivka X ima Uniformno porazdelitev na intervalu $[a,b]$, če ima naslednjo funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{3.73}$$

Primer uniformne porazdelitve naključne spremenljivke X je prikazan na sliki 36.



Slika 36: Primer uniformne porazdelitve

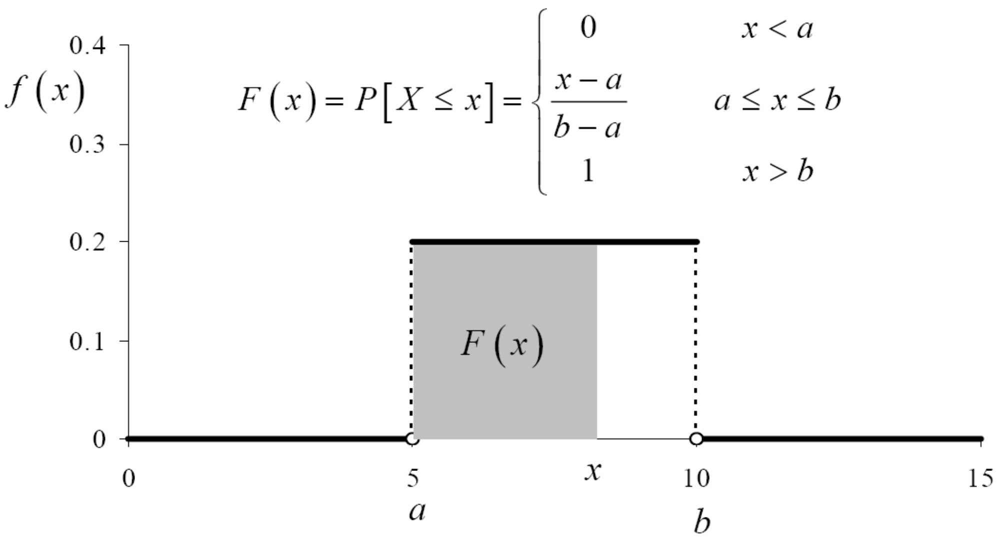
Na osnovi izraza (3.70) lahko izračunamo tudi kumulativno funkcijo porazdelitve verjetnosti $F(x)$. Na intervalu $x \in (-\infty, a)$ je njena vrednost enaka:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0, \qquad -\infty < x < a \tag{3.74}$$

Na intervalu $x \in [a,b]$ je njena vrednost enaka (glej sliko 37):

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} \cdot dt = \frac{1}{b-a}(x-a), \qquad a \le x \le b \tag{3.75}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a \le x \le b$$



Slika 37: Slika za pomoč izračuna $F(x)$ na intervalu $x \in [a,b]$

Na intervalu $x > b$ pa je njena vrednost enaka:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot dt = \frac{1}{b-a}(b-a), \qquad x > b \tag{3.76}$$

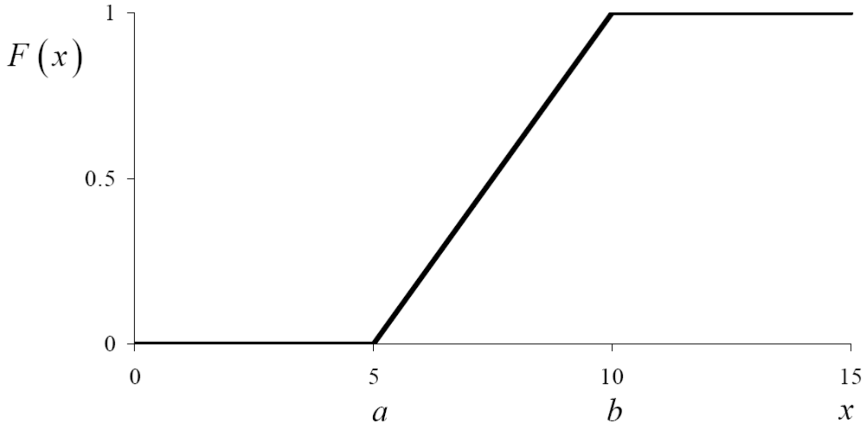
$$F(x) = 1, \qquad x > b$$

Če izraze (3.74), (3.75) in (3.76) združimo, torej dobimo za $F(x)$ naslednji izraz:

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{3.77}$$

Če funkcijo v izrazu (3.77) narišemo, dobimo primer poteka, kot ga prikazuje slika 38.

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



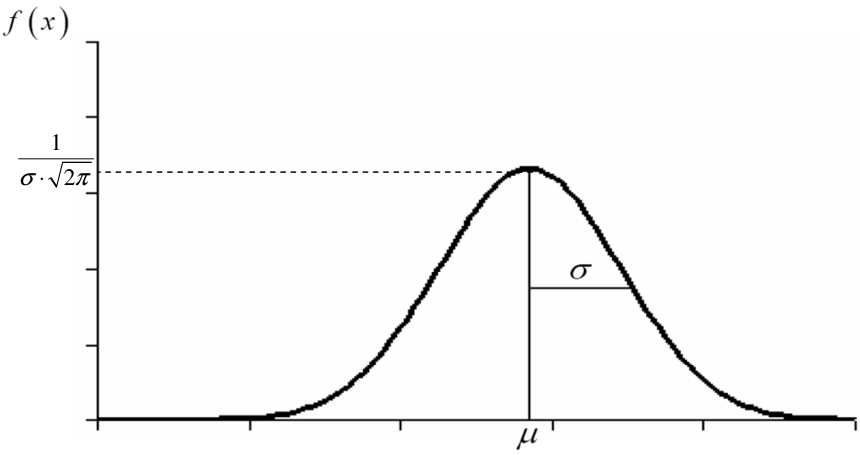
Slika 37: Kumulativna funkcija porazdelitve verjetnosti $F(x)$ pri uniformni porazdelitvi zvezne naključne spremenljivke *X*

3.14 Normalna porazdelitev

Zvezna naključna spremenljivka *X* ima normalno porazdelitev s srednjo vrednostjo μ in standardno deviacijo σ, če zanjo velja naslednja funkcija porazdelitve gostote verjetnosti [14,18,33]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3.78)$$

Primer normalne porazdelitve spremenljivke *X* prikazuje slika 38.



Slika 38: Primer normalne porazdelitve zvezne naključne spremenljivke *X*

Pri normalni porazdelitvi je μ lahko katerokoli realno število, σ pa je poljubno pozitivno število. Kot se izkaže, parameter μ določa lego krivulje, parameter σ pa njeno obliko [14]. Velja tudi, da tovrstna funkcija doseže maksimum v točki $\left(\mu, \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)$, kar lahko preprosto pokažemo z iskanjem ekstrema te funkcije. V ta namen funkcijo (3.78) najprej odvajamo in dobljeni odvod enačimo z 0, pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}f(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[-\tfrac{1}{\sigma^2}(x-\mu)\right] = 0 \\ &\textit{Odtod pa sledi}: \\ &x - \mu = 0 \\ &\textit{oziroma}: \\ &x^* = \mu \end{aligned} \tag{3.79}$$

Če dobljeni izraz $x^* = \mu$ vstavimo v funkcijo (3.78), dobimo:

$$f\left(x^*\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x^*-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \tag{3.80}$$

Torej res velja za ekstremno točko:

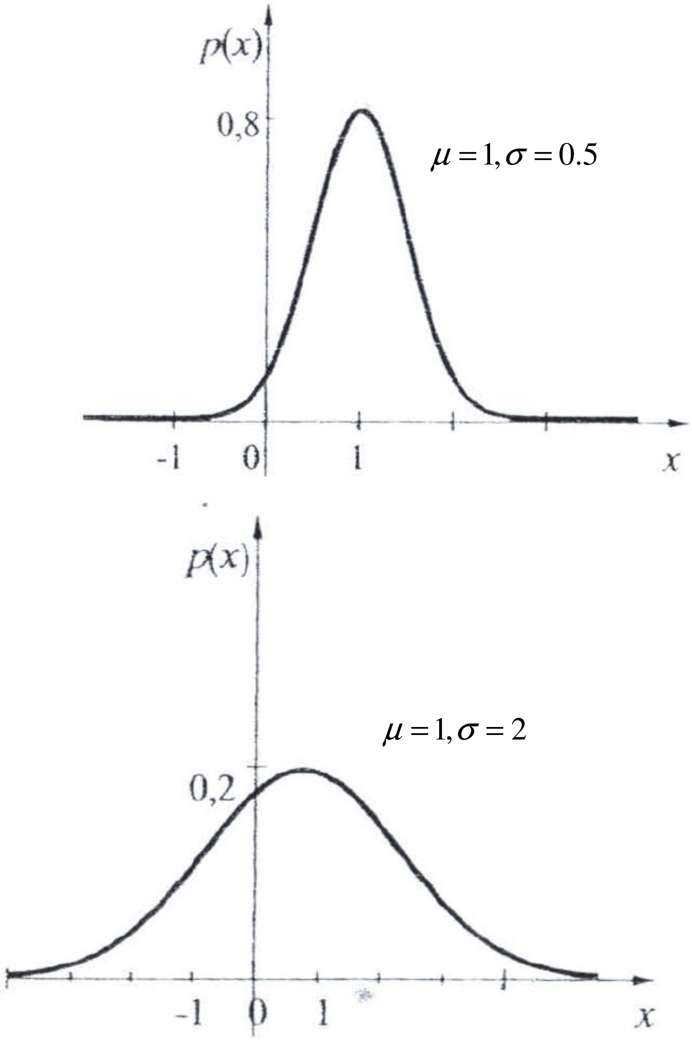
$$\left(x^*, f\left(x^*\right)\right) = \left(\mu, \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \tag{3.81}$$

Najpreprostejšo normalno porazdelitev dobimo tedaj, ko velja: $\mu = 0, \sigma = 1$. Tedaj izraz (3.78) preide v obliko:

$$f(x) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-0)^2}{2 \cdot 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{3.82}$$

ki ji pravimo standardizirana normalna porazdelitev [14].

Slika 39 prikazuje primer normalne porazdelitve pri dveh različnih vrednostih parametrov μ in σ [14,33]. Iz slike 39 je razvidno, da čim manjši kot je parameter σ, tem bolj izrazito je teme krivulje oziroma je krivulja tem bolj stisnjena okrog temena [14].



Slika 39: Primer normalne porazdelitve pri dveh različnih vrednostih parametra σ

3.15 Matematično upanje (pričakovanje)

Porazdelitve naključnih spremenljivk so pogostokrat preširok pojem za konkretno uporabo, zato želimo iz porazdelitvenega zakona najti le nekatere osnovne značilnosti, ki jih poskušamo oceniti z določenim številom. Tovrstne značilnosti pa tudi imenujemo z imenom *številske karakteristike* [33].

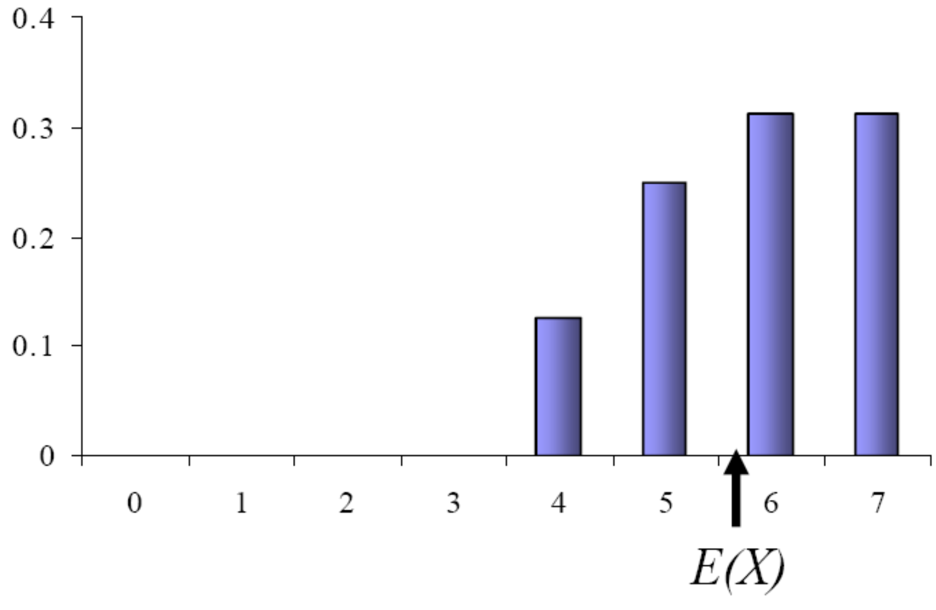
Slednje predstavljajo določene sumarne podatke o naključni spremenljivki, recimo z navedbo, okrog katere povprečne vrednosti je porazdeljena zaloga vrednosti, kako so možne vrednosti naključne spremenljivke razpršene okrog povprečja, in podobno [14].

Najbolj značilne številske karakteristike določene naključne spremenljivke *X* so [33]:

- matematično upanje (pričakovanje) $E(X)=\mu_X$,
- varianca ali disperzija $D(X)=VAR(X)=\sigma_X^2$, ter
- standardna deviacija $\sqrt{D(X)}=\sqrt{VAR(X)}=\sigma_X$

V tem poglavju se bomo omejili na obravnavo matematičnega upanja, kasneje pa bomo obdelali tudi drugi dve številski karakteristiki. Matematičnemu upanju $E(X)$ velikokrat pravimo tudi povprečna vrednost naključne spremenljivke *X*. Predstavlja namreč število, pri katerem se običajno ustali povprečje realizacij naključne spremenljivke *X* v primeru velikega števila realizacij [14]. Zgodovinsko gledano pa ime matematično upanje izvira iz loterijskih iger, s katerim so poimenovali upanje na dobitek [14].

Matematično upanje $E(X)$ si lahko interpretiramo tudi kot center gravitacije porazdelitve verjetnosti naključne spremenljivke *X*, kar je ilustrirano na primeru na sliki 40.



Slika 40: Interpretacija matematičnega upanja $E(X)$ kot centra gravitacije porazdelitve verjetnosti naključne spremenljivke *X*

V primeru, da imamo opravka z diskretno naključno spremenljivko *X*, ki ima določeno porazdelitev verjetnosti *p(x)* oz. ima verjetnostno shemo:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

je matematično upanje $E(X)$ definirano kot [14,18]:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{3.84}$$

Če ima naključna spremenljivka *X* neskončno zalogo vrednosti, imamo [14,33]:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \tag{3.85}$$

pod pogojem, da je vrsta konvergentna in velja:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p_i < \infty \tag{3.86}$$

Če ta pogoj ne velja, potem za dotično naključno spremenljivko matematično upanje ne obstaja [33].

Poglejmo si naslednji primer [33]:

Pri streljanju v tarčo zadene strelec v center tarče z verjetnostjo 0.1, dva cm od centra tarče z verjetnostjo 0.3, štiri cm od centra z verjetnostjo 0.3, šest cm od centra z verjetnostjo 0.2 in osem cm od centra z verjetnostjo 0.1. Izračunajte matematično upanje naključne spremenljivke X, ki jo uporabimo v problemu.

Gotovo za naključno spremenljivko *X* velja naslednja verjetnostna shema:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

S pomočjo izrazov (3.84) in (3.87) izračunamo matematično upanje:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + x_5 \cdot p_5 = \\
&= 0 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.1 = 3.8
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Dobljeni rezultat pomeni, da bo strelec v povprečju (zato ime povprečna vrednost) pričakoval zadetek, ki bo 3.8 cm oddaljen od centra tarče. Poleg tega tudi velja naslednje. Če bi bili posamezni rezultati pri streljanju ovrednoteni z denarnim dobitkom, bi povprečna vrednost strelcu kazala, koliko je vredno njegovo upanje na dobitek, ki bi ga osvojil z enim strelom [33].

V primeru, da imamo opravka z zvezno naključno spremenljivko *X*, ki ima določeno porazdelitev gostote verjetnosti *f(x)*, je matematično upanje $E(X)$ definirano kot [14,18]:

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \tag{3.89}
$$

pri čemer matematično upanje obstaja le tedaj, ko velja [14]:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty \tag{3.90}
$$

Poglejmo si naslednji primer [14,18]:

Izračunajte matematično upanje naključne spremenljivke X, če zanjo velja normalna porazdelitev.

Če vstavimo (3.78) v izraz (3.89), dobimo:

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{3.91}
$$

Vpeljimo substitucijo:

$$x = \mu + z \cdot \sigma$$
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{3.92}$$
$$dz = \frac{1}{\sigma}dx$$

Z njo izraz (3.91) preide v obliko:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + z \cdot \sigma) \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + z \cdot \sigma) \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Dokazati se da, da velja naslednje:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \tag{3.94}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

s čimer izraz (3.93) preide v obliko:

$$E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 \tag{3.95}$$
$$E(X) = \mu$$

Poglejmo si še naslednji primer:

Izračunajte matematično upanje naključne spremenljivke X, če zanjo velja uniformna porazdelitev.

Če vstavimo (3.73) v izraz (3.89), dobimo:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\cdot dx=$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^b=\frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{a+b}{2} \tag{3.96}$$

3.16 Varianca in standardna deviacija

3.16.1 Varianca

Disperzija ali varianca naključne spremenljivke X je definirana kot povprečna vrednost kvadriranih odklonov naključne spremenljivke od njene povprečne vrednosti. Z njo torej merimo razpršenost naključne spremenljivke okoli njenega povprečja [33].

Varianca je v splošnem definirana na naslednji način [33]:

$$VAR(X)=D(X)=E\left[\left\{X-E(X)\right\}^2\right] \tag{3.97}$$

Pri diskretni naključni spremenljivki izraz (3.97) preide v obliko:

$$VAR(X)=D(X)=\sum_i\left\{x_i-E(X)\right\}^2\cdot p_i \tag{3.98}$$

pri zvezni naključni spremenljivki pa preide v obliko:

$$VAR(X)=D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{x-E(X)\right\}^2\cdot f(x)\ dx \tag{3.99}$$

Poskušajmo izraz (3.98) še nekoliko razviti:

$$\begin{aligned}
&VAR(X) = D(X) = \sum_i \left\{ x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot E(X) + E^2(X) \right\} \cdot p_i = \\
&= \sum_i x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot E(X) \cdot \sum_i x_i \cdot p_i + E^2(X) \underbrace{\sum_i p_i}_{1} = \\
&= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + E^2(X) \\
&torej \ \ velja: \\
&VAR(X) = D(X) = E(X^2) - E^2(X)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Do končnega rezultata v izrazu (3.100) bi prišli tudi, če bi še nekoliko razvili izraz (3.99) za zvezno naključno spremenljivko. Torej vedno velja [33]:

$$VAR(X) = D(X) = E(X^2) - E^2(X) \tag{3.101}$$

Poglejmo si naslednji primer [33]:

Za diskretno naključno spremenljivko, ki ima podano naslednjo verjetnostno shemo:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0.1 & \lambda & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

določite:

a) število λ,

b) matematično upanje, ter

c) varianco.

Ker mora veljati:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \tag{3.103}$$

sledi:

$$\begin{aligned}
&0.1 + \lambda + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 0.8 + \lambda = 1 \\
&\lambda = 0.2
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Matematično upanje izračunamo na osnovi izraza (3.84):

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i\cdot p_i = x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+x_4\cdot p_4+x_5\cdot p_5 = \\ =-2\cdot 0.1+(-1)\cdot 0.2+0\cdot 4+1\cdot 0.2+3\cdot 0.1=0.1 \tag{3.105}$$

Varianco izračunamo na osnovi izraza (3.101). V ta namen pa moramo prej izračunati še $E(X^2)$:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2\cdot p_i = x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+x_3^2\cdot p_3+x_4^2\cdot p_4+x_5^2\cdot p_5 = \\ =(-2)^2\cdot 0.1+(-1)^2\cdot 0.2+0^2\cdot 4+1^2\cdot 0.2+3^2\cdot 0.1=0.4+0.2+0.2+0.9=1.7 \tag{3.106}$$

Varianca torej je:

$$VAR(X)=D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1.7-(0.1)^2=1.69 \tag{3.107}$$

Poglejmo si še en primer:

Za diskretno naključno spremenljivko s Poissonovo porazdelitvijo izračunajte varianco!

Varianco izračunamo na osnovi izraza (3.101). V ta namen pa moramo prej izračunati tako $E(X)$, kot tudi $E(X^2)$. Izračunajmo najprej $E(X)$. Na osnovi izrazov (3.48) in (3.85) lahko zapišemo:

$$E(X)=\sum_k k\cdot p(k)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p(k)= \\ =\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}= \\ vpeljimo\ \ n=k-1, sledi: \\ E(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n)!}}_{e^{\lambda}}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda \tag{3.108}$$

Izračunajmo še $E\left(X^2\right)$. V ta namen moramo najprej izračunati $E\left(X\left(X-1\right)\right)$ [11]:

$$
\begin{aligned}
&E\left(X\left(X-1\right)\right)=\sum_{k}k\left(k-1\right)\cdot p\left(k\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot p\left(k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot p_k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\underbrace{1\left(1-1\right)\cdot\frac{\lambda^1}{1!}\cdot e^{-\lambda}}_{0}+\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\\
&=\frac{\lambda^2}{\lambda^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\left(k-2\right)!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{\left(k-2\right)!}=\\
&\textit{vpeljimo}\ \ n=k-2, \textit{sledi}:\\
&E\left(X\left(X-1\right)\right)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\left(n\right)!}}_{e^{\lambda}}=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda^2
\end{aligned}
\tag{3.109}
$$

Po drugi strani velja:

$$E\left(X\left(X-1\right)\right)=E\left(X^2-X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\lambda \tag{3.110}$$

Če izenačimo izraza (3.109) in (3.110), dobimo:

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right)-\lambda&=\lambda^2\\
E\left(X^2\right)&=\lambda^2+\lambda
\end{aligned}
\tag{3.111}
$$

Varianca torej je:

$$VAR\left(X\right)=D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda \tag{3.112}$$

Poglejmo si še en primer:

Za zvezno naključno spremenljivko z uniformno porazdelitvijo izračunajte varianco!

Varianco izračunamo na osnovi izraza (3.101). Za matematično upanje na osnovi izraza (3.96) vemo, da je enako $\frac{a+b}{2}$. Torej moramo izračunati še $E\left(X^2\right)$:

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \cdot dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)_a^b = \frac{1}{3(b-a)}\left(b^3-a^3\right) = \frac{\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)(b-a)}{3(b-a)} = \\
&= \frac{\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}
\end{aligned}
\tag{3.113}
$$

Varianca torej je:

$$
\begin{aligned}
&VAR(X) = D(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3} - \frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4} = \frac{4\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)-3\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{12} = \\
&= \frac{\left(4a^2+4a\cdot b+4b^2\right)-\left(3a^2+6\cdot a\cdot b+3b^2\right)}{12} = \\
&= \frac{\left(a^2-2a\cdot b+b^2\right)}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}
\end{aligned}
\tag{3.114}
$$

3.16.2 Standardna deviacija

Ker je disperzija števila karakteristika, ki jo računamo iz kvadriranih odklonov od povprečja, lahko dobijo veliki odkloni prevelik vpliv [33]. Da bi ta vpliv vsaj delno razvrednotili, vzamemo za dodatno mero razpršenosti naključne spremenljivke le pozitivni kvadratni koren variance in dobimo takoimenovano standardno deviacijo:

$$
\sqrt{D(X)} = \sqrt{VAR(X)} = \sigma_X \tag{3.115}
$$

3.17 Številske karakteristike za različne porazdelitve in pregled osnovnih lastnosti

V tem poglavju bomo najprej podali pregledno tabelo številskih karakteristik (matematičnega upanja in variance) za poglavitne porazdelitve diskretnih oz. zveznih naključnih spremenljivk. Nekatere smo tudi izpeljali v prejšnjih poglavjih, izpeljave ostalih pa si bralec lahko pogleda v literaturi [11, 14, 18]. Slika 41 prikazuje tabelo številskih karakteristik različnih porazdelitev [11, 14, 18].

PORAZDELITEV	MATEMATIČNO UPANJE	VARIANCA
BINOMSKA	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$
POISSONOVA	λ	λ
NORMALNA	μ	σ^2
UNIFORMNA ZVEZNA	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
EKSPONENTNA	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Slika 41: Tabela številskih karakteristik poglavitnih porazdelitev diskretnih oz. zveznih naključnih spremenljivk

V nadaljevanju si še na kratko poglejmo nekaj osnovnih lastnosti matematičnega upanja in variance [14,33]. Gre namreč za karakteristiki, ki ju v verjetnostnem računu veliko uporabljamo, še zlasti pa imata pomembno vlogo v statistiki [33]. Podali bomo le osnovne lastnosti, dokaze zanje pa si bralec lahko pogleda v literaturi [14,33].

Izrek 1: Če za naključni spremenljivki X in Y obstajata njuni matematični upanji $E(X)$ *in* $E(Y)$*, potem obstaja tudi matematično upanje njune vsote in velja:*

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{3.116}$$

Ta izrek je mogoče posplošiti tudi za *n* naključnih spremenljivk. Tedaj velja:

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n) \tag{3.117}$$

Izrek 2: Če za naključno spremenljivko X obstaja matematično upanje $E(X)$ *in je a poljubno realno število, potem obstaja tudi matematično upanje naključne spremenljivke a.X in velja:*

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(X) \tag{3.118}$$

Podobno velja tudi naslednji izrek.

Izrek 3: Če za naključni spremenljivki X in Y obstajata njuni matematični upanji $E(X)$ *in* $E(Y)$ *in sta* λ *in* μ *poljubni realni števili, potem velja naslednji izraz:*

$$E(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot E(Y) \tag{3.119}$$

Ta izrek je mogoče posplošiti tudi za *n* naključnih spremenljivk. Tedaj velja:

$$E(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \cdot E(X_1) + \lambda_2 \cdot E(X_2) + ... + \lambda_n \cdot E(X_n) \tag{3.120}$$

Izrek 4: Če sta naključni spremenljivki X in Y med seboj neodvisni in obstajata njuni matematični upanji $E(X)$ *in* $E(Y)$*, potem velja naslednji izraz (nekoreliranost!):*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{3.121}$$

Če pa sta med seboj odvisni (korelirani), pa izraz (3.121) seveda ne velja:

$$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y) \tag{3.122}$$

Izrek (3.121) je mogoče posplošiti tudi za *n* med seboj neodvisnih naključnih spremenljivk. Tedaj velja:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot ... \cdot E(X_n) \tag{3.123}$$

Tudi za varianco veljajo določene lastnosti.

Izrek 5: Če za naključno spremenljivko X obstaja disperzija $D(X)$ *in je a poljubno realno število, potem obstaja naslednji izraz:*

$$D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X) \tag{3.124}$$

Izrek 6: Če sta naključni spremenljivki X in Y med seboj nekorelirani in obstajata njuni disperziji $D(X)$ *in* $D(Y)$*, potem velja naslednji izraz:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) \tag{3.125}$$

Ta izrek je mogoče posplošiti tudi za *n* med seboj paroma nekoreliranih naključnih spremenljivk. Tedaj velja:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n) \tag{3.126}$$

Seveda se v primeru, ko so naključne spremenljivke korelirane med seboj, nekateri zgoraj podani izrazi nekoliko spremenijo, saj je potrebno upoštevati tudi takoimenovane kovariance med naključnimi spremenljivkami. Več o tem si bralec lahko pogleda v literaturi [14, 33].

3.18 Pričakovanje funkcij naključnih spremenljivk

Denimo imamo dano diskretno naključno spremenljivko *X*, ki ima funkcijo porazdelitve verjetnosti *p(x)*. Dano imamo tudi funkcijo te naključne spremenljivke *g(X)*. Potem je pričakovana vrednost funkcije *g(X)*, to je $E\left[g(X)\right]$, enaka:

$$E\left[g(X)\right] = \sum_x g(x)\,p(x) = \sum_i g(x_i)\,p(x_i) \tag{3.127}$$

V primeru zveznih naključnih spremenljivk velja podobno sklepanje.

Denimo imamo dano zvezno naključno spremenljivko *X*, ki ima funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti *f(x)*. Dano imamo tudi funkcijo te naključne spremenljivke *g(X)*. Potem je pričakovana vrednost funkcije *g(X)*, to je $E\left[g\left(X\right)\right]$, enaka:

$$E\left[g\left(X\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx \qquad (3.128)$$

Poglejmo si naslednji primer [18]:

Dano imamo uniformno porazdeljeno zvezno naključno spremenljivko X, ki predstavlja dolžino stranice kvadrata in je izbrana naključno med vrednostima 0 in b. Dano imamo tudi funkcijo naključne spremenljivke $A=g\left(X\right)=X^2$*, ki predstavlja površino kvadrata. Poiščite* $E\left[g\left(X\right)\right]$*!*

Ker je X uniformno porazdeljena na intervalu *(a,b) = (0,b),* velja:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-0} & 0\le x\le b\\ 0 & x<0, x>b\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{b} & 0\le x\le b\\ 0 & x<0, x>b\end{cases} \qquad (3.129)$$

Na osnovi izraza (3.128) lahko izračunamo $E\left[g\left(X\right)\right]$:

$$\begin{aligned}
E\left[g\left(X\right)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx\\
E\left[X^2\right]&=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f\left(x\right)dx\\
E\left[X^2\right]&=\int_{0}^{b} x^2\cdot\frac{1}{b}dx=\frac{1}{b}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^b=\frac{b^2}{3}
\end{aligned} \qquad (3.130)$$

Ker je maksimalna površina kvadrata enaka b^2, je torej $E\left[g\left(X\right)\right]$ enaka eni tretjini te vrednosti.

3.19 Transformacijska metoda

V tem poglavju si bomo pogledali transformacijsko metodo za izračun porazdelitve gostote verjetnosti funkcij naključnih spremenljivk [18].

Teorem:

Naj bo X naključna spremenljivka s funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti f(x) in funkcijo naključne spremenljivke U = h(X). Če predpostavimo, da je h(x) bodisi striktno monotono naraščajoča bodisi padajoča funkcija, potem je funkcija porazdelitve gostote verjetnosti za U, to je g(U), definirana z naslednjim izrazom:

$$g(u) = f\left(h^{-1}(u)\right) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(u)}{du} \right| = f(x) \cdot \left| \frac{dx(u)}{du} \right| \tag{3.131}$$

Poglejmo si dokaz tega teorema.

Najprej izrazimo spremenljivko x kot inverzno funkcijo spremenljivke u:

$$U = h(X) \quad \Rightarrow \quad u = h(x) \quad \Rightarrow \quad x = h^{-1}(u) \tag{3.132}$$

Za kumulativno funkcijo porazdelitve verjetnosti naključne spremenljivke U gotovo velja:

$$G(u) = P[U \le u] = P\left[h(X) \le u\right] \tag{3.133}$$

Pokazati se da, da izraz (3.133) preide v obliko:

$$G(u) = \begin{cases} P\left[X \le h^{-1}(u)\right] & h \text{ striktno monotno narašča} \\ P\left[X \ge h^{-1}(u)\right] & h \text{ striktno monotno pada} \end{cases} \tag{3.134}$$

oziroma:

$$G(u) = \begin{cases} F\left(h^{-1}(u)\right) & h \text{ striktno monotno narašča} \\ 1 - F\left(h^{-1}(u)\right) & h \text{ striktno monotno pada} \end{cases} \tag{3.135}$$

kjer je F kumulativna funkcija porazdelitve verjetnosti spremenljivke X.

Relacija med funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti naključne spremenljivke U in kumulativno funkcijo te spremenljivke je seveda naslednja:

$$g(u) = \frac{dG(u)}{du} \tag{3.136}$$

pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{d}{du}\left[\begin{cases} F\left(h^{-1}(u)\right) & h \text{ striktno monotno narašča} \\ 1 - F\left(h^{-1}(u)\right) & h \text{ striktno monotno pada} \end{cases}\right] = \\ &= \begin{cases} \dfrac{dF\left(h^{-1}(u)\right)}{dh^{-1}} \cdot \dfrac{dh^{-1}(u)}{du} & h \text{ striktno monotno narašča} \\ -\dfrac{dF\left(h^{-1}(u)\right)}{dh^{-1}} \cdot \dfrac{dh^{-1}(u)}{du} & h \text{ striktno monotno pada} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.137}$$

Seveda velja tudi:

$$f\left[h^{-1}(u)\right] = \frac{dF\left(h^{-1}(u)\right)}{dh^{-1}} = \frac{dF(x)}{dx} \tag{3.138}$$

Zato izraz (3.137) preide v obliko:

$$\begin{aligned} g(u) &= \begin{cases} f\left[h^{-1}(u)\right] \cdot \dfrac{dh^{-1}(u)}{du} & h \text{ striktno monotno narašča} \\ -f\left[h^{-1}(u)\right] \cdot \dfrac{dh^{-1}(u)}{du} & h \text{ striktno monotno pada} \end{cases} \\ g(u) &= f\left[h^{-1}(u)\right] \cdot \left|\frac{dh^{-1}(u)}{du}\right| = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{du}\right| \end{aligned} \tag{3.139}$$

Poglejmo si naslednji primer [18]:

Denimo ima zvezna naključna spremenljivka X normalno porazdelitev s srednjo vrednostjo μ in varianco σ^2. Poiščite porazdelitev gostote verjetnosti funkcije te naključne spremenljivke $U = h(X) = e^X$.

Najprej na osnovi (3.132) zapišimo inverzno funkcijo, to je:

$$U = h(X) = e^X \quad \Rightarrow \quad u = h(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad x = h^{-1}(u) = \ln\left(u\right) \tag{3.140}$$

Nato tvorimo odvod v izrazu (3.131), pri čemer dobimo:

$$\frac{dh^{-1}(u)}{du} = \frac{dx(u)}{du} = \frac{d}{du}\left(\ln\left(u\right)\right) = \frac{1}{u} \tag{3.141}$$

Na osnovi (3.78) lahko zapišemo:

$$f\left(h^{-1}(u)\right) = f\left(\ln\left(u\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\ln(u)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.142}$$

Nazadnje lahko na osnovi izrazov (3.131), (3.141) in (3.142) zapišemo naslednjo porazdelitev gostote verjetnosti za spremenljivko U:

$$g\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\ln(u)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left|\frac{1}{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\ln(u)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{u}, \quad u > 0 \tag{3.143}$$

Porazdelitev, ki smo jo dobili, imenujemo log-normalna porazdelitev.

3.20 Združeno porazdeljene naključne spremenljivke

Pogosto imamo opravka z dvema ali več naključnimi spremenljivkami (X, Y, itn), definiranimi pri istem naključnem eksperimentu [18]. Tedaj pravimo tudi, da imamo opravka z multivariantnimi porazdelitvami teh spremenljivk.

Če imamo npr. opravka z dvema naključnima spremenljivkama X in Y, potem lahko njuno funkcijo združene porazdelitve verjetnosti zapišemo na naslednji način [18]:

$$p\left(x, y\right) = P\left(X = x, Y = y\right) \tag{3.144}$$

Izraz (3.144) lahko pri diskretnih (bivariantnih) spremenljivkah X in Y zapišemo tudi nekoliko drugače [11]:

$$p\left(x_i, y_j\right) = P\left(X = x_i, Y = y_j\right) \tag{3.145}$$

pri čemer imata spremenljivki zalogo vrednosti $\left(x_i, y_j\right)$ za določen niz celih števil *i* in *j*.

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_k$, to je z *k* diskretnimi naključnimi spremenljivkami, potem lahko funkcijo združene porazdelitve verjetnosti zanje napišemo na naslednji način [11,18]:

$$p\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k\right) \tag{3.146}$$

Za funkcijo (3.146) veljajo naslednje lastnosti [11,18]:

$$\begin{aligned}
&1. \quad 0 \le p\left(x_1, \dots, x_k\right) \le 1 \\
&2. \quad \sum_{x_1} \dots \sum_{x_k} p\left(x_1, \dots, x_k\right) = 1 \\
&3. \quad P\left[\left(X_1, \dots, X_k\right) \in A\right] = \sum_{\left(X_1, \dots, X_k\right) \in R_A} \dots \sum p\left(x_1, \dots, x_k\right), \\
&\quad pri \;\; čemer \;\; \left(x_1, \dots, x_k\right) \in A
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Tretja lastnost pomeni, da lahko verjetnost nekega *k*-dimenzionalnega dogodka *A* najdemo tako, da izraz (3.146) sumiramo preko vseh točk v *k*-dimenzionalnem prostoru dimenzije R_A, ki pripada dogodku *A* [11].

Če pa imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_n$, to je z *n* zveznimi naključnimi spremenljivkami, potem lahko funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti zanje napišemo na naslednji način [11,18]:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \tag{3.148}$$

Za funkcijo (3.148) veljajo naslednje lastnosti [11,18]:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\geq 0 \\
&2.\quad \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n = 1 \qquad (3.149)\\
&3.\quad P\left[\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in A\right]=\int_{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in R_A}\ldots\int f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n \\
&\quad \textit{pri čemer } \left(x_1,\ldots,x_n\right)\in A
\end{aligned}
$$

Tretja lastnost ima podoben pomen kot v izrazu (3.147) pri diskretnih naključnih spremenljivkah.

Poglejmo si naslednji primer:

Zapišitev bivariantno normalno porazdelitev dveh naključnih spremenljivk X in Y!

Podobno kot v izrazu (3.78) za univariantno normalno porazdelitev ene naključne spremenljivke *X*, lahko v tem primeru zapišemo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti na naslednji način [11,18]:

$$
f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\cdot\rho\cdot\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\cdot\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} \qquad (3.150)
$$

kjer sta $\sigma_x{}^2,\mu_x$ varianca oz srednja vrednost naključne spremenljivke *X*, $\sigma_y{}^2,\mu_y$ sta varianca oz srednja vrednost naključne spremenljivke *Y*, medtem ko je ρ takoimenovan korelacijski koeficient spremenljivk *X* in *Y* [11].

Poglejmo si še en primer:

Zapišite k-variantno normalno porazdelitev k naključnih spremenljivk $X_1, X_2, ..., X_k$!

Če označimo z **x** vektor, ki pripada naključnim spremenljivkam $X_1, X_2, ..., X_k$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

potem lahko zapišemo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti na naslednji način [11,18]:

$$f\left(x_1, \ldots, x_k\right) = f\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{\left(2 \cdot \pi\right)^{k/2} \left|\det \mathbf{K}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} \tag{3.152}$$

pri čemer je $\boldsymbol{\mu}$ vektor varianc naključnih spremenljivk, **K** pa kovariančna matrika. Slednja imata obliko [11,18]:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(X_1\right) \\ E\left(X_2\right) \\ \vdots \\ E\left(X_k\right) \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_{kk} \end{bmatrix}, \qquad \sigma_{ij} = COV(X_i, X_j) \tag{3.154}$$

Več podrobnosti o strukturi pravkar izpeljanih izrazov si lahko bralec pogleda v literaturi [11].

3.21 Mejne porazdelitve

Poglejmo si naslednjo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_q, X_{q+1}, ...X_k$*, to je s k diskretnimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve verjetnosti* $p(x_1, x_2, ..., x_q, x_{q+1}, ...x_k)$ *, potem je funkcija* ***mejne*** *združene porazdelitve verjetnosti spremenljivk* $X_1, X_2, ..., X_q$ *enaka [11,18]:*

$$p_{x_1 \ldots x_q}\left(x_1, \ldots, x_q\right) = \sum_{x_{q+1}} \ldots \sum_{x_n} p_{x_1 \ldots x_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \tag{3.155}$$

kar lahko enostavneje zapišemo kot:

$$p_{12 \ldots q}\left(x_1, \ldots, x_q\right) = \sum_{x_{q+1}} \ldots \sum_{x_n} p\left(x_1, \ldots, x_n\right) \tag{3.156}$$

Podobno velja za zvezne naključne spremenljivke, kjer imamo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_q, X_{q+1}, ...X_k$*, to je s k zveznimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti* $f(x_1, x_2, ..., x_q, x_{q+1}, ...x_k)$ *, potem je funkcija* ***mejne*** *združene porazdelitve gostote verjetnosti spremenljivk* $X_1, X_2, ..., X_q$ *enaka [11,18]:*

$$f_{12 \ldots q}\left(x_1, \ldots, x_q\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \cdot dx_{q+1} \cdot \ldots \cdot dx_n \tag{3.157}$$

Poglejmo si naslednji primer [18]:

Naj bodo spremenljivke X, Y, Z tri združeno porazdeljene naključne spremenljivke z naslednjo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} K \cdot \left(x^2 + y \cdot z\right) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{3.158}$$

a) Poiščite vrednost za K.

b) Ugotovite mejno porazdelitev za spremenljivko X.

c) Ugotovite združeno mejno porazdelitev za par spremenljivk: X, Y.

a) Najprej bomo izračunali vrednost za parameter *K*. Na osnovi 2. lastnosti izraza (3.149) velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dxdydz = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K\left(x^2 + yz\right)dxdydz = 1 \tag{3.159}$$

Odtod sledi:

$$K\int_0^1\int_0^1\left[\frac{x^3}{3} + xyz\right]_{x=0}^{x=1} dydz = K\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{3} + yz\right)dydz$$

$$K\int_0^1\left[\frac{1}{3}y + z\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dz = K\int_0^1\left(\frac{1}{3} + z\frac{1}{2}\right)dz \tag{3.160}$$

$$K\left[\frac{z}{3} + \frac{z^2}{4}\right]_0^1 = K\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = K\frac{7}{12} = 1$$

$$K = \frac{12}{7}$$

b) Na osnovi izraza (3.157) lahko zapišemo:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dydz \tag{3.161}$$

oziroma:

$$f_1(x) = \frac{12}{7}\cdot\int_0^1\int_0^1\left(x^2 + yz\right)dydz \tag{3.162}$$

Izraz (3.162) bomo izpeljali do konca:

$$f_1(x) = \frac{12}{7} \cdot \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} z \right]_{y=0}^{y=1} dz = \frac{12}{7} \cdot \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} z \right) dz$$

$$f_1(x) = \frac{12}{7} \cdot \left[x^2 z + \frac{z^2}{4} \right]_0^1 = \frac{12}{7} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) \qquad \text{pri } 0 \le x \le 1 \tag{3.163}$$

Na podoben način bi lahko izračunali tudi mejno porazdelitev $f_2(y)$ za spremenljivko *Y* oz. $f_3(z)$ za spremenljivko *Z*.

c) Zopet izhajamo iz izraza (3.157) in tako lahko zapišemo:

$$f_{12}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz = \frac{12}{7} \int_0^1 \left(x^2 + yz \right) dz$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{12}{7} \left[x^2 z + y \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} \tag{3.164}$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{12}{7} \left(x^2 + \frac{1}{2} y \right) \qquad \text{pri } 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

Na podoben način bi lahko npr. izračunali tudi združeno mejno porazdelitev $f_{13}(x, z)$ za spremenljivki *X* in *Z*, ter $f_{23}(y, z)$ za spremenljivki *Y* in *Z*.

3.22 Pogojne porazdelitve

Poglejmo si naslednjo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_q, X_{q+1}, ...X_k$*, to je s k diskretnimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve verjetnosti* $p(x_1, x_2, ..., x_q, x_{q+1}, ...x_k)$ *, potem je funkcija* ***<u>pogojne</u>*** *združene porazdelitve verjetnosti spremenljivk* $X_{q+1}, X_{q+2}, ..., X_k$ *pri danih* $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_q = x_q$ *enaka [11,18]:*

$$p_{q+1\ldots k|1\ldots q}\left(x_{q+1}, \ldots, x_k \,\middle|\, x_1, \ldots, x_q\right) = \frac{p(x_1, \ldots, x_k)}{p_{1\ldots q}(x_1, \ldots, x_q)} \tag{3.165}$$

pri čemer je $p_{12\ldots q}\left(x_1,\ldots,x_q\right)$ funkcija mejne združene porazdelitve verjetnosti spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_q$, podana z izrazom (3.156).

Podobno velja za zvezne naključne spremenljivke, kjer imamo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, \ldots, X_q, X_{q+1}, \ldots X_k$, to je s k zveznimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots x_k\right)$, potem je funkcija ***pogojne*** *združene porazdelitve gostote verjetnosti spremenljivk $X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_k$ pri danih $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_q = x_q$ enaka [11,18]:*

$$f_{q+1\ldots k|1\ldots q}\left(x_{q+1},\ldots,x_k \middle| x_1,\ldots,x_q\right) = \frac{f\left(x_1,\ldots,x_k\right)}{f_{1\ldots q}\left(x_1,\ldots,x_q\right)} \tag{3.166}$$

pri čemer je $f_{12\ldots q}\left(x_1,\ldots,x_q\right)$ funkcija mejne združene porazdelitve gostote verjetnosti spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_q$, podana z izrazom (3.157).

Poglejmo si naslednji primer:

Naj bodo spremenljivke X, Y, Z tri združeno porazdeljene naključne spremenljivke z naslednjo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f\left(x,y,z\right) = \begin{cases} \frac{12}{7}\cdot\left(x^2 + y\cdot z\right) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{3.167}$$

a) Poiščite pogojno porazdelitev za spremenljivko Z pri danih spremenljivkah X=x in Y=y.

b) Poiščite pogojno porazdelitev za spremenljivki Y, Z pri dani spremenljivki X=x.

a) Na osnovi prejšnjega primera vemo, da velja izraz (3.164) za združeno mejno porazdelitev para spremenljivk *X* in *Y*. Tako lahko na osnovi izraza (3.166) zapišemo:

$$f_{3|12}\left(z \middle| x,y\right) = \frac{f\left(x,y,z\right)}{f_{12}\left(x,y\right)} = \frac{\frac{12}{7}\left(x^2+yz\right)}{\frac{12}{7}\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)} = \frac{x^2+yz}{x^2+\frac{1}{2}y} \qquad \text{pri } 0 \le z \le 1 \tag{3.168}$$

b) Na osnovi prejšnjega primera vemo, da velja izraz (3.163) za mejno porazdelitev spremenljivke *X*. Tako lahko na osnovi izraza (3.166) zapišemo:

$$f_{23|1}\left(y,z|x\right)=\frac{f\left(x,y,z\right)}{f_1\left(x\right)}=\frac{\frac{12}{7}\left(x^2+yz\right)}{\frac{12}{7}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}=\frac{x^2+yz}{x^2+\frac{1}{4}} \quad \text{pri } 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1 \tag{3.169}$$

3.23 Neodvisnost vektorjev naključnih spremenljivk

Poglejmo si naslednjo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_q, X_{q+1}, ...X_k$*, to je s k zveznimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti* $f\left(x_1, x_2, ..., x_q, x_{q+1}, ...x_k\right)$ *, potem so spremenljivke* $X_1, X_2, ..., X_q$ ***<u>neodvisne</u>*** *od spremenljivk* $X_{q+1}, X_{q+2}, ..., X_k$*, če velja [11,18]:*

$$f\left(x_1,\ldots,x_k\right)=f_{1\ldots q}\left(x_1,\ldots,x_q\right)\cdot f_{q+1\ldots k}\left(x_{q+1},\ldots,x_k\right) \tag{3.170}$$

Podobna definicija velja tudi za diskretne naključne spremenljivke.

Poglejmo si še eno definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_k$*, to je s k zveznimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti* $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ *, potem so spremenljivke* $X_1, X_2, ..., X_k$ ***<u>vzajemno neodvisne</u>*** *, če velja [11,18]:*

$$f\left(x_1,\ldots,x_k\right)=f_1\left(x_1\right)\cdot f_2\left(x_2\right)\cdot\ldots\cdot f_k\left(x_k\right) \tag{3.171}$$

Podobna definicija velja tudi za diskretne naključne spremenljivke.

Poglejmo si naslednji primer [11]:

Za naključni spremenljivki X in Y imamo dano naslednjo združeno porazdelitev gostote verjetnosti:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}\cdot(x+y), & 0<x<2,\ \ 0<y<2\\ 0 & \text{sicer}\end{cases} \tag{3.172}$$

Ali sta spremenljivki X in Y medsebojno neodvisni?

Za medsebojno neodvisnost mora veljati:

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y) \tag{3.173}$$

torej moramo najprej poiskati mejni porazdelitvi $f(x)$ in $f(y)$. Najprej izračunamo mejno porazdelitev za spremenljivko *X*:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{8}\cdot(x+y)\,dy = \frac{1}{8}\cdot\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=2} = \\ &= \frac{1}{8}\cdot\left(x\cdot 2+\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot(x+1), \quad pri \quad 0<x<2 \end{aligned} \tag{3.174}$$

Potem izračunamo še mejno porazdelitev za spremenljivko *Y*:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8}\cdot(x+y)\,dx = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)_{x=0}^{x=2} = \\ &= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4}{2}+2\cdot y\right) = \frac{1}{4}\cdot(y+1), \quad pri \quad 0<y<2 \end{aligned} \tag{3.175}$$

Očitno velja:

$$f(x,y)\neq f(x)\cdot f(y) \tag{3.176}$$

in zato spremenljivki *X* in *Y* nista medsebojno neodvisni (sta odvisni).

3.24 Pričakovanje za porazdelitve več spremenljivk

Poglejmo si naslednjo definicijo:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1, X_2, ..., X_n$*, to je z n zveznimi naključnimi spremenljivkami, ki imajo funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *, potem za matematično upanje funkcije* $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ *teh spremenljivk velja [11,18]:*

$$E\left[g\left(X_1,\ldots,X_n\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x_1,\ldots,x_n\right)\cdot f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n \tag{3.177}$$

Poglejmo si naslednji primer [18]:

Naj bodo X, Y, Z tri združeno porazdeljene naključne spremenljivke s funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{12}{7}\left(x^2+yz\right) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\\ 0 & \text{sicer}\end{cases} \tag{3.178}$$

Poiščite matematično upanje $E\left(g\left(X,Y,Z\right)\right)=E\left(X\cdot Y\cdot Z\right)$*!*

Na osnovi izraza (3.177) lahko zapišemo:

$$E\left[g\left(X,Y,Z\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x,y,z\right)\cdot f\left(x,y,z\right)dxdydz \tag{3.179}$$

$$E\left[XYZ\right]=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\frac{12}{7}\left(x^2+yz\right)dxdydz$$

Odtod sledi:

$$E\left[XYZ\right]=\frac{12}{7}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(x^3yz+xy^2z^2\right)dxdydz \tag{3.180}$$

Izraz (3.180) bomo poskušali rešiti s trojno integracijo, kar nam bo dalo:

$$E[XYZ] = \frac{12}{7}\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{x^4}{4}yz + \frac{x^2}{2}y^2z^2\right]_{x=0}^{x=1} dydz = \frac{12}{7}\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{1}{4}yz + \frac{1}{2}y^2z^2\right] dydz =$$
$$= \frac{3}{7}\int_0^1\int_0^1 \left(yz + 2y^2z^2\right) dydz = \frac{3}{7}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}z + 2\frac{y^3}{3}z^2\right]_{y=0}^{y=1} dz = \frac{3}{7}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}z + \frac{2}{3}z^2\right) dz = \quad (3.181)$$
$$= \frac{3}{7}\left[\frac{z^2}{4} + \frac{2z^3}{9}\right]_0^1 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{17}{36}\right) = \frac{17}{84}$$

V nadaljevanju si bomo pogledali še nekatera pravila za računanje pričakovanih vrednosti [18].

Denimo imamo dano funkcijo združene porazdelitve gostote verjetnosti $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Zanima nas, kako izračunati $E\left[g(X_1, \ldots, X_n)\right]$ v primeru, če je $g(X_1, \ldots, X_n) = X_1$, torej želimo izračunati $E[X_1]$. Na osnovi izraza (3.177) lahko zapišemo:

$$E\left[g(X_1, \ldots, X_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n \quad (3.182)$$
$$E[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Pokazati se da, da je ta izraz enak izrazu:

$$E[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x_1)\, dx_1 \quad (3.183)$$

Torej lahko izračunamo $E[X_1]$ bodisi s pomočjo združene porazdelitve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, bodisi s pomočjo mejne porazdelitve za X_1, to je s pomočjo $f_1(x_1)$.

Poglejmo si dokaz, da je izraz (3.182) res enak izrazu (3.183):

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot f\left(x_1,\dots,x_n\right)dx_1\dots dx_n = \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} x_1\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1,\dots,x_n\right)dx_n\dots}_{f\left(x_1,\dots,x_{n-1}\right)}dx_2\right]dx_1 = \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} x_1\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1,\dots,x_{n-1}\right)dx_{n-1}\dots}_{f\left(x_1,\dots,x_{n-2}\right)}dx_2\right]dx_1 = \dots = \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} x_1\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1,x_2\right)dx_2\right]}_{f_1\left(x_1\right)}dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot f_1\left(x_1\right)dx_1
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Na podoben način lahko storimo posplošitev za n naključnih spremenljivk. To pomeni, da lahko izračunamo matematično upanje i-te naključne spremenljivke $E\left(X_i\right)$ bodisi iz združene porazdelitve za spremenljivke $X_1,\dots,X_n$, bodisi iz mejne porazdelitve za spremenljivko X_i:

$$E\left[X_i\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_i\cdot f\left(x_1,\dots,x_n\right)dx_1\dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_i\cdot f_i\left(x_i\right)dx_i \tag{3.185}$$

To zakonitost bomo, kot bo razvidno, koristno uporabili kasneje v nadaljevanju.

Kot smo videli že v poglavju 3.17., v izrazu (3.120), za matematično upanje linearne kombinacije n naključnih spremenljivk velja lastnost linearnosti, ki pravi:

$$E\left[a_1X_1+\dots+a_nX_n\right]=a_1E\left[X_1\right]+\dots+a_nE\left[X_n\right] \tag{3.186}$$

Podajmo dokaz, da res velja izraz (3.186):

$$E\left[a_1X_1+\cdots+a_nX_n\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left(a_1x_1+\ldots+a_nx_n\right)\cdot f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\ldots dx_n= \tag{3.187}$$

$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\ldots dx_n+...+a_n\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}x_n\cdot f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_1\ldots dx_n$$

Če upoštevamo še izraz (3.185), sledi:

$$\begin{aligned}&E\left[a_1X_1+\cdots+a_nX_n\right]=a_1\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_1\left(x_1\right)dx_1+...+a_n\int_{-\infty}^{\infty}x_nf_n\left(x_n\right)dx_n=\\&=a_1E\left[X_1\right]+\cdots+a_nE\left[X_n\right]\end{aligned} \tag{3.188}$$

in tako smo dokazali, da velja linearnost.

V nadaljevanju si poglejmo še lastnost multiplikativnosti:

Če imamo opravka s spremenljivkami $X_1,X_2,...,X_q$*, to je s* q *naključnimi spremenljivkami, ki so neodvisne od spremenljivk* $X_{q+1},X_{q+2},...,X_k$*, potem velja naslednji izraz:*

$$\begin{aligned}&E\left[g_{1\ldots k}\left(X_1,\ldots,X_q,X_{q+1},\ldots,X_k\right)\right]=\\&=E\left[g_{1\ldots q}\left(X_1,\ldots,X_q\right)\cdot g_{q+1\ldots k}\left(X_{q+1},\ldots,X_k\right)\right]=\\&=E\left[g_{1\ldots q}\left(X_1,\ldots,X_q\right)\right]\cdot E\left[g_{q+1\ldots k}\left(X_{q+1},\ldots,X_k\right)\right]\end{aligned} \tag{3.189}$$

V preprostem primeru za *k = 2*, ko imamo torej le dve neodvisni naključni spremenljivki X_1 in X_2, izraz (3.189) preide v obliko:

$$E\left[g_{12}\left(X_1,X_2\right)\right]=E\left[g_1\left(X_1\right)\cdot g_2\left(X_2\right)\right]=E\left[g_1\left(X_1\right)\right]\cdot E\left[g_2\left(X_2\right)\right] \tag{3.190}$$

pri čemer nam je bil v pomoč tudi izraz (3.171).

Poglejmo si naslednji primer:

Denimo velja:

$$\begin{aligned} &g_1(X_1) = X_1 \\ &g_2(X_2) = X_2 \\ &X_1 \ in \ X_2 \ \ sta \ neodvisna. \end{aligned} \tag{3.191}$$

Pokažite, da velja izraz (3.190).

Napišemo lahko:

$$\begin{aligned} &E\left[g_{12}(X_1, X_2)\right] = E\left[g_1(X_1)\cdot g_2(X_2)\right] = E\left[X_1 \cdot X_2\right] = \\ &= E\left[g_1(X_1)\right]\cdot E\left[g_2(X_2)\right] = E\left[X_1\right]\cdot E\left[X_2\right] \end{aligned} \tag{3.192}$$

Podajmo dokaz za veljavnost izraza (3.192):

$$\begin{aligned} &E\left[g_{12}(X_1, X_2)\right] = E\left[X_1 \cdot X_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot \underbrace{f_{12}(x_1, x_2)}_{f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\, dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)\, dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2)\, dx_2 = E\left[X_1\right] E\left[X_2\right] \end{aligned} \tag{3.193}$$

pri čemer nam je bil v pomoč tudi izraz (3.171).

3.25 Maksimalna podobnost

Začnimo razlago tovrstne problematike v obliki naslednjega problema [18]:

Imamo na razpolagi podatke o nekem (naključnem) procesu. Na primer, potek temperature v sobi, ali potek borznega indeksa. Predpostavimo, da poznamo model oz. mehanizem, ki je "proizvedel" podatke, ne poznamo pa njegovih parametrov.

Metoda maksimalne (največje) podobnosti (ang. Maximum Likelihood) nam pomaga pri reševanju tovrstnih problemov.

Problematiko bomo dodatno osvetlili in razložili na naslednjih dveh primerih [18]:

1. primer:

Nekdo opravi N zaporednih metov kovanca. Predpostavimo, da je padlo n pisem in N-n številk. Kolikšna je verjetnost q, da bo pri novem metu kovanca padlo pismo?

2. primer:

Objekt neznane mase m tehtamo N-krat. Zaradi omejene natančnosti tehtnice, kakor tudi zaradi naključnih vplivov pri izvedbi poskusa, dobimo pri merjenju vsakič nekoliko drugačen rezultat. Zanima nas optimalna ocena mase m in ocena variance naključnih vplivov.

Najprej poskusimo rešiti 1. primer:

Predpostavimo, da je verjetnost, da pri metu kovanca pade pismo, enaka *q*. Torej je verjetnost, da pade številka, enaka *1-q*. Predpostavimo, da so meti med seboj statistično neodvisni. Označimo z y_k izid meta z zaporedno številko *k*. Verjetnost za realizacijo vseh *N* metov je potem enaka:

$$p(y_1, y_2, ..., y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot ... \cdot p(y_N) \tag{3.194}$$

Od *N*-tih izidov pade *n* pisem. Torej se bo v produktu na desni strani izraza (3.194) *n*-krat pojavil faktor *q*. Namreč, za verjetnost za dogodek “pade pismo” velja:

$$p(y_i = ' pade \;\; pismo') = q \tag{3.195}$$

Podobno sklepamo, da bo od preostalih izidov padlo *N-n* številk. Torej se bo v produktu na desni strani izraza (3.194) *N-n* - krat pojavil faktor *1-q*. Namreč, za verjetnost za dogodek “pade številka” velja:

$$p(y_i = ' pade \;\; številka') = 1 - q \tag{3.196}$$

Zato izraz (3.194) preide v naslednjo obliko:

$$
\begin{aligned}
&p(y_1, y_2, ..., y_N) = \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{n-krat} \cdot \underbrace{(1-q)\cdot(1-q)\cdot ... \cdot(1-q)}_{N-n\ -krat} \\
&p(y_1, y_2, ..., y_N) = q^n \cdot (1-q)^{N-n} = L(q)
\end{aligned}
\tag{3.197}
$$

Torej je združena gostota verjetnosti za realizacijo dogodka $\{y_1, y_2, ..., y_N\} = \{y_1 \cap y_2 \cap ... \cap y_N\}$ neka funkcija $L(q)$ z argumentom q. Funkcija L se imenuje funkcija največje podobnosti. Optimalna vrednost argumenta q pa je tista vrednost q^*, pri kateri $L(q^*)$ doseže maksimalno vrednost. Zato se postopek imenuje metoda maksimalne podobnosti (ali maksimalnega verjetja) [18].

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (3.197) se potreben pogoj glasi:

$$
\frac{dL(q)}{dq} = 0
\tag{3.198}
$$

Izračunajmo ta odvod:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dL(q)}{dq} = \frac{d}{dq}\left[q^n(1-q)^{N-n}\right] = \frac{d}{dq}\left[q^n\right]\cdot(1-q)^{N-n} + q^n \cdot \frac{d}{dq}\left[(1-q)^{N-n}\right] = \\
&= n \cdot q^{n-1} \cdot (1-q)^{N-n} + q^n \cdot (N-n) \cdot (1-q)^{N-n-1} \cdot (-1) = \\
&= n \cdot q^{n-1} \cdot (1-q)^{N-n} - q^n \cdot (N-n) \cdot (1-q)^{N-n-1}
\end{aligned}
\tag{3.199}
$$

Izenačimo izraz (3.199) z 0 in dobimo:

$$
\begin{aligned}
&n \cdot q^{n-1} \cdot (1-q)^{N-n} - q^n \cdot (N-n) \cdot (1-q)^{N-n-1} = 0 \\
&(1-q)^{N-n-1} \cdot \left(n \cdot q^{n-1} \cdot (1-q) - q^n \cdot (N-n)\right) = 0 \\
&n \cdot q^{n-1} \cdot (1-q) - q^n \cdot (N-n) = 0 \\
&n \cdot (1-q) - q \cdot (N-n) = 0 \\
&n - nq - Nq + nq = 0 \\
&n - Nq = 0
\end{aligned}
\tag{3.200}
$$

Torej velja, da mora biti ocena verjetnosti za faktor q enaka:

$$
\hat{q} = \frac{n}{N}
\tag{3.201}
$$

Seveda mora v primeru, če je kovanec "pošten" (kar ni nujno res), veljati:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} = \frac{1}{2} \tag{3.202}$$

Poskušajmo rešiti še 2. primer:

Primer tehtanja je morda eden najenostavnejših primerov, s katerim ponazorimo temeljni problem, kako iz podatkov priti do parametrov modela dogodkov. Na tehtanje lahko gledamo kot na naključni dogodek. Izid *k*-tega merjenja lahko zapišemo na naslednji način:

$$y_k = m + e_k \tag{3.203}$$

pri čemer je *m* dejanska, vendar neznana masa predmeta, e_k pa naključna vrednost, ki se tekom merjenja prišteje k vrednosti *m*. Na ta način s spremenljivko e_k ponazorimo naključni izid eksperimenta. Predpostavimo lahko, da za spremenljivko e_k velja normalna porazdelitev s srednjo vrednostjo 0 in varianco σ^2. Potem na osnovi izraza (3.78) za porazdelitev gostote verjetnosti spremenljivke e_k velja naslednji izraz:

$$p(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{e_k^2}{2\sigma^2}} \tag{3.204}$$

ki z upoštevanjem izraza (3.203) preide v obliko:

$$p(y_k - m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y_k - m)^2}{2\sigma^2}} = p(y_k), \qquad k = 1,2,\ldots,N \tag{3.205}$$

Pod predpostavko, da je vsaka meritev statistično neodvisna od drugih meritev, je funkcija združene gostote verjetnosti za nastop dogodka $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ enaka:

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_N) = p(y_1) \cdot p(y_2) \cdot \ldots \cdot p(y_N) \tag{3.206}$$

Če upoštevamo izraz (3.205), izraz (3.206) preide v obliko:

$$L(m,\sigma)=p(y_1,y_2,...,y_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_1-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_2-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot...\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2}{2\sigma^2}-\frac{(y_2-m)^2}{2\sigma^2}-...-\frac{(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.207}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (3.207) se potrebna pogoja glasita:

$$\frac{\partial L(m,\sigma)}{\partial m}=0$$
$$\frac{\partial L(m,\sigma)}{\partial \sigma}=0 \tag{3.208}$$

Če izračunamo prvi parcialni odvod, dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial m}L(m,\sigma)=\frac{\partial}{\partial m}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial m}\left(-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}\right)= \tag{3.209}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{2(y_1-m)+2(y_2-m)+...+2(y_N-m)}{2\sigma^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{(y_1-m)+(y_2-m)+...+(y_N-m)}{\sigma^2}\right)$$

Če ta izraz enačimo z 0, dobimo:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N\cdot e^{-\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+...+(y_N-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{(y_1-m)+(y_2-m)+...+(y_N-m)}{\sigma^2}\right)=0 \tag{3.210}$$
$$(y_1-m)+(y_2-m)+...+(y_N-m)=0$$
$$y_1+y_2+...+y_N-m\cdot N=0$$

Torej velja, da mora biti ocena za maso m enaka:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \tag{3.211}$$

Na podoben način bi nato izračunali še $\frac{\partial L(m,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$. Po daljši izpeljavi bi dobili naslednji rezultat [18]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{m})^2}{N} \tag{3.212}$$

pri čemer bi $\hat{m}$ seveda izračunali s pomočjo izraza (3.211).

4 STOHASTIČNI PROCESI

Stohastični (naključni) procesi so procesi, ki se spreminjajo s časom ali krajem v skladu z zakoni verjetnosti. Veliko realnih procesov ima značilnosti stohastičnih procesov, zato je poznavanje njihovega mehanizma zelo pomembno za razumevanje v praksi nastopajočih situacij [12].

Poglejmo si definicijo stohastičnih procesov:

Naključni proces je družina (zaporedje) naključnih spremenljivk [11,18]:

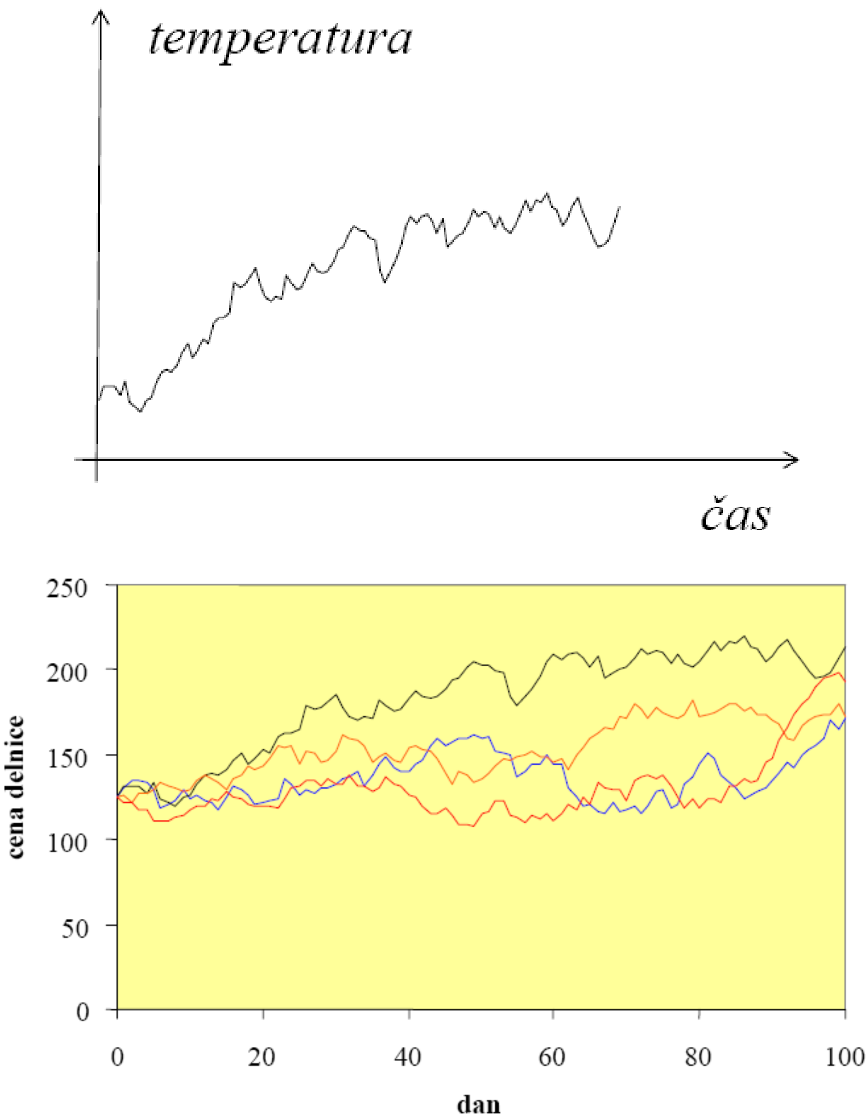
$$\{X_t = X(t), t \in T\} \tag{4.1}$$

kjer je čas t parameter, ki ima v splošnem zalogo vrednosti na naboru realnih števil.

Za naključne procese je značilno, da se naključnim spremenljivkam porazdelitev verjetnosti spreminja s časom.

Slika 42 prikazuje dva tipična primera stohastičnih procesov, ki ga predstavljata naključno gibanje temperature v sobi, oz. naključno gibanje delnic na borzi.

Naslednji značilen primer je vreme. Slednjega npr. lahko opišemo z atributom "dobro", ali z atributom "slabo", ter mu pri tem dodelimo vrednost spremenljivke $X(t)$. Pri tem je čas *t* npr. lahko zaporedno število dneva v koledarju. Npr. če s *t* označimo današnji dan, potem *t-1* pomeni včerajšnji dan, *t-2* pomeni predvčerajšnji dan, itn.



Slika 42: Dva tipična primera stohastičnih procesov: Naključno gibanje temperature v sobi; Naključno gibanje delnic na borzi

Naključne procese običajno delimo na [11,18]:

- diskretne ($X(t)$ je funkcija diskretnih časovnih trenutkov),
- zvezne ($X(t)$ je funkcija zveznih časovnih trenutkov).

Naštejmo nekaj značilnih naključnih procesov [11, 12]:

- Markovski procesi,
- "Random Walk" procesi,
- Poissonovi procesi,
- Rojstno-Smrtni procesi.
- Procesi množične strežbe,
- Epidemični procesi,
- Wienerjevi procesi,
- Difuzijski procesi, itn.

Podrobnosti o posameznih vrstah naštetih stohastičnih procesov si lahko bralec pogleda v literaturi [11,12,21,26,32].

Pri stohastičnih procesih igrajo pomembno vlogo tudi takoimenovana stanja. Množico vseh možnih vrednosti, ki jih lahko zavzamejo naključne spremenljivke $X(t)$, imenujemo **prostor stanj** procesa [12]. Ta je lahko enodimenzionalen ali večdimenzionalen. Prostor stanj je **diskreten**, če vsebuje končno ali števno neskončno število elementov, sicer pa je **zvezen**.

Glede na to, kakšen je čas in kakšen je prostor stanj, razdelimo stohastične procese na [12]:

- procesi v diskretnem času z diskretnim prostorom stanj,
- procesi v diskretnem času z zveznim prostorom stanj,
- procesi v zveznem času z diskretnim prostorom stanj,
- procesi v zveznem času z zveznim prostorom stanj.

V nadaljevanju si poglejmo zakonitost, ki v splošnem velja za poljubne stohastične procese. Če imamo opravka s poljubnim naključnim procesom:

$$X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} \tag{4.2}$$

potem velja v splošnem naslednji izraz [18]:

$$\begin{aligned}&P\left(X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n}\right)=\\&=P\left(X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_2}\middle|X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_3}\middle|X_{t_1},X_{t_2}\right)\cdot...\cdot P\left(X_{t_n}\middle|X_{t_1},X_{t_2},...X_{t_{n-1}}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Podajmo dokaz:

Gotovo lahko za verjetnost $P\left(X_{t_1},X_{t_2}\right)$ zapišemo naslednji izraz:

$$P\left(X_{t_1},X_{t_2}\right)=P\left(X_{t_2}\middle|X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_1}\right) \tag{4.4}$$

Za verjetnost $P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right)$ lahko podobno zapišemo:

$$P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right)=P\left(X_{t_3}\middle|X_{t_1},X_{t_2}\right)\cdot P\left(X_{t_1},X_{t_2}\right) \tag{4.5}$$

ki z upoštevanjem izraza (4.4) preide v obliko:

$$P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right)=P\left(X_{t_3}\middle|X_{t_1},X_{t_2}\right)\cdot P\left(X_{t_2}\middle|X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_1}\right) \tag{4.6}$$

Tudi za verjetnost $P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3},X_{t_4}\right)$ lahko zapišemo:

$$P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3},X_{t_4}\right)=P\left(X_{t_4}\middle|X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right)\cdot P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right) \tag{4.7}$$

ki z upoštevanjem izraza (4.6) preide v obliko:

$$P\left(X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3},X_{t_4}\right)=P\left(X_{t_4}\middle|X_{t_1},X_{t_2},X_{t_3}\right)\cdot P\left(X_{t_3}\middle|X_{t_1},X_{t_2}\right)\cdot P\left(X_{t_2}\middle|X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_1}\right) \tag{4.8}$$

Na podoben način lahko sklepamo naprej. Tako za spremenljivke $X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n}$ dobimo izraz:

$$\begin{aligned}&P\left(X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n}\right)=\\&=P\left(X_{t_n}\middle|X_{t_1},X_{t_2},...X_{t_{n-1}}\right)\cdot P\left(X_{t_{n-1}}\middle|X_{t_1},X_{t_2},...X_{t_{n-2}}\right)\cdot\\&\cdot...\cdot P\left(X_{t_3}\middle|X_{t_1},X_{t_2}\right)\cdot P\left(X_{t_2}\middle|X_{t_1}\right)\cdot P\left(X_{t_1}\right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

ki je enak izrazu (4.3).

4.1 Markovski procesi in Markovske verige

Markovski procesi predstavljajo pomembno skupino stohastičnih procesov, saj lahko z njimi opišemo veliko realnih situacij. Imenujejo se po ruskem matematiku A.A. Markovu, ki je leta 1907 vpeljal končne markovske verige [12].

Določen naključni proces $X(t)$ je Markovski, če velja naslednji izraz [11,18]:

$$P\left(X_{t_n} \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_{n-1}}\right) = P\left(X_{t_n} \middle| X_{t_{n-1}}\right) \tag{4.10}$$

Pri Markovskem procesu je torej pogojna verjetnostna porazdelitev naključne spremenljivke X_{t_n} odvisna le od najpoznejšega znanega stanja, ne pa tudi od stanj procesa v prejšnjih časih [12]. Drugače povedano to pomeni, da Markovski proces nima spomina in je za napoved obnašanja procesa v prihodnosti potrebno poznati zgolj sedanjost, ne pa tudi preteklosti.

Na osnovi izraza (4.10) gotovo velja tudi:

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_{n-1}} \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_{n-2}}\right) = P\left(X_{t_{n-1}} \middle| X_{t_{n-2}}\right) \\
&P\left(X_{t_{n-2}} \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_{n-3}}\right) = P\left(X_{t_{n-2}} \middle| X_{t_{n-3}}\right) \\
&\dots \\
&P\left(X_{t_3} \middle| X_{t_1}, X_{t_2}\right) = P\left(X_{t_3} \middle| X_{t_2}\right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Če izraze (4.11) in (4.10) upoštevamo v izrazu (4.3), ta preide v obliko:

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\right) = \\
&= P\left(X_{t_1}\right) \cdot P\left(X_{t_2} \middle| X_{t_1}\right) \cdot P\left(X_{t_3} \middle| X_{t_2}\right) \cdot \dots \cdot P\left(X_{t_n} \middle| X_{t_{n-1}}\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Poglejmo si primer interpretacije Markovskega procesa:

Izraz (4.10) lahko zapišemo tudi kot:

$$P\left(X_{t_{n+1}} \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, ... X_{t_n}\right) = P\left(X_{t_{n+1}} \middle| X_{t_n}\right) \tag{4.13}$$

in si ga lahko interpretiramo v smislu napovedovanja (predikcije) npr. na naslednji način: *Kakšen bo borzni indeks jutri, zavisi samo od današnjega dne, ne pa tudi od prejšnjih dni.*

Ali je določen proces Markovski ali ne, zavisi od definicije naključnih spremenljivk, ki ta proces specificirajo. Pri tem lahko pogostokrat nemarkovski proces pretvorimo v Markovskega, če na novo definiramo prostor stanj, v katerem dosežemo markovsko lastnost (4.10) [12].

Ločimo dva najbolj značilna tipa Markovskih procesov [12]:

- Markovski procesi z diskretnimi stanji v diskretnem času (**Markovske verige**), ter
- Markovski procesi z diskretnimi stanji v zveznem času.

V nadaljevanju si bomo nekoliko pobliže pogledali Markovske verige.

4.1.1 Markovske verige

Markovske verige so Markovski procesi z diskretnimi stanji v diskretnem času, kjer čas definiramo kot [11]:

$$t_{n+1} \to n+1, \quad t_n \to n, ..., \; t_1 \to 1, \quad t_0 \to 0 \tag{4.14}$$

Naključne spremenljivke potem lahko pišemo v obliki: $\{X_n, \; n \geq 0\}$, pri čemer imamo dan nek prostor možnih stanj $S = \{1, 2, ..., m\}$, kjer je število stanj lahko končno (končne verige) ali števno neskončno (neskončne verige).

Če velja npr. relacija $X_n = i$, to pomeni, da se dana Markovska veriga nahaja v stanju *i* ob času n. Diskretna Markovska veriga je karakterizirana z naslednjim izrazom [11]:

$$P\left(X_{n+1} = j \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i\right) = P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right) \tag{4.15}$$

kjer velja:

$$P\left(X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right)=p_{ij}=P\left(i\rightarrow j\right) \tag{4.16}$$

Verjetnost v izrazu (4.16) se imenuje takoimenovana enokoračna prehodna (tranzicijska) verjetnost za prehod iz stanja *i* v času *n* v stanje *j* v času *n+1* [11].

Če je verjetnost v izrazu (4.16) neodvisna od časa *n*, potem lahko rečemo, da Markovska veriga vsebuje stacionarne tranzicijske verjetnosti in gre za homogeno Markovsko verigo. Sicer pa imamo opravka z nehomogenimi Markovskimi verigami [11].

Na osnovi tranzicijskih verjetnosti za prehod stanj lahko definiramo tudi takoimenovano prehodno (tranzicijsko) matriko verjetnosti, ki ima v primeru prostora stanj $S=\{0,1,...,N\}$ v transponirani formi naslednjo obliko [11,12]:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\{p_{ij}\}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\\ \cdot\\ \cdot\\ N \end{array} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.17}$$

Na podoben način lahko zapišemo to matriko tudi v primeru, če je veriga neskončna. Pri tem prehodna matrika vsebuje vse potrebne informacije o verjetnostih prehodov v matriki med stanji, definiranimi v prostoru stanj S.

Za vsako prehodno matriko velja, da je stohastična, kvadratna, ter ima vse elemente matrike nenegativne. Poleg tega mora biti v vsaki vrstici matrike $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ vsota verjetnosti enaka 1 (v vsakem stolpu matrike $\mathbf{P}$ vsota verjetnosti enaka 1) [11,12,18].

V nadaljevanju si bomo pogledali primer [18], ki bo osvetlil osnovni princip uporabe Markovskih verig.

Kot se izkaže, se da v določenih primerih s pomočjo homogenih Markovskih verig dobro popisati oz. napovedovati zaporedje suhih (sončnih) in deževnih dni [12]. Za preprost primer vremena, ki ga lahko opišemo le z dvema stanjema, to je s sončnim in deževnim vremenom, nastavite vse potrebne izraze za Markovsko verigo!

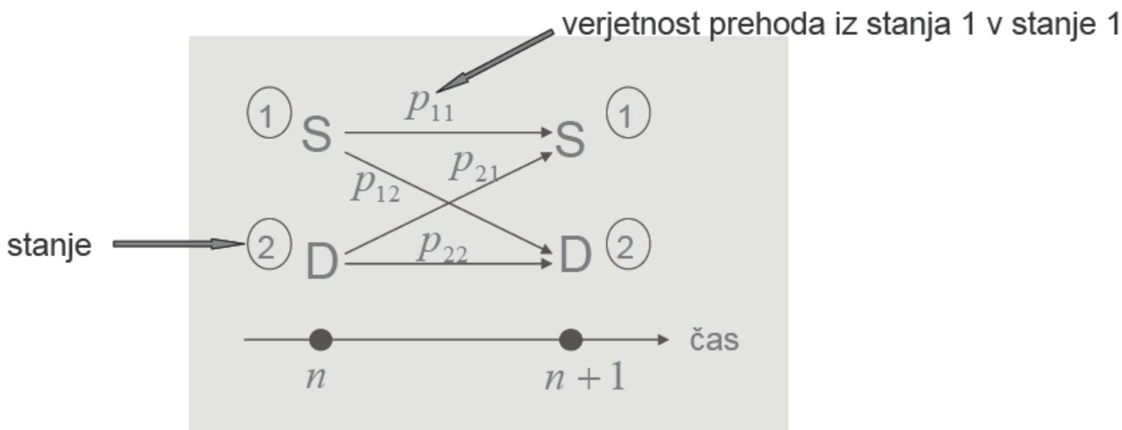
Najprej definirajmo stanja:

- stanje 1 = 'sončno' (S),
- stanje 2 = 'deževno' (D).

torej je prostor stanj, ki jih lahko zasede spremenljivka X_n, naslednji:

$$X_n \in S = \{Sončno, Deževno\} = \{S, D\} = \{1, 2\} \tag{4.18}$$

Mehanizem Markovske verige za ta primer ilustrira slika 43.



Slika 43: Mehanizem Markovske verige za primer vremena (S - sončno vreme, D - deževno vreme)

Iz slike 43 je razvidno, da imamo ob času *n* lahko bodisi sončno, bodisi deževno vreme. Če je tedaj vreme sončno, potem obstaja prehodna verjetnost p_{11}, da bo naslednji dan (čas *n+1*) vreme spet sončno, ter prehodna verjetnost p_{12}, da bo naslednji dan vreme deževno. Če pa je ob času *n* vreme deževno, pa obstaja prehodna verjetnost p_{21}, da bo naslednji dan vreme sončno, ter prehodna verjetnost p_{22}, da bo naslednji dan vreme spet deževno.

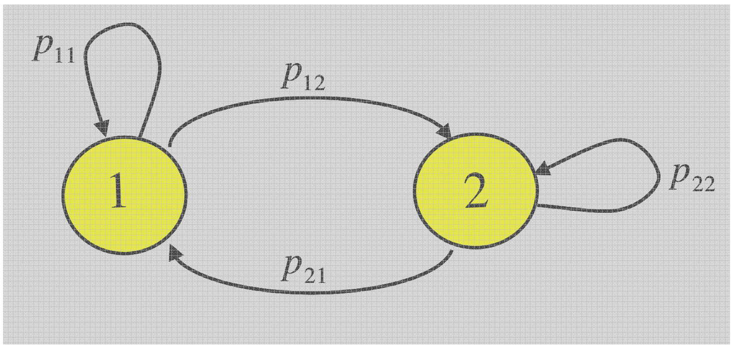
Pomen prehodnih verjetnosti, ki jih v splošnem opisuje izraz (4.16), torej lahko definiramo na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= P(X_{n+1} = S \mid X_n = S) \\
p_{12} &= P(X_{n+1} = D \mid X_n = S) \\
p_{21} &= P(X_{n+1} = S \mid X_n = D) \\
p_{22} &= P(X_{n+1} = D \mid X_n = D)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Seveda mora veljati:

$$
\begin{aligned}
p_{11} + p_{12} &= 1 \\
p_{21} + p_{22} &= 1
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Zakonitosti mehanizma delovanja te verige lahko opišemo tudi s takoimenovanim diagramom prehajanja stanj oz. avtomatom, ki ga prikazuje slika 44.



Slika 43: Diagram prehajanja stanj - avtomat (1 - sončno vreme, 2 - deževno vreme)

Povezava s p_{11} pomeni, da bo avtomat z verjetnostjo p_{11} izvršil prehod iz stanja 1 v stanje 1 ob povečanju časa, z verjetnostjo p_{12} izvršil prehod iz stanja 1 v stanje 2 ob povečanju časa, z verjetnostjo p_{21} izvršil prehod iz stanja 2 v stanje 1 ob povečanju časa, ter z verjetnostjo p_{22} izvršil prehod iz stanja 2 v stanje 2 ob povečanju časa.

Kot se izkaže, se da v primeru vremena prehodne verjetnosti preprosto izračunati na osnovi analize padavin v daljšem časovnem obdobju, kar npr. ponazarja primer na sliki 44 za mesto Tel Aviv za obdobje 27 let [12]. Iz slike 44 je razvidno število dni, ko je suh oz. deževen dan sledil suhemu, ter število dni, ko je suh oz. deževen dan sledil deževnemu dnevu. V tem primeru torej prehodne verjetnosti preprosto izračunamo kot ustrezne relativne frekvence na osnovi danih podatkov [12].

		Sedanji dan	
		Suh	Deževen
Prejšnji dan	Suh	1049	350
	Deževen	351	687

Slika 44: Primer analize padavin za obdobje 27 let za mesto Tel Aviv.

V nadaljevanju si poglejmo, kakšna je verjetnost za zasedbo stanj S ali D za naslednji dan (čas n+*1*), torej, zanima nas:

$$P(X_{n+1}=S)=?$$
$$P(X_{n+1}=D)=? \tag{4.21}$$

pri pogoju, da sta verjetnosti za sončno oz. deževno vreme za prejšnji dan (čas n) enaki:

$$P(X_n=S)=q$$
$$P(X_n=D)=1-q \tag{4.22}$$

Uporabili bomo pravilo totalnih verjetnosti (glej poglavje 3.5. in izraz (3.31)):

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=S)=\\&=P(X_{n+1}=S\,|\,X_n=S)\cdot P(X_n=S)+P(X_{n+1}=S\,|\,X_n=D)\cdot P(X_n=D)\\[1em]&P(X_{n+1}=D)=\\&=P(X_{n+1}=D\,|\,X_n=S)\cdot P(X_n=S)+P(X_{n+1}=D\,|\,X_n=D)\cdot P(X_n=D)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Če upoštevamo izraza (4.19) in (4.22), izraz (4.23) preide v obliko:

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=S)=p_{11}\cdot q+p_{21}\cdot(1-q)\\[1em]&P(X_{n+1}=D)=p_{12}\cdot q+p_{22}\cdot(1-q)\\[1em]&oz.\\&\left[P(X_{n+1}=S)\quad P(X_{n+1}=D)\right]=\left[q\quad 1-q\right]\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}}\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dobljeni izraz lahko zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$\begin{bmatrix} P(X_{n+1}=S) \\ P(X_{n+1}=D) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} q & 1-q \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

oz.

$$\begin{pmatrix} Vektor\ \ verjetnosti \\ ob\ \ času\ \ n+1 \end{pmatrix} = \left(matrika\ \ verjetnosti\ \ prehodov \right) \cdot \begin{pmatrix} Vektor\ \ verjetnosti \\ ob\ \ času\ \ n \end{pmatrix}$$

Na podoben način bi dobili tudi, kakšna je verjetnost za zasedbo stanj S ali D za dva dni naprej (čas $n+2$):

$$\begin{bmatrix} P(X_{n+2}=S) \\ P(X_{n+2}=D) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} P(X_{n+1}=S) \\ P(X_{n+1}=D) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \left\{ \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{P}^{\mathbf{2}} \cdot \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Podobna logika bi veljala tudi za napovedi za več dni (časovnih inkrementov) naprej, kar bomo podrobneje razjasnili v nadaljevanju.

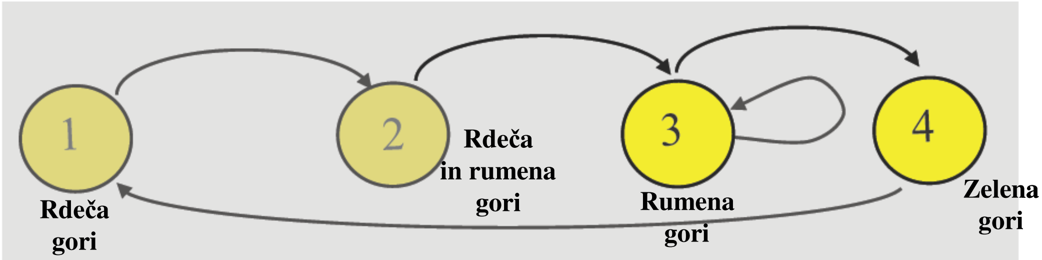
Prej pa si poglejmo še en kratek primer [18]:

Dan imamo semafor, pri katerem definiramo naslednja stanja:

- *rdeča gori (stanje1)*
- *rdeča in rumena gori (stanje 2)*
- *rumena gori (stanje 3)*
- *zelena gori (stanje 4)*

Narišite diagram prehajanja stanj (avtomat) za delujoči sistem!

Slika 45 prikazuje diagram prehajanja stanj za delujoči semafor.



Slika 45: Diagram prehajanja stanj za delujoči semafor.

Iz slike 45 je razvidno, da ko se poleg rdeče prižge rumena, lahko gremo iz stanja 1 le v stanje 2 (rdeča in rumena gorita). Ko nato rdeča ugasne, gremo lahko le v stanje 3 (samo še rumena gori). Nato se v stanje 3 lahko nekaj časa vračamo (saj rumena še vedno gori), ko pa rumena neha goreti in se prižge zelena, gremo v stanje 4 (zelena gori). Odtod pa se lahko vrnemo le v stanje 1 (ko se zelena ugasne in znova rdeča prižge).

4.1.2 Verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj

Če želimo izračunati verjetnosti, da se bodo zasedla posamezna stanja Markovske verige v poljubnem času, pravimo, da želimo ugotoviti **verjetnostno porazdelitev za zasedbo stanj** v poljubnem času [12].

V tem primeru moramo poleg prehodne matrike seveda poznati tudi verjetnostno porazdelitev za zasedbo stanj na začetku opazovanja, ki jo označimo s stolpnim vektorjem:

$$\mathbf{P}(X_o) = \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \dots \\ p_m(0) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

kjer so $p_i(0)$ verjetnosti za zasedbo m danih stanj ob začetku časa opazovanja *(n=0)*.

Če je vektor v izrazu (4.27) poznan, potem lahko verjetnostno porazdelitev za zasedbo stanj v poljubnem času n izračunamo na naslednji način [11,12]:

$$\left\{\mathbf{P}\left(X_n\right)\right\}^{\mathbf{T}} = \underbrace{\left[p_1(n) \quad p_2(n) \quad \dots \quad p_m(n)\right]}_{vrstični\ \ vektor} = \left\{\mathbf{P}(0)\right\}^{\mathbf{T}} \cdot \left(\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{n}}$$

$$oz.:$$

$$\mathbf{P}\left(X_n\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \dots \\ p_m(n) \end{bmatrix}}_{stolpni\ \ vektor} = \left(\left\{\mathbf{P}(0)\right\}^{\mathbf{T}} \cdot \left(\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}^{\mathbf{n}} \cdot \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \dots \\ p_m(0) \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

$$pri\ čemer\ \ je: \sum_{i=1}^{m} p_i(n) = 1$$

pri čemer seveda za vse čase $n > 0$ velja relacija [11,12]:

$$\begin{gathered} \left\{\mathbf{P}\left(X_n\right)\right\}^{\mathbf{T}} = \left\{\mathbf{P}\left(X_{n-1}\right)\right\}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{P}\left(X_n\right) = \left(\left\{\mathbf{P}\left(X_{n-1}\right)\right\}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}\left(X_{n-1}\right) \end{gathered} \tag{4.29}$$

kjer je **P** prehodna matrika z obliko (vsota elementov v stolpih mora biti 1!):

$$\mathbf{P} = \left\{p_{ij}\right\} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} & \cdots & p_{N0} \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & p_{N1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ p_{0N} & p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.30}$$

ter sta $\mathbf{P}\left(X_n\right)$, $\mathbf{P}\left(X_{n-1}\right)$ vektorja porazdelitev verjetnosti za zasedbo stanj v naslednjem času n oz. prejšnjem času $n\text{-}1$.

4.1.3 Ravnovesna porazdelitev

Gre za problem, kako ugotoviti, pri kateri limitni porazdelitvi se verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj ustali, ko postane čas zelo velik. Takšno porazdelitev potem imenujemo **ravnovesna porazdelitev** [12]. Kot se izkaže, pri nerazcepnih končnih neperiodičnih verigah takšna porazdelitev eksistira, neodvisno od začetnih pogojev [12]. Dokazati se da tudi, da je ravnovesna porazdelitev enaka stacionarni (invariantni). To pomeni, če bi bila ravnovesna porazdelitev začetna porazdelitev, bi le-ta ostala nespremenjena v vseh časih [12].

Dokazati se da, da ravnovesno porazdelitev lahko določimo na naslednji način [12]:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\left(X_\infty\right)=\mathbf{P}\left(X_\infty\right)$$
$$oz.$$
$$\mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} p_1(\infty) \\ p_2(\infty) \\ \dots \\ p_m(\infty) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1(\infty) \\ p_2(\infty) \\ \dots \\ p_m(\infty) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{1\infty} \\ p_{2\infty} \\ \dots \\ p_{m\,\infty} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

kjer je $\mathbf{P}$ prehodna matrika, $\mathbf{P}\left(X_\infty\right)=\mathbf{P}_\infty$ je vektor ravnovesne verjetnostne porazdelitve za zasedbo stanj po daljšem času ($n\to\infty$), m pa število stanj. Vektor $\mathbf{P}\left(X_\infty\right)$ torej izračunamo na takšen način, da rešimo vektorsko-matrični sistem enačb (4.31), pri čemer upoštevamo tudi: $\sum_{i=1}^{m} p_{i\infty}=1$

Poglejmo si naslednji primer:

Trije dečki A, B, C se igrajo z žogo. Deček A vedno vrže žogo B-ju, deček B pa vedno vrže žogo C-ju. Deček C z enako verjetnostjo vrže žogo B-ju ali A-ju. Igro popišite z markovsko verigo, katere stanja označujejo posameznega dečka, ki dobi žogo (in jo nato vrže naprej).

a) Definirajte stanja procesa.

b) Narišite avtomat.

c) Konstruirajte prehodno matriko (verjetnosti prehodov stanj).

d) Izračunajte z matričnim računom, kakšna bo porazdelitev verjetnosti za posamezna stanja po sedmih metih, če pri ničtem metu žogo vrže deček A.

e) Kakšna je po daljšem času stacionarna porazdelitev verjetnosti za zasedbo posameznih stanj?

f) Izračunajte porazdelitev verjetnosti za posamezna stanja po sedmih metih še s pomočjo drevesa.

g) Narišite potek matematičnega upanja (pričakovane vrednosti) v odvisnosti od časa.

a) Definirajmo najprej stanja:

$$\begin{array}{ll} 1-\textit{deček}\ \text{A dobi žogo} & (A\rightarrow\ \text{vedno}\ \textit{vrže}\ \text{B-ju}) \\ 2-\textit{deček}\ \text{B dobi žogo} & (B\rightarrow\ \text{vedno}\ \textit{vrže}\ \text{C-ju}) \\ 3-\textit{deček}\ \text{C dobi žogo} & (C\rightarrow\ \textit{vrže bodisi}\ \text{A-ju}\ \textit{bodisi}\ \text{B-ju}) \\ S=\{1,2,3\} & \end{array} \tag{4.32}$$

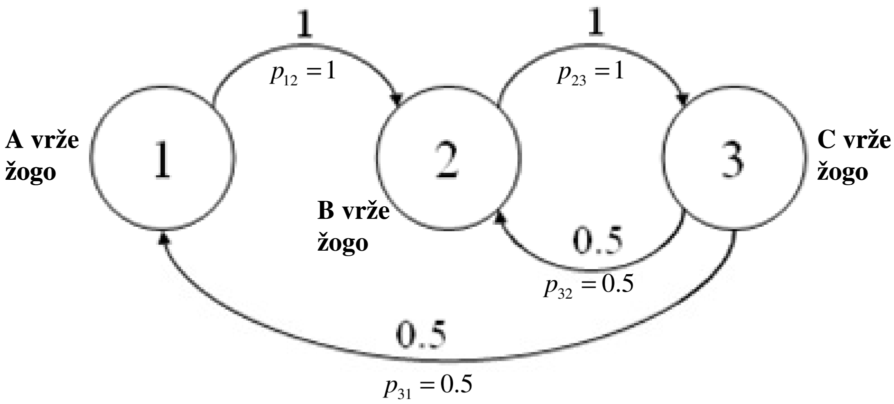
b) Nato narišimo avtomat. Ker A vedno vrže B (z verjetnostjo 1), B vedno vrže C (z verjetnostjo 1), slednji pa z enako verjetnostjo (0.5) vrže bodisi A ali B, gotovo velja naslednje:

$$\begin{aligned} p_{12}&=1 \\ p_{23}&=1 \\ p_{31}&=0.5 \\ p_{32}&=0.5 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Za ostale verjetnosti prehoda pa velja:

$$\begin{aligned} p_{11}&=0 \\ p_{21}&=0 \\ p_{22}&=0 \\ p_{13}&=0 \\ p_{33}&=0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

saj se glede na navodila naloge ne morejo zgoditi. Če v avtomatu narišemo le tiste verjetnosti prehoda, ki so različne od 0, dobimo sliko 46.



Slika 46: Diagram prehajanja stanj (avtomat) za primer dečkov z žogo.

Na sliki 46 vidimo, da je vsota verjetnosti na povezavah, ki gredo iz posameznih stanj, enaka 1. Ta zakonitost vedno velja pri avtomatu in jo je dobrodošlo upoštevati kot dodatno kontrolo, če kje nismo storili napake.

c) Če upoštevamo verjetnosti prehodov v izrazih (4.33) in (4.34), lahko postavimo prehodno matriko iz izraza (4.30) na naslednji način:

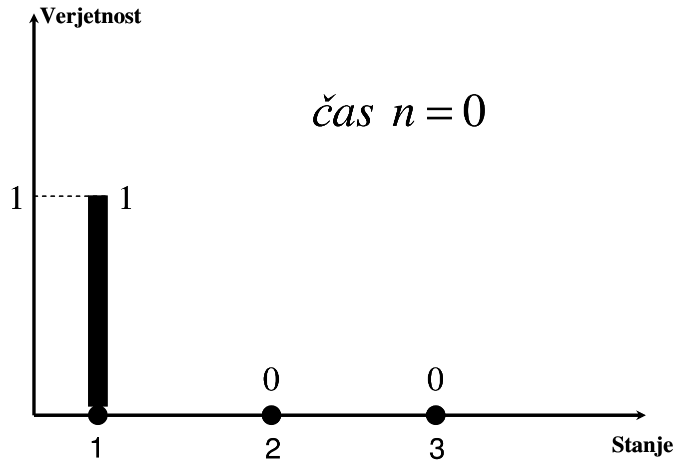
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.35}$$

Iz izraza (4.35) lahko vidimo, da je vsota verjetnosti preko vseh stolpov enaka 1, njihovi indeksi pa so postavljeni v zaporedju: zaporedna številka stolpa, nato pa zaporedna številka vrste.

d) Ker igro začne deček A, verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj na začetku opazovanja gotovo zavzame naslednjo obliko:

$$\mathbf{P}(X_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\!\!\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{4.36}$$

kjer smo zapisali 100 % verjetnost, da začne A (stanje 1), torej B in C ne moreta začeti (verjetnost 0% za stanji 2 in 3). Slika 47 prikazuje verjetnostno porazdelitev ob času $n = 0$.



Slika 47: Verjetnostna porazdelitev ob času $n = 0$.

Ker ob tem času gotovo vrže žogo deček A (začne z igro), smo to na sliki 47 ponazorili s stolpičem višine 1 pri stanju 1.

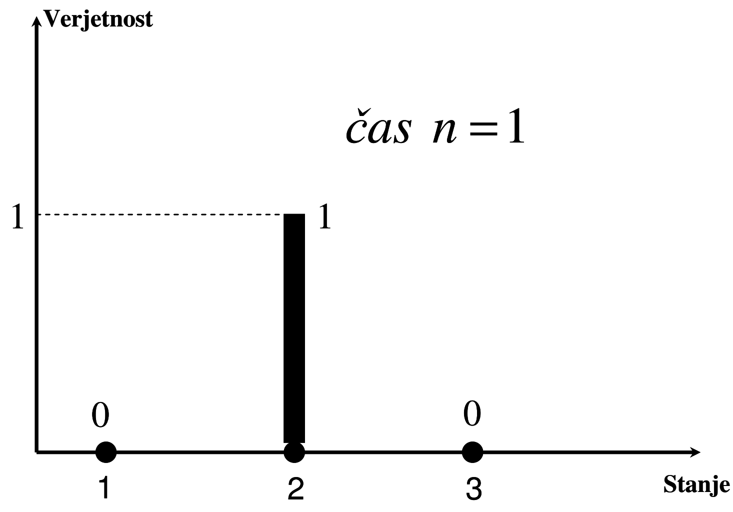
Verjetnostno porazdelitev za zasedbo stanj v poljubnem času $n \in \{1, 2, ..., 7\}$ dobimo na osnovi izraza (4.29). Seveda si pri tem predstavljamo, da se točno ob vsakem časovnem inkrementu zgodi nov dogodek, torej da naslednji deček dobi in nato takoj vrže žogo.

Tako je verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj ob času *n=1* naslednja:

$$\mathbf{P}(X_1) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(X_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{4.37}$$

in pomeni, da je gotovo dobil s 100% verjetnostjo žogo deček B (stanje 2). A namreč žoge nima več, C je pa ni mogel dobiti, zato sta verjetnosti pri stanjih 1 in 3 enaki 0.

Slika 48 prikazuje verjetnostno porazdelitev ob času *n = 1.*



Slika 48: Verjetnostna porazdelitev ob času *n = 1.*

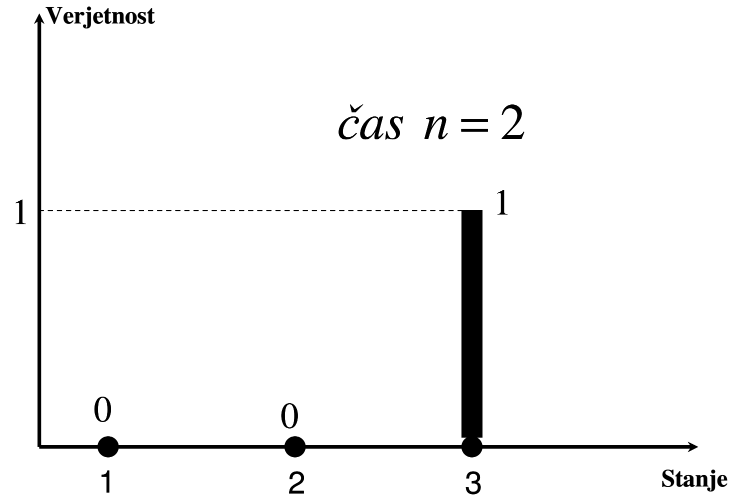
Ker ob tem času gotovo dobi in nato vrže žogo deček B, smo to na sliki 48 ponazorili s stolpičem višine 1 pri stanju 2.

Verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj ob času $n=2$ je naslednja:

$$\mathbf{P}(X_2)=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}(X_1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5\\1 & 0 & 0.5\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} \tag{4.38}$$

in pomeni, da je gotovo dobil s 100% verjetnostjo žogo deček C (stanje 3). Kot vemo, mu jo je v prejšnjem časovnem inkrementu gotovo vrgel deček B, ki torej žoge nima več, A pa je gotovo ni mogel dobiti. Zato sta verjetnosti pri stanjih 1 in 2 enaki 0.

Slika 49 prikazuje verjetnostno porazdelitev ob času $n = 2$.



Slika 49: Verjetnostna porazdelitev ob času $n = 2$.

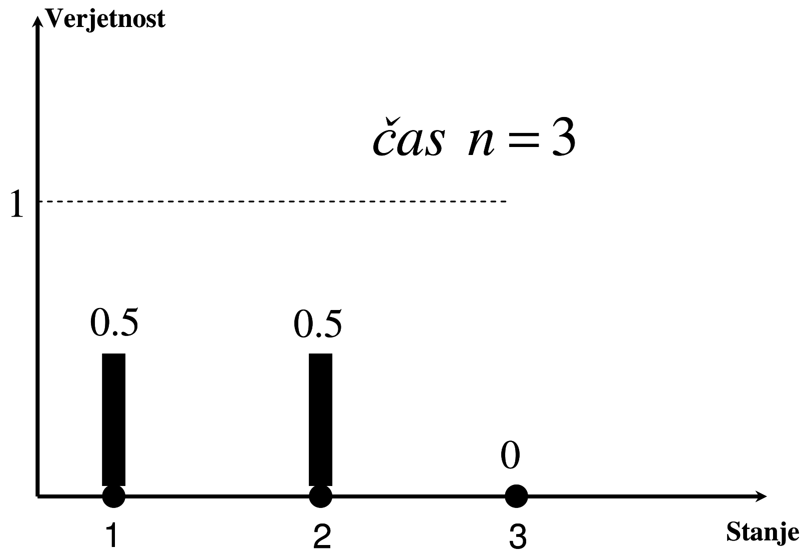
Ker ob tem času gotovo dobi in nato vrže žogo deček C, smo to na sliki 49 ponazorili s stolpičem višine 1 pri stanju 3.

Verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj ob času $n=3$ je naslednja:

$$\mathbf{P}(X_3)=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}(X_2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5\\1 & 0 & 0.5\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} \tag{4.39}$$

in pomeni, da s 50% verjetnostjo dobita žogo bodisi deček A ali B (saj jo je vrgel deček C, obema z enako verjetnostjo). Zato je pri stanjih 1 in 2 vrednost 0.5, pri stanju 3 pa 0 (ker C gotovo nima žoge več).

Slika 50 prikazuje verjetnostno porazdelitev ob času $n = 3$.



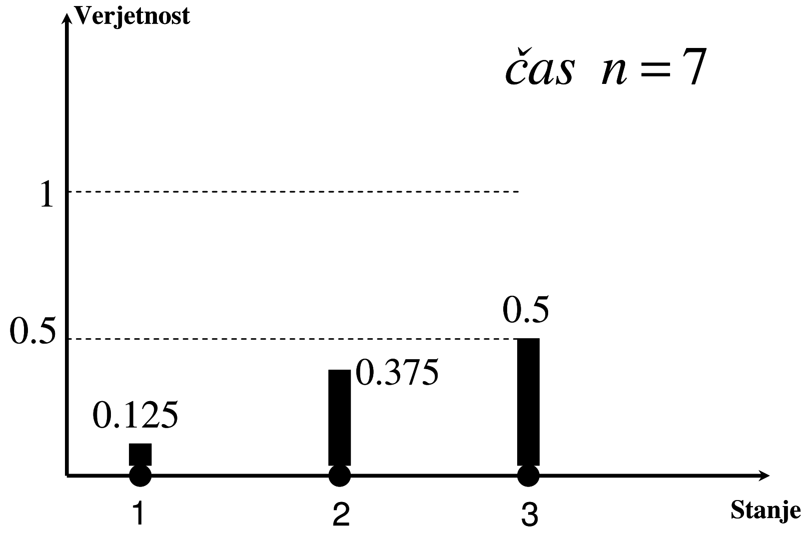
Slika 50: Verjetnostna porazdelitev ob času *n = 3.*

Ker s 50% verjetnostjo dobita žogo bodisi deček A ali B, smo to na sliki 50 ponazorili s stolpičema višine 0.5 pri stanjih 1 oz. 2.

Podobno razmišljanje nato velja za vse nadaljnje mete. Tako je izračun verjetnostnih porazdelitev za zasedbo stanj ob časih $n \in \{4,5,6,7\}$ podan na naslednji način:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_4) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\
\mathbf{P}(X_5) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(X_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\
\mathbf{P}(X_6) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(X_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\
\mathbf{P}(X_7) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(X_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 + 0.5 \times 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Slika 51 prikazuje verjetnostno porazdelitev ob času *n = 7.*



Slika 51: Verjetnostna porazdelitev ob času $n = 7$.

Iz slike 51 je razvidno, da se bo verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj po sedmih metih porazdelila takole: Največ, 50% je verjetnosti, da bo prejel žogo deček C, nekoliko manj, 37.5% je verjetnosti, da jo bo dobil deček B, ter najmanj, 12.5% je verjetnosti, da jo bo prejel deček A.

Slike 47 do 51 lepo ponazarjajo trditev, ki smo jo navedli že na začetku poglavja 4, in sicer, da je za naključne procese značilno, da se naključnim spremenljivkam porazdelitev verjetnosti spreminja s časom!

e) Na osnovi izraza (4.31) lahko zapišemo izraz za izračun stacionarne porazdelitve verjetnosti za zasedbo posameznih stanj na naslednji način:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}_\infty=\mathbf{P}_\infty$$

$$oz.$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5\\ 1 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_{1\infty}\\ p_{2\infty}\\ p_{3\infty}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{1\infty}\\ p_{2\infty}\\ p_{3\infty}\end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Izraz (4.41) lahko zapišemo tudi v obliki sistema enačb:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.5 p_{3\infty} = p_{1\infty} \\ E_2: &\quad p_{1\infty} + 0.5 p_{3\infty} = p_{2\infty} \\ E_3: &\quad p_{2\infty} = p_{3\infty} \end{aligned} \tag{4.42}$$

pri čemer upoštevamo tudi:

$$p_{1\infty} + p_{2\infty} + p_{3\infty} = 1 \tag{4.43}$$

Če vstavimo enačbi E1 in E3 iz izraza (4.42) v izraz (4.43), dobimo:

$$\begin{aligned} & 0.5 p_{3\infty} + p_{3\infty} + p_{3\infty} = 1 \\ & 2.5 p_{3\infty} = 1 \\ & p_{3\infty} = 0.4 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Odtod pa sledi:

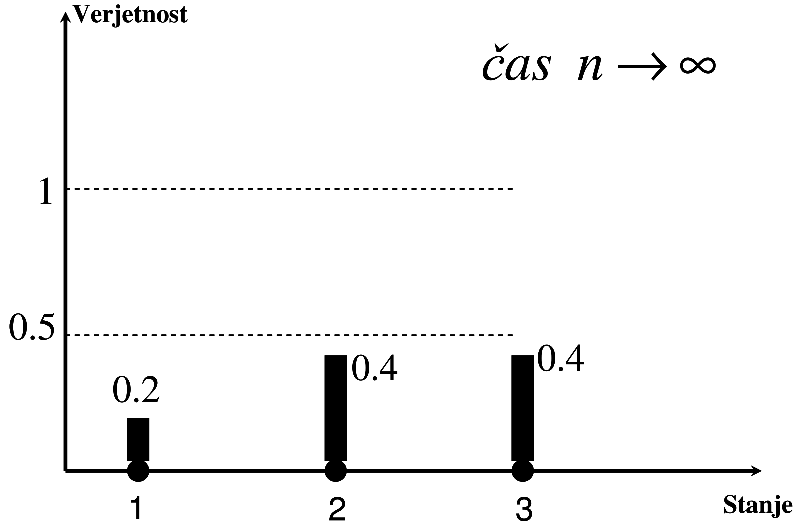
$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.5 \cdot 0.4 = p_{1\infty} \quad \Rightarrow \quad p_{1\infty} = 0.2 \\ E_3: &\quad p_{2\infty} = p_{3\infty} = 0.4 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Vektor stacionarne porazdelitve verjetnosti za zasedbo posameznih stanj po daljšem času se torej glasi:

$$\begin{bmatrix} p_{1\infty} \\ p_{2\infty} \\ p_{3\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{4.46}$$

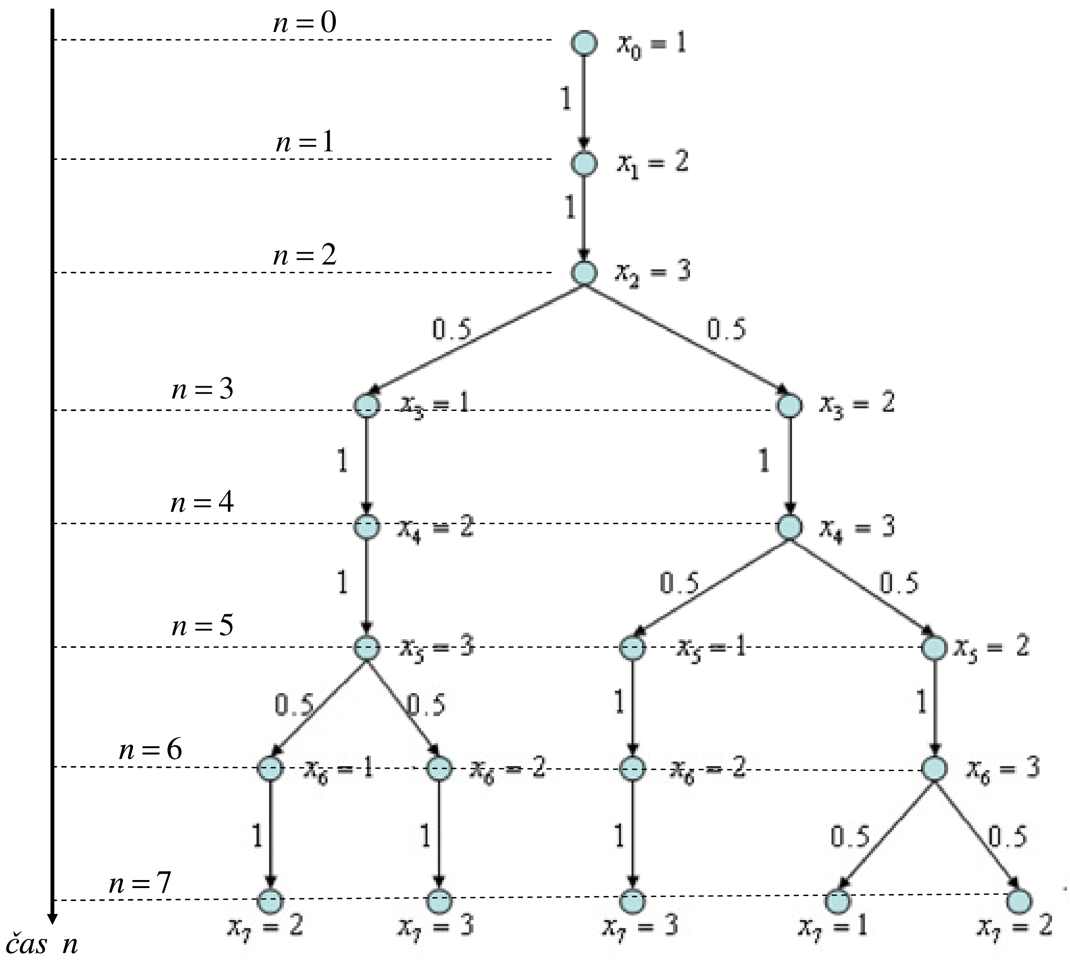
To pomeni, da se bo verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj po daljšem času porazdelila takole: 20% je verjetnosti, da bo prejel žogo deček A, 40% je verjetnosti, da jo bo dobil deček B, ter 40% je verjetnosti, da jo bo prejel deček C.

Slika 52 prikazuje stacionarno verjetnostno porazdelitev.



Slika 52: Stacionarna verjetnostna porazdelitev.

f) V nadaljevanju bomo izračunali porazdelitev verjetnosti za posamezna stanja po sedmih metih še s pomočjo drevesa, ki ga prikazuje slika 53.



Slika 53: Reševanje s pomočjo drevesa.

Drevo na sliki 53 smo narisali na osnovi zakonitosti naloge, pri njegovem risanju pa si lahko zelo pomagamo tudi s pomočjo avtomata na sliki 46. Tako lahko vidimo, da bo ob času 0 naključna spremenljivka *X* gotovo zavzela stanje 1, saj deček A prvi začne z igro. Ker ta gotovo vrže žogo dečku B, bo *X* ob času 1 gotovo zavzela stanje 2. Ker nato deček B gotovo vrže žogo dečku C, bo *X* ob času 2 gotovo zavzela stanje 3. Ker nato deček C lahko poda žogo bodisi dečku A ali B, bo ob času 3 spremenljivka *X* zavzela bodisi stanje 1 ali 2, z enako verjetnostjo 0.5. Drevo se nato v skladu z opisano logiko cepi naprej, vse do časa 7, pri čemer številke na povezavah predstavljajo verjetnost, da naključna spremenljivka *X* ob posameznih časovnih inkrementih zasede posamezna stanja.

Kot je razvidno iz slike 53, lahko od nivoja *n=0* do nivoja *n=7* pridemo na 5 možnih načinov (možnih "poti"). Pri tem velja pri nivoju *n=7*, da naključna spremenljivka *X* lahko zavzame stanje 1 na en možen način, stanji 2 in 3 pa na dva možna načina. Verjetnosti za zasedbo stanj izračunamo tako, da na vsaki poti tvorimo produkt verjetnosti na njenih povezavah, v primeru dveh poti pa še tvorjena produkta ustrezno seštejemo. Tako dobimo naslednji rezultat:

$$\begin{aligned}
&p(X_7=1)=0.5\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot1=(0.5)^3=0.125\\
&p(X_7=2)=1\cdot0.5\cdot1\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot1+0.5\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot1=(0.5)^2+(0.5)^3=0.375\\
&p(X_7=3)=1\cdot0.5\cdot1\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot0.5\cdot1\cdot1=2\cdot(0.5)^2=0.5
\end{aligned}\tag{4.47}$$

Če izraze v (4.47) primerjamo z rezultatom za $\mathbf{P}(X_7)$ v izrazu (4.40), vidimo, da smo očitno prišli do popolnoma enakega rezultata, vendar na drug način.

g) Izračunajmo še potek matematičnega upanja (pričakovane vrednosti) naključne spremenljivke *X* v odvisnosti od časa. Za čas *n=0* potem na osnovi izrazov (3.84) in (4.36) velja:

$$E(X_0)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p(x_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3=1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0=1 \tag{4.48}$$

kjer x_i predstavljajo možna stanja 1, 2 ali 3, p_i pa so pripadajoče verjetnosti za zasedbo teh stanj.

Za čas *n=1* na osnovi izrazov (3.84) in (4.37) velja:

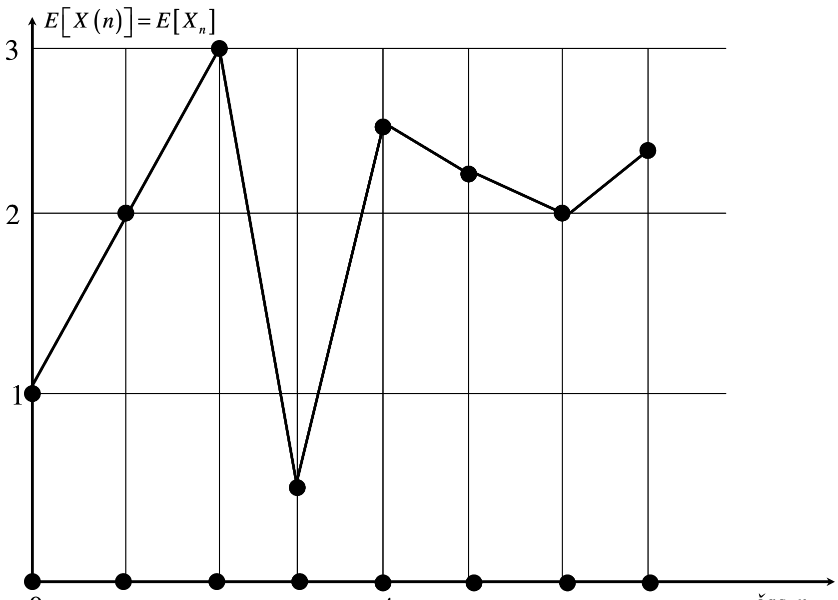
$$E(X_1) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2 \tag{4.49}$$

Na podoben način izračunamo še matematično upanje spremenljivke *X* za preostale čase:

$$\begin{aligned} E(X_2) &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \\ E(X_3) &= 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0 = 1.5 \\ E(X_4) &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 2.5 \\ E(X_5) &= 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.5 = 2.25 \\ E(X_6) &= 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.25 = 2 \\ E(X_7) &= 1 \cdot 0.125 + 2 \cdot 0.375 + 3 \cdot 0.5 = 2.375 \end{aligned} \tag{4.50}$$

pri čemer vsakič vzamemo ustrezen vektor $\mathbf{P}(X_i)$, $i = 2,3,...,7$ iz izrazov (4.38) do (4.40).

Na osnovi izrazov (4.48) do (4.50) lahko tudi narišemo potek matematičnega upanja spremenljivke *X* v odvisnosti od časa, kar prikazuje slika 54.



Slika 54: Potek matematičnega upanja spremenljivke *X* v odvisnosti od časa

Na osnovi slike 54 lahko sklepamo, da se pri stohastičnih procesih kot posledica spreminjanja verjetnostne porazdelitve naključnih spremenljivk v odvisnosti od časa spreminjajo s časom tudi pripadajoče številske karakteristike.

4.1.4 Sklep o Markovskih procesih

Na koncu poglavja 4.1. opozorimo, da je teorija Markovskih verig še mnogo bogatejša, kot je bila na kratko predstavljena v tem delu. Naštejmo le nekatere najpomembnejše segmente, ki se jih tudi preučuje pri Markovskih verigah [12]:

- Klasifikacija stanj na osnovi verjetnosti prve vrnitve v stanje ali na osnovi verjetnosti prehodov,
- Zaprta množica stanj,
- Razcep Markovske verige,
- Nerazcepne verige,
- Absorbcija pri razcepnih verigah, itn.

Podrobnosti o tovrstni teoriji lahko bralec zasledi v literaturi [11,12]. Bralca tudi opozorimo, da se lahko v zbirki rešenih nalog v drugem delu tega učbenika seznani še z nekaterimi primeri iz Markovskih verig, npr. s takoimenovanim "Random Walk" procesom naključnega gibanja, pa tudi s primeri iz področja logistike in transporta. Tako je podan primer napovedovanja verjetnosti za zasedbo stanj stohastičnega procesa ob določenem času v primeru upravljanja zalog v skladišču, v primeru transporta potnikov s helikopterji, ki povezujejo letališče z dislociranimi enotami nekega podjetja, itn.

V nadaljevanju si bomo pogledali naslednji pomemben tip stohastičnih procesov, takoimenovane Poissonove procese. Tudi ti spadajo v kategorijo Markovskih procesov, vendar gre za razliko od Markovskih verig za takšne procese, ki imajo diskretna stanja v zveznem času.

4.2 Poissonovi procesi

Poissonovi procesi spadajo v kategorijo Markovskih procesov, ki imajo diskretna stanja v zveznem času [12]. V prejšnjem poglavju, pri Markovskih verigah, smo imeli opravka s prehodi, ki so se v okviru diskretnega časa zgodili med določenima časoma n in $n+1$. Pri procesih z zveznim časom pa tovrstne prehode opazujemo v kratkem časovnem intervalu med t in $t+\Delta t$.

Poissonov proces je eden izmed najenostavnejših Markovskih procesov z diskretnimi stanji v zveznem času. Ker je teorija tovrstnih procesov mnogo zahtevnejša od Markovskih verig, predstavlja Poissonov proces poleg ostalega tudi dobrodošlo sredstvo za razumevanje definicije in študija bolj kompliciranih procesov.

Poissonov proces lahko uporabimo kot model velikega števila realnih stohastičnih procesov. Naštejmo le nekaj tipičnih področij njegove uporabe [12]:

- Razpad radioaktivnih jeder,
- Termična emisija elektronov,
- Obnavljanje strojev ali naprav v eksploataciji,
- Obnavljanje zalog v skladišču,
- Nezgode v cestnem prometu,
- Množična strežba,
- Prostorska porazdelitev živali ali rastlin, itn.

Kot bomo videli v nadaljevanju, je uporabljena metodologija za študij Markovskih procesov v zveznem času ponekod dokaj podobna, kot je bila uporabljena pri študiju Markovskih verig.

Poglejmo si naslednjo definicijo:

Denimo imamo opravka z zaporedjem trenutnih dogodkov, ki nastopajo posamično in povsem naključno. Označimo z $N(t,t+\Delta t)$ *število dogodkov v časovnem intervalu* $(t,t+\Delta t]$, *z* $N(t)$ *pa število dogodkov v časovnem intervalu* $(0,t]$. ***Poissonov proces** je* *potem družina* $\{N(t)\}$*, ki za neko pozitivno konstanto* ρ *in* $\Delta t \to 0$ *ustreza naslednjim zahtevam [9,11,12,31]:*

$$\begin{aligned}
&a) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right]=1-\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\\
&b) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]=\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\\
&c) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)>1\right]=o(\Delta t)\\
&d) \quad \textit{Število } N(t,t+\Delta t) \textit{ je popolnoma neodvisno od števila dogodkov}\\
&\textit{na intervalu } (0,\Delta t]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

kjer je $o(\Delta t)$ *neka funkcija, ki gre hitreje proti 0 kot* Δt*,* ρ *z dimenzijo* $\dfrac{1}{\textit{časovna enota}}$ *pa se imenuje pogostost dogodkov in je parameter procesa.*

V izrazu (4.51) imamo opravka z:

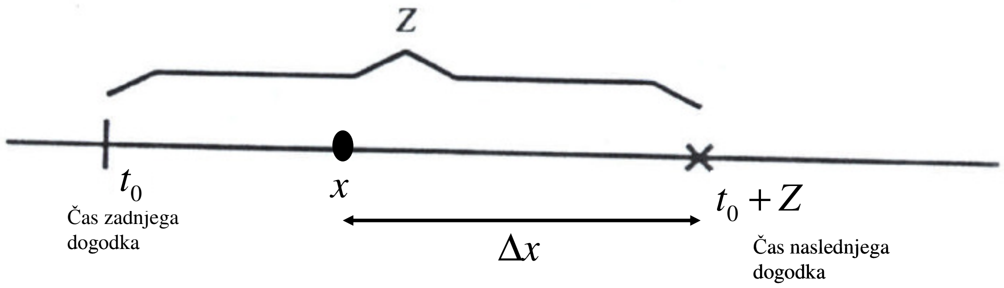
$$\begin{aligned}
&a) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right] \ldots\ldots\ldots \textit{Verjetnost, da se na intervalu } \Delta t\\
&\textit{ni zgodil noben dogodek}\\
&b) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right] \ldots\ldots\ldots \textit{Verjetnost, da se je na intervalu } \Delta t\\
&\textit{zgodil eden dogodek}\\
&c) \quad P\left[N(t,t+\Delta t)>1\right] \ldots\ldots\ldots \textit{Verjetnost, da se je na intervalu } \Delta t\\
&\textit{zgodil več kot en dogodek}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Lastnost d) v izrazu (4.51) pomeni Markovsko lastnost, torej da so dogodki, ki se zgodijo v časovnih intervalih, ki se ne prekrivajo, medsebojno neodvisni.

Zakonitosti a) in b) v izrazu (4.51) si gotovo lahko interpretiramo takole: *Več ko preteče časa (večji je* Δt*), večja je verjetnost, da se je zgodil vsaj en dogodek (manjša je verjetnost, da se ni zgodil noben dogodek).*

4.2.1 Verjetnostna porazdelitev dolžine časovnega intervala do nastopa naslednjega dogodka

V nadaljevanju bomo izpeljali osnovne lastnosti Poissonovega procesa. Vzemimo časovno izhodišče v točki t_0, ki je denimo trenutek, ko se je zgodil zadnji dogodek. Označimo tudi z Z čas od izhodišča do prvega naslednjega dogodka, ki se bo zgodil (glej sliko 55) [12].



Slika 55: Čas *Z* od zadnjega do prvega naslednjega dogodka

Čas Z je naključna spremenljivka, ki ji pravimo tudi ***"interarrival time"*** [11]. Tej spremenljivki želimo določiti njeno verjetnostno porazdelitev.

Na osnovi slike 55 lahko zapišemo naslednji izraz [11,12]:

$$P[Z > x + \Delta x] = P(x \le Z \le x + \Delta x | Z > x) \cdot P[Z > x] \tag{4.53}$$

kjer $P[Z > x + \Delta x]$ pomeni verjetnost, da se nov dogodek ni zgodil do časa $x + \Delta x$, $P(x \le Z \le x + \Delta x | Z > x)$ pomeni verjetnost, da se nov dogodek ni zgodil v intervalu Δx, pri pogoju, da se tudi prej ni zgodil do časa x, $P[Z > x]$ pa pomeni verjetnost, da se nov dogodek ni zgodil do časa x. Ker imamo opravka z neodvisnimi dogodki, lahko zapišemo:

$$P(x \le Z \le x + \Delta x | Z > x) = P(x \le Z \le x + \Delta x) \tag{4.54}$$

Po drugi strani pa lahko tudi zapišemo (glej tudi izraz (4.51)):

$$P(x \le Z \le x+\Delta x) = P\left[N(x, x+\Delta x) = 0\right] = 1 - \rho \cdot \Delta x + o(\Delta x) \tag{4.55}$$

saj smo dejali, da $P(x \le Z \le x+\Delta x)$ pomeni verjetnost, da se nov dogodek ni zgodil v intervalu Δx, točneje v intervalu $(x, x+\Delta x]$. Z upoštevanjem izrazov (4.54) in (4.55) izraz (4.53) preide v naslednjo obliko:

$$P[Z > x+\Delta x] = \left(1 - \rho \cdot \Delta x + o(\Delta x)\right) \cdot P[Z > x] \tag{4.56}$$

Če sedaj vpeljemo novi oznaki:

$$\begin{aligned} P[Z > x+\Delta x] &= R_Z(x+\Delta x) \\ P[Z > x] &= R_Z(x) \end{aligned} \tag{4.57}$$

izraz (4.56) dobi naslednjo obliko:

$$R_Z(x+\Delta x) = \left(1 - \rho \cdot \Delta x + o(\Delta x)\right) \cdot R_Z(x) \tag{4.58}$$

Odtod sledi:

$$\begin{aligned}
&R_Z(x+\Delta x) = R_Z(x) - \rho \cdot \Delta x \cdot R_Z(x) + o(\Delta x) \cdot R_Z(x) \qquad \Big|:\Delta x \\
&\frac{R_Z(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{R_Z(x)}{\Delta x} - \rho \cdot R_Z(x) + \frac{o(\Delta x) \cdot R_Z(x)}{\Delta x} \\
&\frac{R_Z(x+\Delta x) - R_Z(x)}{\Delta x} = -\rho \cdot R_Z(x) + \frac{o(\Delta x) \cdot R_Z(x)}{\Delta x} \qquad \Big|\lim_{\Delta x \to 0} \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R_Z(x+\Delta x) - R_Z(x)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\left(\rho \cdot R_Z(x)\right) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x) \cdot R_Z(x)}{\Delta x}}_{0} \\
&\frac{dR_Z(x)}{dx} = -\rho \cdot R_Z(x)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

kjer smo upoštevali, da gre $o(\Delta x)$ hitreje proti 0 kot Δx, zato je bil en člen v izrazu zanemarjen. Očitno smo dobili diferencialno enačbo 1. reda, ki jo je potrebno rešiti. Pri tem lahko za začetni pogoj rečemo:

$$R_Z(0) = P(Z > 0) = 1 \tag{4.60}$$

saj 100% velja, da je čas do nastopa naslednjega dogodka gotovo večji od 0.

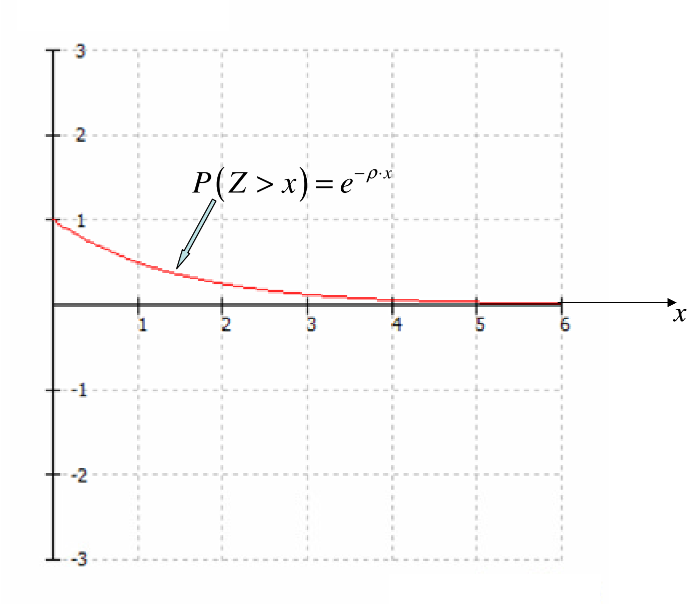
Dotično diferencialno enačbo lahko rešimo na več načinov. Denimo se odločimo, da jo bomo rešili s pomočjo Laplaceove in inverzne Laplaceove transformacije. Tako dobimo:

$$\begin{gathered}
\frac{dR_Z(x)}{dx} = -\rho \cdot R_Z(x) \qquad \Big| L \\
s \cdot R_Z(s) - R_Z(0) = -\rho \cdot R_Z(s) \\
R_Z(s) = \frac{R_Z(0)}{s+\rho}
\end{gathered} \tag{4.61}$$

Če sedaj uporabimo inverzno Laplaceovo transformacijo in upoštevamo še izraza (4.57) in (4.60), dobimo:

$$\begin{gathered}
R_Z(s) = \frac{1}{s+\rho} \qquad \Big| L^{-1} \\
R_Z(x) = e^{-\rho \cdot x} \\
P(Z > x) = e^{-\rho \cdot x}
\end{gathered} \tag{4.62}$$

Slika 56 prikazuje potek verjetnosti, da se nov dogodek še ni zgodil do časa x.



Slika 56: Potek verjetnosti, da se nov dogodek še ni zgodil do časa x (označene enote časa x na abscisni osi so poljubne)

Kot je razvidno iz slike 56, verjetnost, da se še ni zgodil nov dogodek, eksponentno pada s časom. To pomeni: Večji je čas, manjša je verjetnost, da se še ni zgodil naslednji dogodek.

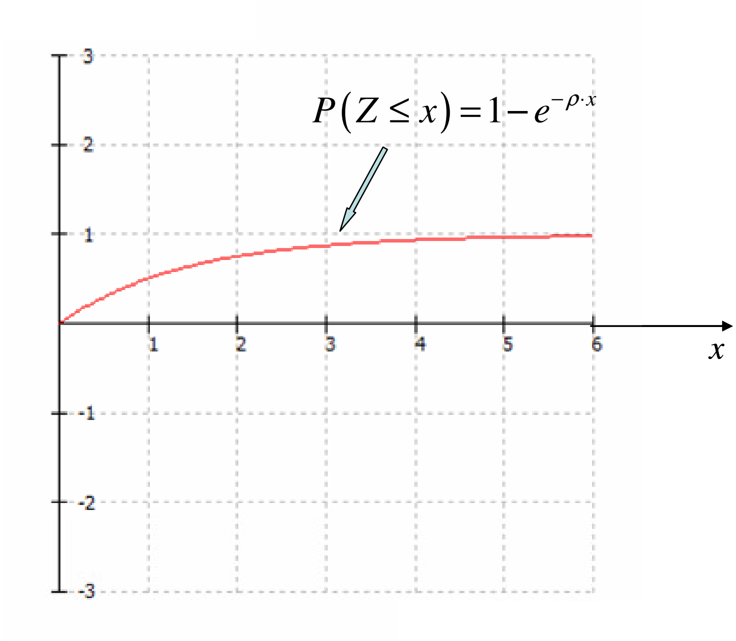
Gotovo velja tudi naslednja relacija:

$$P(Z \leq x) + P(Z > x) = 1$$
$$P(Z \leq x) = 1 - P(Z > x) \tag{4.63}$$

ki z upoštevanjem izraza (4.62) preide v obliko:

$$P(Z \leq x) = 1 - e^{-\rho \cdot x} \tag{4.64}$$

kjer je $P(Z \leq x)$ verjetnost, da se bo zgodil nov dogodek do nekega časa *x* (glej sliko 57).



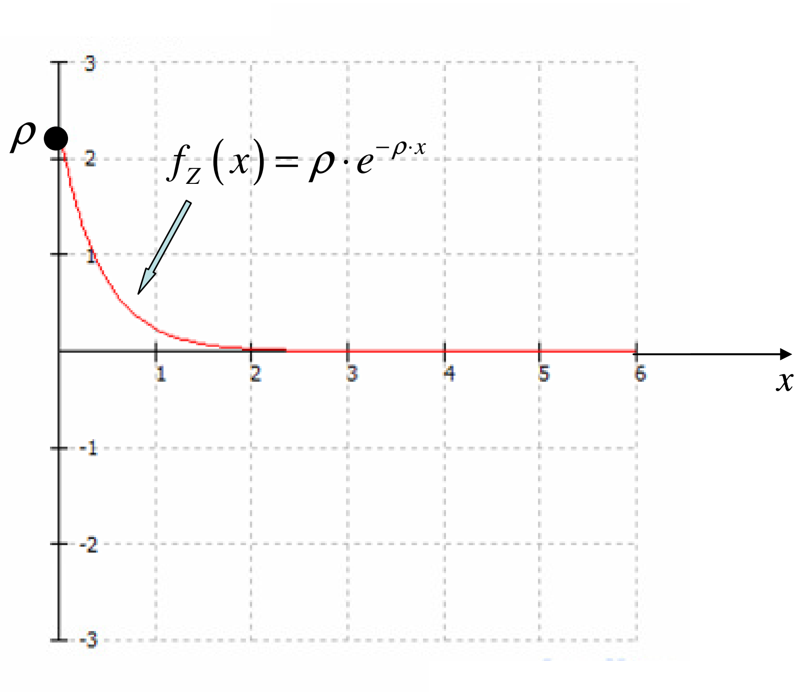
Slika 57: Potek verjetnosti, da se bo zgodil nov dogodek do časa x (označene enote časa x na abscisni osi so poljubne).

Kot je razvidno iz slike 57, verjetnost, da se bo zgodil nov dogodek, eksponentno raste s časom. To pomeni: Večji je čas, večja je verjetnost, da se bo zgodil naslednji dogodek.

Seveda je $P(Z \leq x) = F_Z(x)$ kumulativna funkcija porazdelitve verjetnosti naključne spremenljivke *Z*. Če želimo izračunati porazdelitev gostote verjetnosti za to naključno spremenljivko, lahko na osnovi izraza (3.69) zapišemo (glej sliko 58):

$$f_Z(x) = \frac{dF_Z(x)}{dx} = \frac{dP(Z \leq x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\rho \cdot x}\right) = \rho \cdot e^{-\rho \cdot x}, \qquad x > 0 \tag{4.65}$$

Torej ima naključna spremenljivka Z eksponentno porazdelitev, ki smo jo že predstavili v poglavju 3.12.1. (glej izraz (3.72) in sliko 35). Z drugimi besedami to pomeni [12]: **Verjetnost, da zavzame spremenljivka *Z* (čas od izhodišča do prvega naslednjega dogodka v Poissonovem procesu) vrednost med x in $x + dx$, je podana z eksponentnim zakonom**.



Slika 58: Porazdelitev gostote verjetnosti naključne spremenljivke Z (označene enote časa x na abscisni osi so poljubne).

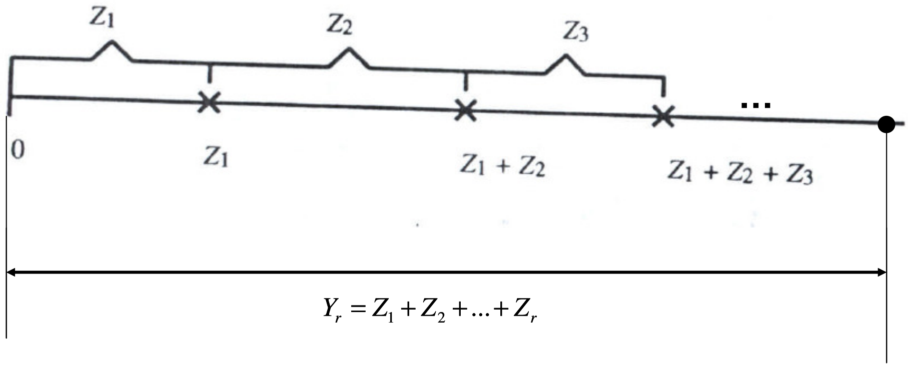
Iz slike 58 je razvidno, da je v času 0, ko je $f_Z(0) = \rho$, največja verjetnost, da se nov dogodek še ni zgodil. Čim začne nato čas naraščati, pa verjetnost, da se nov dogodek še ni zgodil, vedno bolj pada.

Na osnovi tabele v sliki 41 lahko zapišemo tudi povprečno vrednost in varianco spremenljivke Z [11,12]:

$$E(Z) = \frac{1}{\rho}$$
$$VAR(Z) = \frac{1}{\rho^2} \tag{4.66}$$

V nadaljevanju izračunajmo še verjetnostno porazdelitev časa do nastopa *r*-tega dogodka (takoimenovan "Arrival Process").

V ta namen postavimo časovno izhodišče v 0. Naj bodo časi zaporednih dogodkov Z_1, $Z_1 + Z_2$, $Z_1 + Z_2 + Z_3$, itn, kot to prikazuje slika 59 [12].



Slika 59: Ilustracija zaporednih dogodkov

Kot vemo od prej, je čas do prvega dogodka Z_1 porazdeljen eksponentno s parametrom ρ. Če sedaj postavljamo časovno izhodišče po vrsti v trenutke Z_1, $Z_1 + Z_2$, $Z_1 + Z_2 + Z_3$,..., dobimo enake porazdelitve za čase $Z_2, Z_3, ...$, ki so med seboj neodvisni. Poissonov proces torej karakterizira lastnost, da tvorijo čas do prvega dogodka in časi med dvema zaporednima dogodkoma množico neodvisnih naključnih spremenljivk $\{Z_1, Z_2, Z_3, ...\}$. ki so porazdeljene po eksponentnem zakonu (4.65) [12]. Z drugimi besedami to pomeni, da pri Poissonovem procesu ni pomembno, kdaj se je zgodil zadnji dogodek. Če izberemo kot izhodišče katerikoli trenutek, je dolžina časovnega intervala do naslednjega dogodka porazdeljena eksponentno z istim parametrom. To pa pomeni, da Poissonov proces nima spomina [12].

V nekaterih primerih potrebujemo še verjetnostno porazdelitev časa do nastopa *r*-tega dogodka, ki ga označimo z Y_r in je določen na naslednji način (glej sliko 59):

$$Y_r = Z_1 + Z_2 + ... + Z_r \tag{4.67}$$

Za naključno spremenljivko Y_r nas zanima porazdelitev gostote verjetnosti. Kot se izkaže, je ta porazdelitev podana s takoimenovano Erlangovo porazdelitvijo, ki jo dobimo z *r*-kratno konvolucijo eksponentne funkcije [12]. Tovrstna izpeljava je dokaj obsežna, pripelje pa nas do naslednjega rezultata [12]:

$$f_{Y_r}(x) = \frac{\rho \cdot (\rho x)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot e^{-\rho x}, \quad x > 0 \tag{4.68}$$

Dokazati se da, da povprečno vrednost in varianco spremenljivke Y_r podajata naslednja izraza [12]:

$$\begin{aligned} E(Y_r) &= \frac{r}{\rho} \\ VAR(Y_r) &= \frac{r}{\rho^2} \end{aligned} \tag{4.69}$$

4.2.2 Verjetnostna porazdelitev števila dogodkov

V tem poglavju si bomo pogledali, kakšna je pri Poissonovem procesu porazdelitev števila dogodkov $N(t)$ v časovnem intervalu fiksne dolžine $(0,t]$, kar z drugimi besedami pomeni verjetnost za zasedbo stanj [12]. V ta namen definiramo naslednji veličini:

$$\begin{aligned} &p_i(t) = P\left[N(t) = i\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathit{Verjetnost, da\ se\ do\ časa}\ t\ \mathit{zgodi} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad N(t) = i\ \mathit{dogodkov} \\ &p_i(t+\Delta t) = P\left[N(t+\Delta t) = i\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \mathit{Verjetnost, da\ se\ do\ časa}\ t+\Delta t\ \mathit{zgodi} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad N(t+\Delta t) = i\ \mathit{dogodkov} \end{aligned} \tag{4.70}$$

pri čemer bomo za množico $\{p_i(t)\}$ zgradili sistem diferencialnih enačb [12].

Gotovo lahko zapišemo naslednji izraz:

$$P\left[N(t+\Delta t)=i\right]=$$
$$=P\begin{bmatrix} \{N(t)=i \;\; in \;\; N(t,t+\Delta t)=0\} & ali \\ \{N(t)=i-1 \;\; in \;\; N(t,t+\Delta t)=1\} & ali \\ \{N(t)=i-2 \;\; in \;\; N(t,t+\Delta t)=2\} & ali \\ \{N(t)=i-3 \;\; in \;\; N(t,t+\Delta t)=3\} & ali \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ali \\ \{N(t)=i-i \;\; in \;\; N(t,t+\Delta t)=i\} & \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

kar pomeni verjetnost, da se do časa *t* zgodi *i* dogodkov, nato pa v Δt nič dogodkov, ali, do časa *t* se zgodi *i-1* dogodkov, nato pa v Δt eden dogodek, ali do časa *t* se zgodi *i-2* dogodkov, nato pa v Δt dva dogodka, itn,..., ali do časa *t* zgodi 0 dogodkov, nato pa v Δt *i* dogodkov. Seveda lahko izraz (4.71) zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} &P\left[N(t+\Delta t)=i\right]= \\ &=P\left[N(t)=i\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=0 \middle| N(t)=i\right]+ \\ &+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=1 \middle| N(t)=i-1\right]+ \\ &+P\left[N(t)=i-2\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=2 \middle| N(t)=i-2\right]+ \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ &+P\left[N(t)=0\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=i \middle| N(t)=0\right] \end{aligned} \tag{4.72}$$

Ker gre za neodvisne dogodke, iz zapisa odpravimo pogojne verjetnosti in dobimo:

$$\begin{aligned} &P\left[N(t+\Delta t)=i\right]= \\ &=P\left[N(t)=i\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right]+ \\ &+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]+ \\ &+P\left[N(t)=i-2\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=2\right]+ \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ &+P\left[N(t)=0\right]\cdot P\left[N(t,t+\Delta t)=i\right] \end{aligned} \tag{4.73}$$

Na osnovi izrazov (4.51) lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t+\Delta t)=i\right]= \\
&=P\left[N(t)=i\right]\cdot\left[1-\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+ \\
&+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot\left[\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+ \\
&+P\left[N(t)=i-2\right]\cdot o(\Delta t)+ \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
&+P\left[N(t)=0\right]\cdot o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Pokazati se da, da vsota členov v izrazu (4.74) od tretjega naprej gre proti 0, če $\Delta t \to 0$, kar pomeni, da se v zelo kratkem intervalu Δt več kot en dogodek ne more zgoditi [11]. Tovrstno predpostavko bomo upoštevali tudi v kasnejših poglavjih pri drugih izpeljavah!

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t+\Delta t)=i\right]= \\
&=P\left[N(t)=i\right]\cdot\left[1-\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot\left[\rho\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]
\end{aligned} \tag{4.75}$$

oziroma:

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t+\Delta t)=i\right]= \\
&=P\left[N(t)=i\right]\cdot(1-\rho\cdot\Delta t)+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot\rho\cdot\Delta t+ \\
&+\underbrace{\left\{P\left[N(t)=i\right]+P\left[N(t)=i-1\right]\right\}\cdot o(\Delta t)}_{\tilde{o}(\Delta t)}=
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$=P\left[N(t)=i\right]\cdot(1-\rho\cdot\Delta t)+P\left[N(t)=i-1\right]\cdot\rho\cdot\Delta t+\tilde{o}(\Delta t)$$

Če upoštevamo še izraz (4.70), tako dobimo:

$$p_i(t+\Delta t)=p_i(t)\cdot(1-\rho\cdot\Delta t)+p_{i-1}(t)\cdot\rho\cdot\Delta t+\tilde{o}(\Delta t) \tag{4.77}$$

Pokazati se da, da je izraz (4.77) ravno enak takoimenovanemu sistemu enačb Chapman-Kolmogorova [12].

Izraz (4.77) se da še nekoliko preoblikovati:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) - p_i(t)\cdot\rho\cdot\Delta t + p_{i-1}(t)\cdot\rho\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t)$$

$$p_i(t+\Delta t) - p_i(t) = -p_i(t)\cdot\rho\cdot\Delta t + p_{i-1}(t)\cdot\rho\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t) \qquad \Big|:\Delta t$$

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -p_i(t)\cdot\rho + p_{i-1}(t)\cdot\rho + \frac{\tilde{o}(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \Big|\lim_{\Delta t\to 0} \tag{4.78}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t}}_{\frac{dp_i(t)}{dt}} = -p_i(t)\cdot\rho + p_{i-1}(t)\cdot\rho + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{o}(\Delta t)}{\Delta t}}_{0}$$

iz česar sledi:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_i(t)}{dt} = -\rho\cdot p_i(t) + \rho\cdot p_{i-1}(t), \qquad i = 0,1,2,... \\ &kjer \ \ je: \\ &p_i(t) = P\left[N(t) = i\right] \end{aligned} \tag{4.79}$$

Dobimo torej sistem naslednjih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_0(t)}{dt} = -\rho\cdot p_0(t) + \rho\cdot\underbrace{p_{-1}(t)}_{0} = -\rho\cdot p_0(t) \\ &\frac{dp_1(t)}{dt} = -\rho\cdot p_1(t) + \rho\cdot p_0(t) \\ &\frac{dp_2(t)}{dt} = -\rho\cdot p_2(t) + \rho\cdot p_1(t) \\ &.......................... \end{aligned} \tag{4.80}$$

kjer velja:

$$p_0(t) = P\left[N(t)=0\right] \text{.........................} \textit{Verjetnost, da se zgodi } 0 \textit{ dogodkov do časa } t$$

$$p_1(t) = P\left[N(t)=1\right] \text{.........................} \textit{Verjetnost, da se zgodi } 1 \textit{ dogodek do časa } t \tag{4.81}$$

$$p_2(t) = P\left[N(t)=2\right] \text{.........................} \textit{Verjetnost, da se zgodita } 2 \textit{ dogodka do časa } t$$

itn...

in veljajo naslednji začetni pogoji:

$$p_0(0) = P\left[N(0)=0\right] = 1$$

$$p_1(0) = P\left[N(0)=1\right] = 0 \tag{4.82}$$

$$p_2(0) = P\left[N(0)=2\right] = 0$$

itn...

Kot vidimo, je verjetnost, da se do časa 0 zgodi 0 dogodkov, gotovo enaka 1, verjetnosti za en, dva, ali več dogodkov do časa 0 pa so gotovo enake 0.

V nadaljevanju bomo sistem diferencialnih enačb (4.80) poskušali rešiti. V ta namen najprej rešimo prvo diferencialno enačbo. Če nad njo izvedemo Laplaceovo in nato inverzno Laplaceovo transformacijo, dobimo:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\rho \cdot p_0(t) \qquad \left| L \right.$$

$$s \cdot p_0(s) - p_0(0) = -\rho \cdot p_0(s) \tag{4.83}$$

$$p_0(s) = \frac{p_0(0)}{s+\rho} = \frac{1}{s+\rho} \qquad \left| L^{-1} \right.$$

$$p_0(t) = e^{-\rho \cdot t}$$

Rešimo nato drugo diferencialno enačbo. Če nad njo izvedemo Laplaceovo in nato inverzno Laplaceovo transformacijo, dobimo:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\rho \cdot p_1(t) + \rho \cdot p_0(t) = -\rho \cdot p_1(t) + \rho \cdot e^{-\rho \cdot t} \qquad \Big| L$$

$$s \cdot p_1(s) - \underbrace{p_1(0)}_{0} = -\rho \cdot p_1(s) + \rho \cdot \frac{1}{s+\rho} \tag{4.84}$$

$$p_1(s) = \frac{\rho}{(s+\rho)^2} \qquad \Big| L^{-1}$$

$$p_1(t) = \rho \cdot t \cdot e^{-\rho \cdot t}$$

pri čemer si pri pretvorbi iz prostora kompleksne spremenljivke s v časovni prostor t pomagamo s tablicami za uporabo integralskih transformacij [11].

Rešimo nato tretjo diferencialno enačbo. Če nad njo izvedemo Laplaceovo in nato inverzno Laplaceovo transformacijo, dobimo:

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\rho \cdot p_2(t) + \rho \cdot p_1(t) = -\rho \cdot p_2(t) + \rho \cdot \left(\rho \cdot t \cdot e^{-\rho \cdot t}\right) \qquad \Big| L$$

$$s \cdot p_2(s) - \underbrace{p_2(0)}_{0} = -\rho \cdot p_2(s) + \frac{\rho^2}{(s+\rho)^2}$$

$$p_2(s) = \frac{\rho^2}{(s+\rho)^3} = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{2}{(s+\rho)^3} \qquad \Big| L^{-1} \tag{4.85}$$

$$p_2(t) = \frac{\rho^2}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-\rho \cdot t}$$

pri čemer si pri pretvorbi iz prostora kompleksne spremenljivke s v časovni prostor t zopet pomagamo s tablicami za uporabo integralskih transformacij [11].

Če bi nadaljevali s tovrstnim postopkom reševanja in rešili še četrto, peto, itn..., diferencialno enačbo, bi dobili:

$$p_3(t) = \frac{\rho^3}{2\cdot 3}\cdot t^3 \cdot e^{-\rho\cdot t}$$

$$p_4(t) = \frac{\rho^4}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot t^4 \cdot e^{-\rho\cdot t} \tag{4.86}$$

itn...

Torej na osnovi izrazov (4.83) do (4.86) za verjetnost $p_i(t) = P\left[N(t) = i\right]$, to je verjetnost, da se do časa *t* zgodi *i* dogodkov, velja [11,12]:

$$p_i(t) = \frac{\rho^i}{i!}\cdot t^i \cdot e^{-\rho\cdot t}$$

$$p_i(t) = P\left[N(t) = i\right] = \frac{(\rho\cdot t)^i}{i!}\cdot e^{-\rho\cdot t}, \qquad i = 0,1,2,... \tag{4.87}$$

Če ta izraz primerjamo z izrazom (3.48), kjer bi parameter λ nadomestili z $\rho\cdot t$ in indeks k z indeksom i, vidimo, da smo dobili ravno Poissonovo porazdelitev kot rešitev sistema diferencialnih enačb Poissonovega procesa.

Na osnovi tabele v sliki 41 potem lahko zapišemo tudi povprečno vrednost in varianco števila dogodkov [11,12]:

$$E\left(N(t)\right) = \lambda = \rho\cdot t$$

$$VAR\left(N(t)\right) = \lambda = \rho\cdot t \tag{4.88}$$

kar pomeni, da ti dve številski karakteristiki linearno naraščata s časom *t*.

4.2.3 Kompleksni procesi kot kombinacija Poissonovih procesov

Marsikateri bolj kompliciran stohastičen proces lahko dobimo z kombinacijo Poissonovih procesov. Denimo imamo opravka s kombinacijo k neodvisnih Poissonovih procesov s parametri $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k$. Označimo z $N(t, t+\Delta t)$ število dogodkov kombiniranega Poissonovega procesa na intervalu $(t, t+\Delta t)$, torej število dogodkov kateregakoli neodvisnega Poissonovega procesa v okviru kombiniranega Poissonovega procesa. Označimo tudi z $N^{(i)}(t, t+\Delta t), i = 1, ..., k$ število dogodkov posameznih neodvisnih Poissonovih procesov na intervalu $(t, t+\Delta t)$. Potem za verjetnost, da se pri kombiniranem procesu v intervalu $(t, t+\Delta t)$ ne zgodi noben dogodek, zapišemo na naslednji način [12]:

$$P\left[N(t+\Delta t)=0\right] = P^{(1)}\left[N(t+\Delta t)=0\right] \cdot P^{(2)}\left[N(t+\Delta t)=0\right] \cdot ... \cdot P^{(k)}\left[N(t+\Delta t)=0\right] \quad (4.89)$$

Torej je ta verjetnost enaka produktu verjetnosti posameznih neodvisnih Poissonovih procesov, da se pri njih ne zgodi noben dogodek na intervalu $(t, t+\Delta t)$. Na osnovi izraza a) v (4.51) lahko potem zapišemo:

$$\begin{aligned} &P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right] = \\ &= \left(1-\rho_1 \cdot \Delta t + o_1(\Delta t)\right) \cdot \left(1-\rho_2 \cdot \Delta t + o_2(\Delta t)\right) \cdot ... \cdot \left(1-\rho_k \cdot \Delta t + o_1(\Delta t)\right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Pokazati se da, da ta izraz v primeru majhnega $\Delta t \to 0$ preide v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} &P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right] = \\ &= (1-\rho_1 \cdot \Delta t) \cdot (1-\rho_2 \cdot \Delta t) \cdot ... \cdot (1-\rho_k \cdot \Delta t) + \hat{o}(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.91)$$

kjer je $\hat{o}(\Delta t)$ neka funkcija, ki gre hitreje proti 0 kot Δt.

Če posamezne faktorje v izrazu (4.91) začnemo množiti med seboj, dobimo:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N\left(t,t+\Delta t\right)=0\right]= \\
&=\left(1-\rho_2\cdot\Delta t-\rho_1\cdot\Delta t+\underbrace{\rho_1\cdot\rho_2\cdot\Delta t^2}_{0}\right)\cdot\left(1-\rho_3\cdot\Delta t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\rho_k\cdot\Delta t\right)+\hat{o}\left(\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

Če člen z Δt^2 pri majhnih $\Delta t\rightarrow 0$ zanemarimo, dobimo:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N\left(t,t+\Delta t\right)=0\right]\approx \\
&\approx\left(1-\rho_2\cdot\Delta t-\rho_1\cdot\Delta t\right)\cdot\left(1-\rho_3\cdot\Delta t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\rho_k\cdot\Delta t\right)+\hat{o}\left(\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

Računajmo naprej:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N\left(t,t+\Delta t\right)=0\right]\approx \\
&\approx\left(1-\rho_2\cdot\Delta t-\rho_1\cdot\Delta t\right)\cdot\left(1-\rho_3\cdot\Delta t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\rho_k\cdot\Delta t\right)\approx \\
&\approx\left(1-\rho_3\cdot\Delta t-\rho_2\cdot\Delta t+\underbrace{\rho_2\cdot\rho_3\cdot\Delta t^2}_{0}-\rho_1\cdot\Delta t+\underbrace{\rho_1\cdot\rho_3\cdot\Delta t^2}_{0}\right)\cdot\left(1-\rho_4\cdot\Delta t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\rho_k\cdot\Delta t\right)+ \\
&+\hat{o}\left(\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

Izraz (4.94) torej preide v obliko:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N\left(t,t+\Delta t\right)=0\right]\approx \\
&\approx\left(1-\rho_3\cdot\Delta t-\rho_2\cdot\Delta t-\rho_1\cdot\Delta t\right)\cdot\left(1-\rho_4\cdot\Delta t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\rho_k\cdot\Delta t\right)+\hat{o}\left(\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

Postopek nadaljnjih množenj in zanemarjanj členov z Δt^2 pri majhnih $\Delta t\rightarrow 0$ bi lahko nadaljevali. Tako bi dobili naslednji izraz [12]:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N\left(t,t+\Delta t\right)=0\right]\approx \\
&\approx\left(1-\rho_k\cdot\Delta t-\rho_{k-1}\cdot\Delta t-\ldots-\rho_2\cdot\Delta t-\rho_1\cdot\Delta t\right)+\hat{o}\left(\Delta t\right)= \\
&=1-\left(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k\right)\cdot\Delta t+\hat{o}\left(\Delta t\right)
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right]\approx 1-\Delta t\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\rho_i}_{\rho}+\hat{o}(\Delta t)\\
&P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right]\approx 1-\Delta t\cdot\rho+\hat{o}(\Delta t)
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

kjer smo z $\rho=\sum_{i=1}^{k}\rho_i$ označili pogostost dogodkov kombiniranega Poissonovega procesa kot mešanice posameznih neodvisnih Poissonovih procesov s parametri ρ_i.

Podobno lahko speljemo tudi verjetnost, da se pri kombiniranem procesu v intervalu $(t,t+\Delta t)$ zgodi eden dogodek, pri čemer bi dobili naslednji rezultat [12]:

$$
\begin{aligned}
&P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]\approx \Delta t\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\rho_i}_{\rho}+\hat{o}(\Delta t)\\
&P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]\approx \Delta t\cdot\rho+\hat{o}(\Delta t)
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

Če primerjamo izraza (4.97) in (4.98) z izrazom (4.51), ki opredeljuje osnovno definicijo Poissonovega procesa, vidimo, da kombiniran proces dejansko tudi spada v kategorijo Poissonovih procesov. Proces, ki nastane kot kombinacija k neodvisnih Poissonovih procesov, je torej zopet Poissonov proces s parametrom $\rho=\sum_{i=1}^{k}\rho_i$. Seveda je število dogodkov na intervalu $(t,t+\Delta t)$ neodvisno od dogodkov, ki so se zgodili na intervalu $(0,t)$.

Poglejmo si še, kakšna je verjetnost, da nek dogodek iz kombiniranega procesa pripada določenemu osnovnemu Poissonovemu procesu. Kot se izkaže, to verjetnost lahko določimo na naslednji način [12]:

$$
P\left[dogodek\ \ je\ iz\, i.tega\ \ procesa\right]=\frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{k}\rho_i}=\frac{\rho_i}{\rho},\qquad i=1,2,\ldots,k
\tag{4.99}
$$

V nadaljevanju si poglejmo naslednji primer [12]:

Denimo, da tvorijo prometne nesreče s smrtnim izidom na nekem območju Poissonov proces. Nesreče brez smrtnega izida na istem območju tvorijo drugi Poissonov proces, neodvisen od prvega. Potem je kombiniran proces tudi Poissonov, s pogostostjo nesreč, ki je enaka vsoti pogostosti nesreč s smrtnim izidom in pogostosti nesreč brez smrtnega izida. Kakšna je verjetnost, da ima neka nesreča smrtni izid, ali da ga nima?

Če definiramo z ρ_1 pogostost nesreč s smrtnim izidom, ter z ρ_2 pogostost nesreč brez smrtnega izida, potem velja:

$$\begin{aligned} &1.\textit{Poissonov proces}\left(\rho_1\right)=\left\{\textit{prometne nesreče s smrtnim izidom}\right\} \\ &2.\textit{Poissonov proces}\left(\rho_2\right)=\left\{\textit{prometne nesreče brez smrtnega izida}\right\} \\ &\textit{Kombiniran proces}\left(\rho\right)=\left\{\textit{vse prometne nesreče}\right\}, \quad \rho=\rho_1+\rho_2 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Verjetnost, da ima neka nesreča smrtni izid, ali da ga nima, izračunamo na osnovi izraza (4.99) takole:

$$\begin{aligned} &P\left\{\textit{prometna nesreča ima smrtni izid}\right\}=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2} \\ &P\left\{\textit{prometna nesreča nima smrtni izid}\right\}=\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \end{aligned} \tag{4.101}$$

Poglejmo si še en primer [13]:

Taxi služba v nekem mestu ima 10 taksijev. Okvare posameznega taksija predstavljajo dogodke, ki tvorijo Poissonov proces. Pogostost okvar posameznega taksija, ki zahteva večje popravilo, je 0.6/leto, ki je konstantna v daljšem časovnem obdobju. Kakšna je verjetnost, da se v 3 mesecih:

a) Zgodi vsaj ena okvara taksija, ki zahteva večje popravilo?
b) Zgodijo manj kot tri takšne okvare?

Podatke lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} & k = 10 \\ & \rho_i = 0.6 / leto \quad\quad i = 1,2,...,10 \\ & t = 3\ me\sec e = 0.25\ leta \end{aligned} \tag{4.102}$$

Seveda imamo opravka s kombiniranim Poissonovim procesom, sestavljenim iz 10 neodvisnih Poissonovih procesov (za vsak taxi posebej). Za skupen proces velja:

$$\rho = \sum_{i=1}^{10} \rho_i = \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_{10} = \frac{0.6}{leto} + \frac{0.6}{leto} + ... + \frac{0.6}{leto} = 10 \cdot \frac{0.6}{leto} = \frac{6}{leto} \tag{4.103}$$

Na osnovi izraza (4.87) lahko zapišemo za skupen Poissonov proces:

$$\begin{aligned} & p_i(t) = P\left[N(t) = i\right] = \frac{(\rho \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\rho \cdot t}, \quad\quad i = 0,1,2,... \\ & p_i(t) = \frac{\left(\frac{6}{leto} \cdot t\right)^i}{i!} \cdot e^{-\frac{6}{leto} \cdot t}, \quad\quad i = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{4.104}$$

kjer $p_i(t)$ predstavlja verjetnost, da se na intervalu $(0,t)$ zgodi i dogodkov okvar taksijev. Če je opazovani časovni interval $(0,t)$ enak $(0, 0.25\, leta)$, sledi:

$$\begin{aligned} & p_i(0.25\, leta) = \frac{\left(\frac{6}{leto} \cdot 0.25\, leta\right)^i}{i!} \cdot e^{-\frac{6}{leto} \cdot 0.25\ leta}, \quad\quad i = 0,1,2,... \\ & p_i(0.25\, leta) = \frac{(1.5)^i}{i!} \cdot e^{-1.5}, \quad\quad i = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{4.105}$$

a) Izračunajmo najprej verjetnost, da se zgodi vsaj ena okvara taksija, ki zahteva večje popravilo, v obdobju $(0,t)=(0,0.25\,leta)$. Gotovo velja naslednje:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)+\ldots=1 \\
&p_1(t)+p_2(t)+\ldots=1-p_0(t) \\
&oz. \\
&p_1(0.25\,leta)+p_2(0.25\,leta)+\ldots=1-p_0(0.25\,leta)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Vsaj ena okvara pomeni, da se zgodi ena, dve, ali več okvar taksija. Torej velja:

$$\begin{aligned}
&P(vsaj\ ena\ okvara\ v\ 0.25\,leta)=P(i\geq 1)= \\
&=p_1(0.25\,leta)+p_2(0.25\,leta)+\ldots=1-p_0(0.25\,leta)
\end{aligned} \tag{4.107}$$

kjer $p_0(t)=p_0(0.25leta)$ predstavlja verjetnost, da se na intervalu $(0,0.25\,leta)$ ne zgodi nobena okvara taksija. Če upoštevamo še izraz (4.105), tako dobimo:

$$\begin{aligned}
&P(vsaj\ ena\ okvara\ v\ 0.25\,leta)=1-p_0(0.25\,leta) \\
&P(vsaj\ ena\ okvara\ v\ 0.25\,leta)=1-\frac{(1.5)^0}{0!}\cdot e^{-1.5}=1-e^{-1.5} \\
&P(vsaj\ ena\ okvara\ v\ 0.25\,leta)=0.7769
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Torej je 77.69% verjetnosti, da se bo v 3 mesecih zgodila vsaj ena okvara katerega izmed taksijev voznega parka, ki zahteva večje popravilo.

b) Izračunajmo še verjetnost, da se zgodijo manj kot tri okvare taksija, ki zahtevajo večje popravilo, v obdobju $(0,t)=(0,0.25\,leta)$. Gotovo velja naslednje:

$$\begin{aligned}
&P(manj\ kot\ tri\ okvare\ v\ 0.25\,leta)=P(i\leq 2)= \\
&=p_0(0.25\,leta)+p_1(0.25\,leta)+p_2(0.25\,leta)
\end{aligned} \tag{4.109}$$

kjer $p_0(t)=p_0(0.25leta),\ p_1(t)=p_1(0.25leta),\ p_2(t)=p_2(0.25leta)$ predstavljajo verjetnosti, da se na intervalu $(0, 0.25\,leta)$ ne zgodi nobena okvara taksija, ali ena okvara, ali dve okvari. Če upoštevamo še izraz (4.105), tako dobimo:

$$
\begin{aligned}
p_0(0.25\,leta) &= \frac{(1.5)^0}{0!}\cdot e^{-1.5} = e^{-1.5} \\
p_1(0.25\,leta) &= \frac{(1.5)^1}{1!}\cdot e^{-1.5} = 1.5\cdot e^{-1.5} = \frac{3}{2}\cdot e^{-1.5} \\
p_2(0.25\,leta) &= \frac{(1.5)^2}{2!}\cdot e^{-1.5} = \frac{9}{8}\cdot e^{-1.5}
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

Odtod sledi:

$$
\begin{aligned}
&P(manj\ kot\ tri\ ok\text{var}e\ v\ 0.25\,leta) = P(i \le 2) = \\
&= e^{-1.5} + \frac{3}{2}\cdot e^{-1.5} + \frac{9}{8}\cdot e^{-1.5} = \left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\right)\cdot e^{-1.5} = 0.8088
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

Torej je 80.88% verjetnosti, da se bodo v 3 mesecih zgodile manj kot tri okvare katerega izmed taksijev voznega parka, ki zahtevajo večje popravilo.

4.3 Rojstni procesi

Rojstne procese lahko uporabimo kot modele realnih situacij npr. pri opisu razmnoževanja bakterij, verižnih reakcijah jedrskih cepitev, in podobno [12]. Ločimo linearne rojstne procese, ter njihovo posplošitev, nelinearne rojstne procese. Pri prvih je odvisnost pogostosti rojstev od števila prisotnih osebkov podana z linearno funkcijo, pri drugih pa z nelinearno funkcijo. V nadaljevanju se bomo omejili zgolj na obravnavo linearnih rojstnih procesov.

Denimo imamo množico osebkov (populacijo), za katero velja naslednje [12]. Verjetnost, da osebek, ki je prisoten v času t, v intervalu $(t, t+\Delta t]$, rodi novega osebka, naj bo enaka $\lambda\cdot\Delta t + o(\Delta t)$, da ga ne rodi, pa naj bo enaka $1-\lambda\cdot\Delta t + o(\Delta t)$. Verjetnost za rojstvo naj bo za vse osebke enaka in neodvisna od njihove starosti. Seveda naj bodo tudi rojstva, ki se nanašajo na različne osebke, med seboj neodvisna. Rojevanje vsakega osebka predstavlja nek neodvisen Poissonov proces. Ker je osebkov v opazovani populaciji več, gre očitno za kombinacijo več neodvisnih Poissonovih procesov, kjer so dogodki posamezna rojstva. Kot vemo, je takšen kombiniran proces zopet Poissonov, s pogostostjo dogodkov, ki je enaka vsoti pogostosti dogodkov posameznih procesov. Pogostost posameznih procesov je v našem primeru za vse osebke enaka in je enaka vrednosti λ. Če je v času t v populaciji prisotnih i osebkov, je potemtakem pogostost rojstev kombiniranega procesa očitno enaka $i\cdot\lambda$. Verjetnost za rojstvo pri kombiniranem procesu na intervalu $(t,t+\Delta t]$ pa je enaka $i\cdot\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)$.

Število osebkov, prisotnih v populaciji v času *t*, predstavlja naključno spremenljivko, ki jo označimo z $N(t)$. Verjetnost, da je to število enako *i*, označimo z $p_i(t)=P\left[N(t)=i\right]$. Denimo je velikost populacije ob času 0 enaka n_0. Potem ob določenih predpostavkah, ki so bile razložene že pri Poissonovih procesih, lahko zapišemo naslednji izraz za verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0 osebkov:

$$\begin{gathered}p_{n_0}(t+\Delta t)=p_{n_0}(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo)+p_{n_0-1}(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo)+\tilde{o}(\Delta t)\\ p_{n_0}(t+\Delta t)=p_{n_0}(t)\cdot[1-n_0\cdot\lambda\cdot\Delta t]+p_{n_0-1}(t)\cdot(n_0-1)\cdot\lambda\cdot\Delta t+\tilde{o}(\Delta t)\end{gathered}\tag{4.112}$$

Torej bodisi ostane n_0 osebkov, ki ne rodijo novega osebka, bodisi jih je bilo n_0-1, pa so ti rodili nov osebek. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0+1 osebkov, izračunamo takole:

$$\begin{gathered}p_{n_0+1}(t+\Delta t)=p_{n_0+1}(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo)+p_{n_0}(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo)+\tilde{o}(\Delta t)\\ p_{n_0+1}(t+\Delta t)=p_{n_0+1}(t)\cdot\left[1-(n_0+1)\cdot\lambda\cdot\Delta t\right]+p_{n_0}(t)\cdot n_0\cdot\lambda\cdot\Delta t+\tilde{o}(\Delta t)\end{gathered}\tag{4.113}$$

Torej bodisi ostane n_0+1 osebkov, ki ne rodijo novega osebka, bodisi jih je bilo n_0, pa so ti rodili nov osebek. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0+2 osebkov, izračunamo takole:

$$p_{n_0+2}(t+\Delta t) = p_{n_0+2}(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo) + p_{n_0+1}(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo) + \tilde{o}(\Delta t)$$

$$p_{n_0+2}(t+\Delta t) = p_{n_0+2}(t)\cdot\left[1-(n_0+2)\cdot\lambda\cdot\Delta t\right] + p_{n_0+1}(t)\cdot(n_0+1)\cdot\lambda\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t) \tag{4.114}$$

Torej bodisi ostane n_0+2 osebkov, ki ne rodijo novega osebka, bodisi jih je bilo n_0+1, pa so ti rodili nov osebek. V splošnem očitno torej velja:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo) + p_{i-1}(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo) + \tilde{o}(\Delta t)$$

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot[1-i\cdot\lambda\cdot\Delta t] + p_{i-1}(t)\cdot(i-1)\cdot\lambda\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t), \tag{4.115}$$

$$i = n_o, n_o+1, n_o+2, \ldots$$

Seveda smo pri izpeljavi upoštevali, da osebki v zelo kratkem času $\Delta t \to 0$ ne morejo roditi več kot enega osebka. Indeks i je pa gotovo $i \geq n_0$, saj se v tem procesu dogajajo le rojstva, torej je po nekem času število osebkov gotovo večje ali kvečjemu enako številu začetne populacije.

Če zanemarimo funkcijo $\tilde{o}(\Delta t)$, saj bi se pri nadaljnji izpeljavi v limiti, ko gre $\Delta t \to 0$, njen vpliv gotovo izničil, tako dobimo:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot[1-i\cdot\lambda\cdot\Delta t] + p_{i-1}(t)\cdot(i-1)\cdot\lambda\cdot\Delta t$$

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) - i\cdot\lambda\cdot\Delta t\cdot p_i(t) + p_{i-1}(t)\cdot(i-1)\cdot\lambda\cdot\Delta t \tag{4.116}$$

$$i = n_o, n_o+1, n_o+2, \ldots$$

Izraz (4.116) lahko nekoliko preoblikujemo in dobimo:

$$p_i(t+\Delta t) - p_i(t) = -i\cdot\lambda\cdot\Delta t\cdot p_i(t) + p_{i-1}(t)\cdot(i-1)\cdot\lambda\cdot\Delta t \qquad \Big|:\Delta t$$

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -i\cdot\lambda\cdot p_i(t) + (i-1)\cdot\lambda\cdot p_{i-1}(t) \qquad \Big|\lim_{\Delta t\to 0} \tag{4.117}$$

Tako dobimo naslednji sistem diferencialnih enačb:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -i \cdot \lambda \cdot p_i(t) + (i-1) \cdot \lambda \cdot p_{i-1}(t), \qquad i = n_o, n_o+1, n_o+2, ... \tag{4.118}$$

ki ga lahko pišemo tudi v obliki:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} &= -n_0 \cdot \lambda \cdot p_{n_0}(t) + (n_0 - 1) \cdot \lambda \cdot p_{n_0-1}(t) \\
\frac{dp_{n_0+1}(t)}{dt} &= -(n_0+1) \cdot \lambda \cdot p_{n_0+1}(t) + n_0 \cdot \lambda \cdot p_{n_0}(t) \\
\frac{dp_{n_0+2}(t)}{dt} &= -(n_0+2) \cdot \lambda \cdot p_{n_0+2}(t) + (n_0+1) \cdot \lambda \cdot p_{n_0+1}(t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Poskušajmo najprej rešiti prvo diferencialno enačbo. Ker se v rojstnem procesu dogajajo le rojstva, je po nekem času število osebkov gotovo večje ali kvečjemu enako številu začetne populacije n_0. Zato jih nikoli ne more biti $n_0 - 1$ in je gotovo $p_{n_0-1}(t) = 0$. Tako velja:

$$\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} = -n_0 \cdot \lambda \cdot p_{n_0}(t) \tag{4.120}$$

Izvedimo Laplaceovo in inverzno Laplaceovo transformacijo:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} = -n_0 \cdot \lambda \cdot p_{n_0}(t) \qquad \Big| L \\
&s \cdot p_{n_0}(s) - p_{n_0}(0) = -n_0 \cdot \lambda \cdot p_{n_0}(s) \\
&p_{n_0}(s) = \frac{p_{n_0}(0)}{s + n_0 \cdot \lambda} = \frac{1}{s + n_0 \cdot \lambda} \qquad \Big| L^{-1} \\
&p_{n_0}(t) = e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t}
\end{aligned} \tag{4.121}$$

kjer smo upoštevali, da je $p_{n_0}(0) = 1$, ker je ob času 0 v populaciji gotovo 100% n_0 osebkov.

Poskušajmo sedaj rešiti 2. diferencialno enačbo. V ta namen najprej izvedemo Laplaceovo transformacijo:

$$\frac{dp_{n_0+1}(t)}{dt}=-(n_0+1)\cdot\lambda\cdot p_{n_0+1}(t)+n_0\cdot\lambda\cdot p_{n_0}(t)$$

$$\frac{dp_{n_0+1}(t)}{dt}=-(n_0+1)\cdot\lambda\cdot p_{n_0+1}(t)+n_0\cdot\lambda\cdot e^{-n_0\cdot\lambda\cdot t}\qquad \big| L$$

$$s\cdot p_{n_0+1}(s)-\underbrace{p_{n_0+1}(0)}_{0}=-(n_0+1)\cdot\lambda\cdot p_{n_0+1}(s)+\frac{n_0\cdot\lambda}{s+n_0\cdot\lambda}\tag{4.122}$$

$$p_{n_0+1}(s)\cdot\left[s+(n_0+1)\cdot\lambda\right]=\frac{n_0\cdot\lambda}{s+n_0\cdot\lambda}$$

$$p_{n_0+1}(s)=\frac{n_0\cdot\lambda}{\left[s+(n_0+1)\cdot\lambda\right]\cdot(s+n_0\cdot\lambda)}$$

Če vpeljemo novi oznaki:

$$\begin{aligned}a&=n_0\cdot\lambda\\ b&=(n_0+1)\cdot\lambda\end{aligned}\tag{4.123}$$

dobimo:

$$p_{n_0+1}(s)=\frac{n_0\cdot\lambda}{(s+a)\cdot(s+b)}=n_0\cdot\lambda\cdot\underbrace{\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}}_{f_1(s)}\tag{4.124}$$

Poskušajmo najprej izračunati $f_1(t)$. V ta namen zapišemo:

$$f_1(s)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{(s+a)\cdot(s+b)}\tag{4.125}$$

nato pa izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo s pomočjo tablic za integralske transformacije. Tako dobimo:

$$f_1(t)=\frac{1}{b-a}\cdot L^{-1}\left\{\frac{b-a}{(s+a)\cdot(s+b)}\right\}=\frac{1}{b-a}\cdot\left[e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}\right]\tag{4.126}$$

Če vpeljemo stari oznaki iz izraza (4.123), tako lahko dobimo še $p_{n_0+1}(t)$:

$$p_{n_0+1}(t) = n_0 \cdot \lambda \cdot f_1(t) = n_0 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \left[e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}\right]$$

$$p_{n_0+1}(t) = n_0 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{(n_0+1) \cdot \lambda - n_0 \cdot \lambda} \cdot \left[e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t} - e^{-(n_0+1) \cdot \lambda \cdot t}\right]$$

$$p_{n_0+1}(t) = n_0 \cdot \left[e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t} - e^{-(n_0+1) \cdot \lambda \cdot t}\right] = n_0 \cdot \left[e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t} - e^{-(n_0 \cdot \lambda \cdot t + \cdot \lambda \cdot t)}\right] \tag{4.127}$$

$$p_{n_0+1}(t) = n_0 \cdot e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t} \cdot \left[1 - e^{-\lambda \cdot t}\right]$$

Postopek bi lahko nadaljevali z reševanjem 3., 4., in nadaljnjih diferencialnih enačb. Kot se izkaže, bi dobili za verjetnosti $p_i(t) = P\left[N(t) = i\right]$, to je verjetnosti, da se do časa t nahaja v populaciji i osebkov, naslednji izraz [12]:

$$p_i(t) = \binom{i-1}{i-n_0} \cdot e^{-n_0 \cdot \lambda \cdot t} \cdot \left[1 - e^{-\lambda \cdot t}\right]^{i-n_0}, \qquad i = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots \tag{4.128}$$

4.4 Smrtni procesi

Smrtne procese lahko uporabimo kot modele realnih situacij npr. pri praznjenju zalog v skladišču, pri odpovedovanju množice nepopravljivih izdelkov, itn [12]. Ločimo linearne smrtne procese, ter njihovo posplošitev, nelinearne smrtne procese. Pri prvih je odvisnost pogostosti smrti od velikosti populacije podana z linearno funkcijo, pri drugih pa z nelinearno funkcijo. V nadaljevanju se bomo omejili zgolj na obravnavo linearnih smrtnih procesov.

Denimo imamo množico osebkov (populacijo), za katero velja naslednje [12]. Verjetnost, da osebek, ki živi v času t, v intervalu $(t, t+\Delta t]$ umre, naj bo enaka $\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, da ne umre, pa naj bo enaka $1 - \mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Ti dve verjetnosti naj bosta za vse osebke enaki in neodvisni od njihove starosti. Seveda naj bodo tudi smrti različnih osebkov med seboj neodvisne. Smrt vsakega osebka predstavlja nek neodvisen Poissonov proces. Ker je osebkov v opazovani populaciji več, gre očitno za kombinacijo več neodvisnih Poissonovih procesov, kjer so dogodki posamezne smrti. Kot vemo, je takšen kombiniran proces zopet Poissonov, s pogostostjo dogodkov, ki je enaka vsoti pogostosti dogodkov posameznih procesov. Pogostost posameznih procesov je v našem primeru za vse osebke enaka in je enaka vrednosti μ. Če je v času *t* v populaciji prisotnih *i* osebkov, je potemtakem pogostost smrti kombiniranega procesa očitno enaka $i \cdot \mu$. Verjetnost za smrt pri kombiniranem procesu na intervalu $(t, t+\Delta t]$ pa je enaka $i \cdot \mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

Število osebkov, prisotnih v populaciji v času *t*, predstavlja naključno spremenljivko, ki jo označimo z $N(t)$. Verjetnost, da je to število enako *i*, označimo z $p_i(t) = P\left[N(t) = i\right]$. Denimo je velikost populacije ob času 0 enaka n_0. Potem ob določenih predpostavkah, ki so bile razložene že pri Poissonovih procesih, lahko zapišemo naslednji izraz za verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0 osebkov:

$$\begin{aligned} p_{n_0}(t+\Delta t) &= p_{n_0}(t) \cdot P(ni\ nove\ smrti) + p_{n_0+1}(t) \cdot P(je\ nova\ smrt) + \tilde{o}(\Delta t) \\ p_{n_0}(t+\Delta t) &= p_{n_0}(t) \cdot [1 - n_0 \cdot \mu \cdot \Delta t] + p_{n_0+1}(t) \cdot (n_0+1) \cdot \mu \cdot \Delta t + \tilde{o}(\Delta t) \end{aligned} \tag{4.129}$$

Torej bodisi ostane n_0 osebkov, izmed katerih noben ne umre, bodisi jih je bilo n_0+1, pa je eden umrl. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0-1 osebkov, izračunamo takole:

$$\begin{aligned} p_{n_0-1}(t+\Delta t) &= p_{n_0-1}(t) \cdot P(ni\ nove\ smrti) + p_{n_0}(t) \cdot P(je\ nova\ smrt) + \tilde{o}(\Delta t) \\ p_{n_0-1}(t+\Delta t) &= p_{n_0-1}(t) \cdot \left[1 - (n_0-1) \cdot \mu \cdot \Delta t\right] + p_{n_0}(t) \cdot n_0 \cdot \mu \cdot \Delta t + \tilde{o}(\Delta t) \end{aligned} \tag{4.130}$$

Torej bodisi ostane n_0-1 osebkov, izmed katerih noben ne umre, bodisi jih je bilo n_0, pa je eden umrl. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t+\Delta t$ nahaja v populaciji n_0-2 osebkov, izračunamo takole:

$$p_{n_0-2}(t+\Delta t) = p_{n_0-2}(t)\cdot P(ni\ nove\ smrti) + p_{n_0-1}(t)\cdot P(je\ nova\ smrt) + \tilde{o}(\Delta t)$$
$$p_{n_0-2}(t+\Delta t) = p_{n_0-2}(t)\cdot\left[1-(n_0-2)\cdot\mu\cdot\Delta t\right] + p_{n_0-1}(t)\cdot(n_0-1)\cdot\mu\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t) \tag{4.131}$$

Torej bodisi ostane n_0-2 osebkov, izmed katerih noben ne umre, bodisi jih je bilo n_0-1, pa je eden umrl. V splošnem očitno torej velja:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot P(ni\ nove\ smrti) + p_{i+1}(t)\cdot P(je\ nova\ smrt) + \tilde{o}(\Delta t)$$
$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot[1-i\cdot\mu\cdot\Delta t] + p_{i+1}(t)\cdot(i+1)\cdot\mu\cdot\Delta t + \tilde{o}(\Delta t), \tag{4.132}$$
$$i = n_o, n_o-1, n_o-2, ...2, 1, 0$$

Seveda smo pri izpeljavi upoštevali, da več kot en osebek v zelo kratkem času $\Delta t \to 0$ ne more umreti. Indeks i je pa gotovo $i \le n_0$, saj se v tem procesu dogajajo le smrti, torej je po nekem času število osebkov gotovo manjše ali kvečjemu enako številu začetne populacije.

Če zanemarimo funkcijo $\tilde{o}(\Delta t)$, saj bi se pri nadaljnji izpeljavi v limiti, ko gre $\Delta t \to 0$, njen vpliv gotovo izničil, tako dobimo:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot[1-i\cdot\mu\cdot\Delta t] + p_{i+1}(t)\cdot(i+1)\cdot\mu\cdot\Delta t,$$
$$i = n_o, n_o-1, n_o-2, ...2, 1, 0 \tag{4.133}$$

Izraz (4.133) lahko nekoliko preoblikujemo in dobimo:

$$p_i(t+\Delta t) - p_i(t) = -i\cdot\mu\cdot\Delta t\cdot p_i(t) + p_{i+1}(t)\cdot(i+1)\cdot\mu\cdot\Delta t \qquad \Big|:\Delta t$$
$$\frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t} = -i\cdot\mu\cdot p_i(t) + (i+1)\cdot\mu\cdot p_{i+1}(t) \qquad \Big|\lim_{\Delta t\to 0} \tag{4.134}$$

Tako dobimo naslednji sistem diferencialnih enačb:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -i\cdot\mu\cdot p_i(t) + (i+1)\cdot\mu\cdot p_{i+1}(t), \qquad i = n_o, n_o-1, n_o-2, ..., 1, 0 \tag{4.135}$$

ki ga lahko pišemo tudi v obliki:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} &= -n_0 \cdot \mu \cdot p_{n_0}(t) + (n_0+1) \cdot \mu \cdot p_{n_0+1}(t) \\
\frac{dp_{n_0-1}(t)}{dt} &= -(n_0-1) \cdot \mu \cdot p_{n_0-1}(t) + n_0 \cdot \mu \cdot p_{n_0}(t) \\
\frac{dp_{n_0-2}(t)}{dt} &= -(n_0-2) \cdot \mu \cdot p_{n_0-2}(t) + (n_0-1) \cdot \mu \cdot p_{n_0-1}(t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.136}$$

Poskušajmo najprej rešiti prvo diferencialno enačbo. Ker se v rojstnem procesu dogajajo le smrti, je po nekem času število osebkov gotovo manjše ali kvečjemu enako številu začetne populacije n_0. Zato jih nikoli ne more biti n_0+1 in je gotovo $p_{n_0+1}(t)=0$. Tako velja:

$$\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} = -n_0 \cdot \mu \cdot p_{n_0}(t) \tag{4.137}$$

Izvedimo Laplaceovo in inverzno Laplaceovo transformacijo:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_{n_0}(t)}{dt} = -n_0 \cdot \mu \cdot p_{n_0}(t) \qquad \Big| L \\
&s \cdot p_{n_0}(s) - p_{n_0}(0) = -n_0 \cdot \mu \cdot p_{n_0}(s) \\
&p_{n_0}(s) = \frac{p_{n_0}(0)}{s+n_0\cdot\mu} = \frac{1}{s+n_0\cdot\mu} \qquad \Big| L^{-1} \\
&p_{n_0}(t) = e^{-n_0\cdot\mu\cdot t}
\end{aligned} \tag{4.138}$$

kjer smo upoštevali, da je $p_{n_0}(0)=1$, ker je ob času 0 v populaciji gotovo 100% n_0 osebkov.

Poskušajmo sedaj rešiti 2. diferencialno enačbo. V ta namen najprej izvedemo Laplaceovo transformacijo:

$$\frac{dp_{n_0-1}(t)}{dt} = -(n_0-1)\cdot\mu\cdot p_{n_0-1}(t) + n_0\cdot\mu\cdot p_{n_0}(t)$$

$$\frac{dp_{n_0-1}(t)}{dt} = -(n_0-1)\cdot\mu\cdot p_{n_0-1}(t) + n_0\cdot\mu\cdot e^{-n_0\cdot\mu\cdot t} \qquad \Big| L$$

$$s\cdot p_{n_0-1}(s) - \underbrace{p_{n_0-1}(0)}_{0} = -(n_0-1)\cdot\mu\cdot p_{n_0-1}(s) + \frac{n_0\cdot\mu}{s+n_0\cdot\mu} \tag{4.139}$$

$$p_{n_0-1}(s)\cdot\left[s+(n_0-1)\cdot\mu\right] = \frac{n_0\cdot\mu}{s+n_0\cdot\mu}$$

$$p_{n_0-1}(s) = \frac{n_0\cdot\mu}{\left[s+(n_0-1)\cdot\mu\right]\cdot(s+n_0\cdot\mu)}$$

Če vpeljemo novi oznaki:

$$\begin{aligned} b &= n_0\cdot\mu \\ a &= (n_0-1)\cdot\mu \end{aligned} \tag{4.140}$$

dobimo:

$$p_{n_0-1}(s) = \frac{n_0\cdot\mu}{(s+a)\cdot(s+b)} = n_0\cdot\mu\cdot\underbrace{\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}}_{f_1(s)} \tag{4.141}$$

Poskušajmo najprej izračunati $f_1(t)$. V ta namen zapišemo:

$$f_1(s) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{(s+a)\cdot(s+b)} \tag{4.142}$$

nato pa izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo s pomočjo tablic za integralske transformacije. Tako dobimo:

$$f_1(t) = \frac{1}{b-a}\cdot L^{-1}\left\{\frac{b-a}{(s+a)\cdot(s+b)}\right\} = \frac{1}{b-a}\cdot\left[e^{-a\cdot t} - e^{-b\cdot t}\right] \tag{4.143}$$

Če vpeljemo stari oznaki iz izraza (4.140), tako lahko dobimo še $p_{n_0-1}(t)$:

$$p_{n_0-1}(t) = n_0 \cdot \mu \cdot f_1(t) = n_0 \cdot \mu \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \left[e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t} \right]$$

$$p_{n_0-1}(t) = n_0 \cdot \mu \cdot \frac{1}{n_0 \cdot \mu - (n_0 - 1) \cdot \mu} \cdot \left[e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t} - e^{-n_0 \cdot \mu \cdot t} \right]$$

$$p_{n_0-1}(t) = n_0 \cdot \left[e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t} - e^{-n_0 \cdot \mu \cdot t} \right] = n_0 \cdot \left[e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t} - e^{-n_0 \cdot \mu \cdot t - \mu \cdot t + \mu \cdot t} \right] \tag{4.144}$$

$$p_{n_0-1}(t) = n_0 \cdot \left[e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t} - e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t - \mu \cdot t} \right]$$

$$p_{n_0-1}(t) = n_0 \cdot e^{-(n_0-1) \cdot \mu \cdot t} \cdot \left[1 - e^{-\mu \cdot t} \right]$$

Postopek bi lahko nadaljevali z reševanjem 3., 4., in nadaljnjih diferencialnih enačb. Kot se izkaže, bi dobili za verjetnosti $p_i(t) = P\left[N(t) = i \right]$, to je verjetnosti, da se do časa t nahaja v populaciji i osebkov, naslednji izraz [12]:

$$p_i(t) = \binom{n_0}{i} \cdot e^{-i \cdot \mu \cdot t} \cdot \left[1 - e^{-\mu \cdot t} \right]^{n_0 - i}, \qquad i = n_0, n_0 - 1, n_0 - 2, \ldots, 1, 0 \tag{4.145}$$

Poglejmo si naslednji primer:

Štirimotorno letalo lahko pristane tudi samo z 2 motorjema. Pogostost odpovedi posameznega motorja je 0.02/uro leta. Kakšna je verjetnost za uspešen pristanek po 2 urah leta?

Na osnovi podatkov lahko zapišemo:

$$\mu = \frac{0.02}{uro}$$
$$n_0 = 4$$
$$t = 2 \ uri$$

Očitno gre za smrtni Poissonov proces, kjer motorji predstavljajo osebke, njihove odpovedi pa smrti. Pri tem je začetno število osebkov (motorjev) enako 4 (ob začetku opazovanja), zanima pa nas, kakšna je situacija po preteku 2 ur (kakšna je verjetnost za uspešen pristanek).

Izraz (4.145) lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$p_i\left(2uri\right)=\binom{4}{i}\cdot e^{-i\cdot\frac{0.02}{uro}\cdot 2\ uri}\cdot\left[1-e^{-\frac{0.02}{uro}\cdot 2\ uri}\right]^{4-i},\qquad i=4,3,2,1,0 \tag{4.146}$$

Oziroma:

$$p_i\left(2uri\right)=\binom{4}{i}\cdot e^{-i\cdot 0.04}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^{4-i},\qquad i=4,3,2,1,0 \tag{4.147}$$

Za uspešen pristanek po 2 urah leta morata delovati vsaj 2 motorja, kar pomeni 2, 3, ali 4 delujoče motorje. Torej velja:

$$\begin{aligned}&P\left(uspešen\ \ pris\tan ek\right)=\\&=P\left(2\,delujoča\,motorja\right)+P\left(3\,delujoči\,motorji\right)+P\left(4\,delujoči\,motorji\right)\end{aligned} \tag{4.148}$$

Verjetnosti za 2, 3, ali 4 delujoče motorje po 2 urah leta izračunamo takole:

$$\begin{aligned}&P\left(4\,delujoči\,motorji\right)=P\left(nobene\,ok\,\mathrm{var}\,e\right)=P\left(vsi\ \ živijo\right)=\\&=p_4\left(2\ uri\right)=\binom{4}{4}\cdot e^{-4\cdot 0.04}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^{4-4}=e^{-0.16}=0.8521\\[2ex]&P\left(3\,delujoči\,motorji\right)=P\left(1\,ok\,\mathrm{var}\,a\right)=P\left(en\,ne\ \ živi\,več\right)=\\&=p_3\left(2\ uri\right)=\binom{4}{3}\cdot e^{-3\cdot 0.04}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^{4-3}=4\cdot e^{-0.12}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]=0.1391\\[2ex]&P\left(2\,delujoča\,motorja\right)=P\left(2\,ok\,\mathrm{var}\,i\right)=P\left(dva\,ne\ \ živita\,več\right)=\\&=p_2\left(2\ uri\right)=\binom{4}{2}\cdot e^{-2\cdot 0.04}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^{4-2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot e^{-0.08}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^2=\\&=6\cdot e^{-0.08}\cdot\left[1-e^{-0.04}\right]^2=8.515\cdot 10^{-3}\end{aligned} \tag{4.149}$$

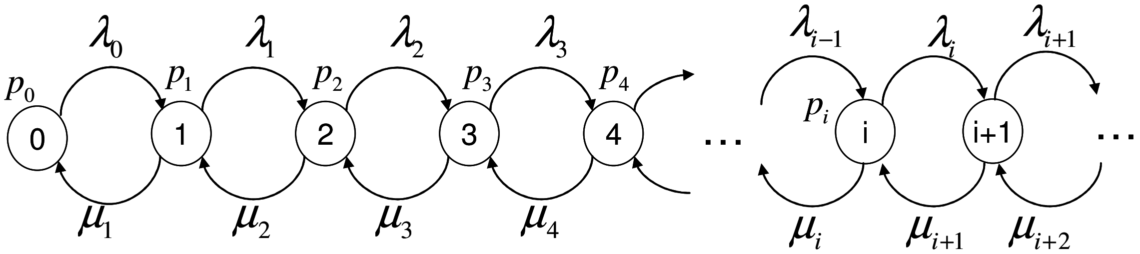
Torej za verjetnost za uspešen pristanek po 2 urah leta velja:

$$P\left(uspešen\ \ pris\tan ek\right) = 8.515 \cdot 10^{-3} + 0.1391 + 0.8521 = 0.9997 \tag{4.150}$$

Torej je verjetnost za uspešen pristanek po 2 urah leta enaka 99.97%.

4.5 Rojstno-Smrtni procesi

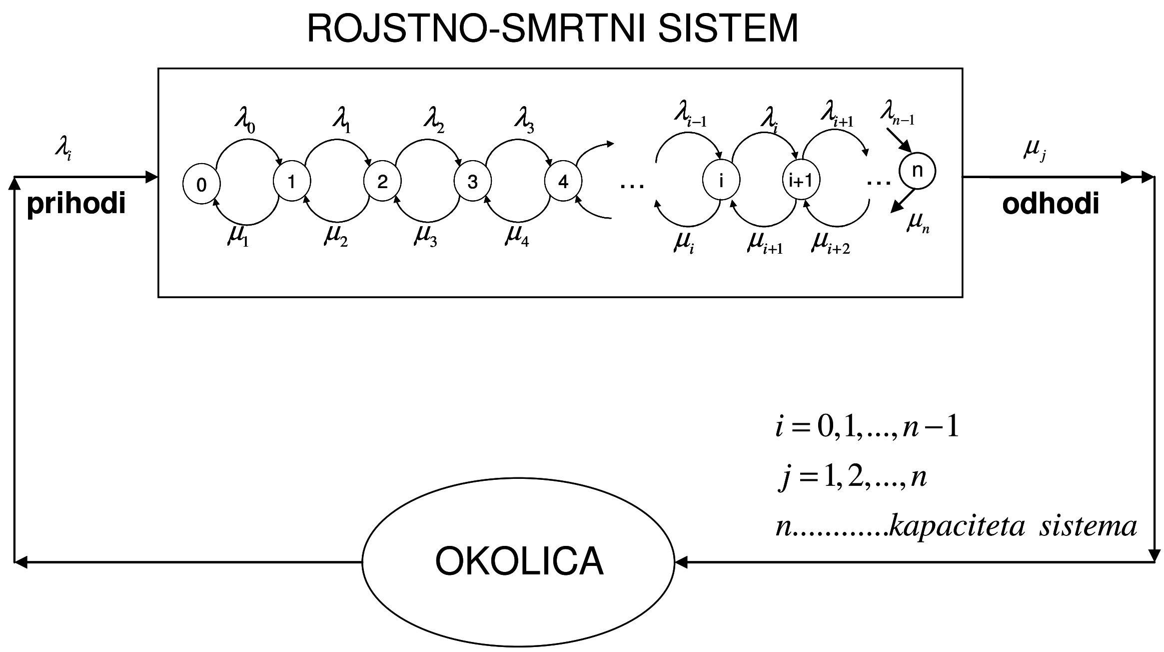
V tem primeru opazujemo populacijo, ki se lahko spreminja tako z rojstvi, kot tudi smrtmi. Zaradi lažje razumljivosti obravnave bomo rojstno-smrtni proces razložili preko čakalnega sistema, ki ga tvorijo stranke, ki čakajo, ter tiste, ki so strežene. Pri tem bomo uvedli model v obliki avtomata, prikazan na sliki 60.



Slika 60: Model rojstno-smrtnega procesa v obliki avtomata

Posamezna stanja predstavljajo trenutno število strank (osebkov) v sistemu. Ko pride nova stranka v sistem, se zgodi novo rojstvo, ko pa (postrežena) stranka zapusti sistem, se zgodi nova smrt. Predpostavimo, da v dovolj kratkem času $\Delta t \to 0$ lahko naenkrat vstopi v sistem samo ena stranka (se zgodi samo eno rojstvo), prav tako lahko izstopi iz sistema samo ena stranka (se zgodi samo ena smrt). Torej se v zelo kratkem času število osebkov lahko poveča ali pomanjša samo za enega, dovoljeni so samo prehodi med sosednjimi stanji (glej sliko 60), te prehode pa lahko opišemo s procesom rojstev in smrti. Na sliki 60 so označene tudi verjetnosti p_i, da se sistem nahaja v *i*.tem stanju, kar pomeni, da je v sistemu *i* osebkov.

Sistem rojstev in smrti lahko še nekoliko nazorneje prikažemo s pomočjo slike 61, če imamo denimo na razpolago n stanj. Kot je razvidno iz slike 61, tvorijo prihodi nova rojstva, ki se pri i osebkih v sistemu dogajajo z pogostostjo (intenzivnostjo) λ_i. Odhodi pa tvorijo nove smrti, ki se pri j osebkih v sistemu dogajajo s pogostostjo (intenzivnostjo) μ_j. Pri tem je maksimalno število stanj n kapaciteta sistema, sistem pa se nahaja v trenutnem stanju i, ki predstavlja trenutno število osebkov v sistemu.



Slika 61: Rojstno-smrtni sistem

V praksi so zlasti pomembni tisti rojstno-smrtni procesi, pri katerih je pogostost rojstev oz. smrti bodisi konstantna, bodisi linearno odvisna od stanja, v katerem se proces nahaja (to je števila živih osebkov). Tudi tukaj ločimo linearne in nelinearne procese. v nadaljevanju bomo izvedli izpeljavo za posplošene, to je nelinearne procese.

Denimo imamo množico i živih osebkov (populacijo), za katero velja naslednje [12]. Verjetnost za rojstvo v intervalu $(t, t+\Delta t]$ naj bo enaka $\lambda_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, verjetnost, da ni rojstva, pa naj bo enaka $1-\lambda_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Verjetnost za smrt v intervalu $(t, t+\Delta t]$ naj bo enaka $\mu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, verjetnost, da ni smrti, pa naj bo enaka $1-\mu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Pri tem je nastop rojstva ali smrti v intervalu $(t, t+\Delta t]$ neodvisen od časa, ki je potekel od trenutka zadnjega rojstva ali smrti.

Tudi tokrat velja, da število osebkov, prisotnih v populaciji v času *t*, predstavlja naključno spremenljivko, ki jo označimo z $N(t)$. Verjetnost, da je to število enako *i*, označimo z $p_i(t) = P\left[N(t) = i\right]$. Potem lahko ob določenih predpostavkah, ki so bile razložene že pri Poissonovih procesih, zapišemo naslednji izraz za verjetnost, da se ob času $t + \Delta t$ nahaja v populaciji 0 osebkov:

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo) + p_1(t)\cdot P(je\ nova\ smrt) \\ p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)\cdot\left[1-\lambda_0\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] + p_1(t)\cdot\left[\mu_1\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] \end{aligned} \tag{4.151}$$

Torej bodisi ostane 0 osebkov in ni novega rojstva, bodisi je bil en osebek, pa je umrl. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t + \Delta t$ nahaja v populaciji 1 osebek, izračunamo takole:

$$\begin{aligned} &p_1(t+\Delta t) = p_1(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo)\cdot P(ni\ nova\ smrt) + p_0(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo) + \\ &+p_2(t)\cdot P(je\ nova\ smrt) \\ &p_1(t+\Delta t) = p_1(t)\cdot\left[1-\lambda_1\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]\cdot\left[1-\mu_1\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+p_0(t)\cdot\left[\lambda_0\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+ \\ &+p_2(t)\cdot\left[\mu_2\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right] \end{aligned} \tag{4.152}$$

Torej, bodisi je eden osebek, pa ni novega rojstva in hkrati niti nove smrti, bodisi je bilo 0 osebkov, pa se je eden rodil, bodisi sta bila dva osebka, pa je eden umrl. Podobno sklepamo naprej. Verjetnost, da se ob času $t + \Delta t$ nahajata v populaciji 2 osebka, izračunamo takole:

$$\begin{aligned} &p_2(t+\Delta t) = p_2(t)\cdot P(ni\ novo\ rojstvo)\cdot P(ni\ nova\ smrt) + p_1(t)\cdot P(je\ novo\ rojstvo) + \\ &+p_3(t)\cdot P(je\ nova\ smrt) \\ &p_2(t+\Delta t) = p_2(t)\cdot\left[1-\lambda_2\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]\cdot\left[1-\mu_2\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+p_1(t)\cdot\left[\lambda_1\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right]+ \\ &+p_3(t)\cdot\left[\mu_3\cdot\Delta t+o(\Delta t)\right] \end{aligned} \tag{4.153}$$

Torej, bodisi sta dva osebka, pa ni novega rojstva in hkrati niti nove smrti, bodisi je bil 1 osebek, pa se je še eden rodil, bodisi so bili trije osebki, pa je eden umrl.

V splošnem torej velja:

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)\cdot\left[1-\lambda_0\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] + p_1(t)\cdot\left[\mu_1\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right]$$

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot\left[1-\lambda_i\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right]\cdot\left[1-\mu_i\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] + p_{i-1}(t)\cdot\left[\lambda_{i-1}\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] + \\ + p_{i+1}(t)\cdot\left[\mu_{i+1}\cdot\Delta t + o(\Delta t)\right] \tag{4.154}$$

Seveda smo pri izpeljavi upoštevali, da se v zelo kratkem času $\Delta t \to 0$ ne more zgoditi več kot eno rojstvo oz. ena smrt. Če zanemarimo funkcijo $o(\Delta t)$, saj bi se pri nadaljnji izpeljavi v limiti, ko gre $\Delta t \to 0$, njen vpliv gotovo izničil, tako dobimo:

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)\cdot[1-\lambda_0\cdot\Delta t] + p_1(t)\cdot\mu_1\cdot\Delta t$$

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot[1-\lambda_i\cdot\Delta t]\cdot[1-\mu_i\cdot\Delta t] + p_{i-1}(t)\cdot\lambda_{i-1}\cdot\Delta t + \\ + p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1}\cdot\Delta t \tag{4.155}$$

Dobimo torej:

$$p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -p_0(t)\cdot\lambda_0\cdot\Delta t + p_1(t)\cdot\mu_1\cdot\Delta t$$

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)\cdot\left(1-\mu_i\cdot\Delta t - \lambda_i\cdot\Delta t + \lambda_i\cdot\mu_i\cdot\Delta t^2\right) + p_{i-1}(t)\cdot\lambda_{i-1}\cdot\Delta t + p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1}\cdot\Delta t \tag{4.156}$$

Če še zanemarimo člen z Δt^2, izraz (4.156) preide v obliko:

$$p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -p_0(t)\cdot\lambda_0\cdot\Delta t + p_1(t)\cdot\mu_1\cdot\Delta t$$

$$p_i(t+\Delta t) - p_i(t) = -p_i(t)\cdot(\mu_i+\lambda_i)\cdot\Delta t + p_{i-1}(t)\cdot\lambda_{i-1}\cdot\Delta t + p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1}\cdot\Delta t \tag{4.157}$$

Če izvedemo še deljenje z Δt in $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$, dobimo:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -p_0(t)\cdot\lambda_0 + p_1(t)\cdot\mu_1$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -p_i(t)\cdot(\mu_i+\lambda_i) + p_{i-1}(t)\cdot\lambda_{i-1} + p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1} \tag{4.158}$$

Torej v limiti dobimo naslednji sistem diferencialnih enačb:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -p_0(t)\cdot\lambda_0 + p_1(t)\cdot\mu_1$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -p_i(t)\cdot(\mu_i+\lambda_i) + p_{i-1}(t)\cdot\lambda_{i-1} + p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1} \tag{4.159}$$

$$i = 1,2,...,n-1$$

pri čemer gre seveda lahko n tudi proti ∞.

Kot se izkaže, je rešitve tega sistema zelo težko poiskati, poleg tega pa tudi nimajo velike uporabne vrednosti, saj vsebujejo Besselove funkcije reda i prve vrste [3,4].

Zato se bomo v nadaljevanju raje posvetili rešitvam v stacionarnem stanju. Tedaj so odvodi namreč enaki 0, zato dobimo:

$$0 = -p_{0\infty}\cdot\lambda_0 + p_{1\infty}\cdot\mu_1$$

$$0 = -p_{i\infty}\cdot(\mu_i+\lambda_i) + p_{i-1\infty}\cdot\lambda_{i-1} + p_{i+1\infty}\cdot\mu_{i+1} \tag{4.160}$$

$$i = 1,2,...,n-1$$

kjer oznaka ∞ v indeksih spremenljivk nakazuje, da gre za spremenljivke v stacionarnem stanju. Iz prvega izraza v (4.160) dobimo verjetnost za zasedbo 1. stanja (en osebek v sistemu) v stacionarnem stanju:

$$p_{1\infty} = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p_{0\infty} \tag{4.161}$$

kjer je seveda $p_{0\infty}$ verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu). Če izraz (4.161) vstavimo v drugi izraz v (4.160), dobimo pri *i=1* naslednji izraz:

$$0 = -p_{1\infty}\cdot(\mu_1+\lambda_1) + p_{0\infty}\cdot\lambda_0 + p_{2\infty}\cdot\mu_2$$

$$0 = -\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p_{0\infty}\cdot(\mu_1+\lambda_1) + p_{0\infty}\cdot\lambda_0 + p_{2\infty}\cdot\mu_2 \tag{4.162}$$

Po preureditvi tega izraza dobimo:

$$0 = -\frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_{0\infty} \cdot (\mu_1 + \lambda_1) + p_{0\infty} \cdot \lambda_0 + p_{2\infty} \cdot \mu_2 \qquad | \cdot \mu_1$$

$$0 = -\lambda_0 \cdot p_{0\infty} \cdot (\mu_1 + \lambda_1) + p_{0\infty} \cdot \lambda_0 \cdot \mu_1 + p_{2\infty} \cdot \mu_2 \cdot \mu_1$$

$$0 = -\lambda_0 \cdot p_{0\infty} \cdot \mu_1 - \lambda_0 \cdot p_{0\infty} \cdot \lambda_1 + p_{0\infty} \cdot \lambda_0 \cdot \mu_1 + p_{2\infty} \cdot \mu_2 \cdot \mu_1 \tag{4.163}$$

$$0 = -\lambda_0 \cdot p_{0\infty} \cdot \lambda_1 + p_{2\infty} \cdot \mu_2 \cdot \mu_1$$

$$p_{2\infty} = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot p_{0\infty}$$

kar je verjetnost za zasedbo 2. stanja (dva osebka v sistemu) v stacionarnem stanju. Dobljeni izraz v (4.163) bi lahko vstavili v drugi izraz v (4.160) pri *i=2*. S pomočjo podobne izpeljave, kot je pokazana v izrazih (4.162) in (4.163), bi dobili naslednji izraz:

$$p_{3\infty} = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \cdot p_{0\infty} \tag{4.164}$$

kar je verjetnost za zasedbo 3. stanja (trije osebki v sistemu) v stacionarnem stanju. Podobno bi lahko sklepali naprej za $i = 3, 4, ..., n$. Po izpeljavah bi dobili naslednji izraz za verjetnost za zasedbo *i*.tega stanja:

$$p_{i\infty} = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot ... \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 \cdot ... \cdot \mu_i} \cdot p_{0\infty}, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$p_{i\infty} = p_{0\infty} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4.165}$$

ki pomeni verjetnost, da se nahaja v sistemu *i* osebkov v stacionarnem stanju. Kot bomo kasneje videli, pogostost rojstev in smrti lahko določimo z opazovanjem sistema, to je iz podatkov. Očitno torej velja, da če bi nekako še lahko izračunali verjetnost $p_{0\infty}$, bi postale izračunljive tudi verjetnosti za zasedbo vseh ostalih stanj v sistemu. Zato poskušajmo izračunati verjetnost $p_{0\infty}$. V ta namen najprej tvorimo naslednjo vsoto:

$$p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + ... + p_{n\infty} = 1 \tag{4.166}$$

kar nam da naslednji izraz:

$$p_{0\infty} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_{0\infty} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot p_{0\infty} + \ldots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 \cdot \ldots \cdot \mu_n} \cdot p_{0\infty} = 1$$

$$p_{0\infty} \cdot \left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 \cdot \ldots \cdot \mu_n} \right] = 1 \tag{4.167}$$

$$p_{0\infty} \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \right] = 1$$

Odtod pa sledi za verjetnost $p_{0\infty}$ v stacionarnem stanju [12]:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \tag{4.168}$$

kjer smo označili s simbolom S vsoto:

$$S = 1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 \cdot \ldots \cdot \mu_i} \tag{4.169}$$

Torej se da tudi vsoto S in s tem verjetnost $p_{0\infty}$ izračunati iz pogostosti rojstev in smrti, na tej osnovi pa nato lahko izračunamo vse ostale verjetnosti v izrazu (4.165). Spomnimo se, da je stacionarna verjetnostna porazdelitev hkrati tudi ravnovesna. Vendar pa množica $\{p_{i\infty}\}$ tvori ravnovesno verjetnostno porazdelitev le, če je vsota S končna. Kadar ima proces zgolj končno število stanj, je vsota S vedno končna in ravnovesna porazdelitev obstaja [12]. V vsakem primeru pa je pogoj za eksistenco ravnovesna porazdelitve takšen, da mora biti: $S < \infty$.

Z obravnavo rojstno-smrtnih procesov smo končali dokaj obsežno poglavje teorije stohastičnih procesov. Razumevanje te teorije pa nam bo izrazito pomagalo pri obravnavi naslednjega obsežnega poglavja, to je teorije množične strežbe.

5 MNOŽIČNA STREŽBA

Izvor teorije množične strežbe najdemo v Erlangovi študiji telefonskega prometa iz leta 1917 [12]. Sistem množične strežbe vključuje [12]:

- eno ali več strežnih mest,
- proces prihajanja strank, ter
- proces strežbe.

Pri tem seveda velja, da kadar ni mogoče postreči vseh strank hkrati, morajo stranke čakati, torej se tvorijo čakalne vrste. Zelo veliko realnih primerov lahko opišemo kot sisteme množične strežbe, naštejmo nekatere izmed njih [12]:

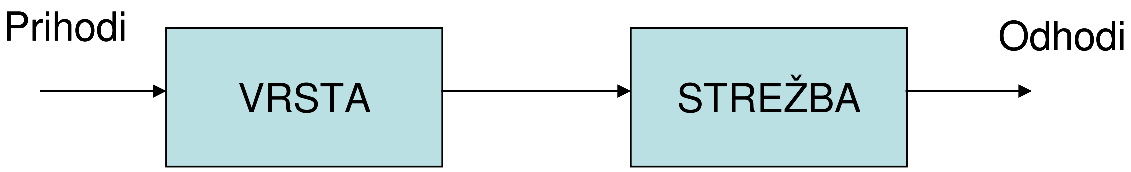
- čakanje na strežbo v restavraciji, banki, trgovini, pri zdravniku,
- čakanje na pregled pri zdravniku,
- čakanje na prevoz z avtobusom, vlakom, ali letalom,
- čakanje na vstopnico v kino, gledališče, ali tekmo,
- čakanje avtov na bencinski črpalki,
- čakanje letal na vzlet ali pristanek,
- čakanje strojev na popravilo,
- čakanje materiala v skladišču na prodajo,
- čakanje telefonskega poziva na vzpostavitev zveze, itn.

Običajno je omejeno število strežnikov glavni razlog, da prihaja do čakalnih vrst. Vendar pa jih v nekaterih primerih povzročajo tudi časovne omejitve, ko je strežba možna le v določenih časovnih intervalih. Tako je npr. prehod skozi križišče s semaforjem možen le tedaj, ko je prižgana zelena luč.

Z analizo sistemov množične strežbe dobimo informacije, kako bi bilo možno vpeljati izboljšave v obstoječe sisteme. Tako npr. lahko zaposlimo več ali manj strežnikov, povečamo število strežnih mest, avtomatiziramo strežbo, in podobno. Poleg tega lahko izvedemo tudi primerjavo različnih sistemov ter projektiranje novih sistemov strežbe [12].

Enostavne sisteme strežbe določajo naslednje karakteristike [12] (glej sliko 62):

- vhodni tok strank,
- mehanizem strežbe, ter
- disciplina v sistemu.



Slika 62: Enostavni strežni sistem

Kar se tiče vhodnega toka strank, je lahko populacija, odkoder izvirajo, neskončna ali končna. Stranke lahko prihajajo v sistem posamično ali v skupinah. Pogostost prihodov strank je lahko konstantna ali časovno spremenljiva. Prihodi strank so lahko odvisni tudi od drugih lastnosti sistema. Npr., dolge vrste že čakajočih strank lahko odvrnejo novo stranko. V nekaterih primerih pa se vhodni tok strank povsem prekine, ko njihovo število doseže določeno vrednost (ko je npr. omejen prostor za čakanje).

V literaturi so najbolj pogosto obravnavani primeri, ko prihajajo stranke posamično, časi med dvema zaporednima prehodoma pa so neodvisni. Tipična modela porazdelitve teh časov sta eksponentna porazdelitev, ko zaporedni prihodi strank tvorijo Poissonov proces, ter splošna porazdelitev. Slednja ustreza zlasti tistim situacijam, ko stranka takoj, ko zapusti eno vrsto, že vstopi v drugo [12].

Mehanizem strežbe opredelimo tedaj, če podamo zmogljivost sistema (maksimalno število strank, ki jih lahko istočasno postrežemo), razpoložljivost sistema (popolna ali nepopolna), ter porazdelitev časov strežbe [12]. Razpoložljivost sistema zavisi od prisotnosti strežnika na strežnem mestu. Če le-ta občasno zapusti strežno mesto, je potrebno specificirati tudi pogostost njegovih odhodov in porazdelitev časov odsotnosti.

Kar se tiče porazdelitve časov strežbe, najpogosteje najdemo v literaturi naslednje modele [12]:

- konstanten čas strežbe,
- eksponentna porazdelitev časa strežbe, ter
- Erlangova porazdelitev časa strežbe.

Prvi model dobro opisuje situacijo, ko je strežba avtomatizirana (npr. avtomati za izdajo vozovnic). Drugi model dobro opiše vrsto primerov, ko je v sistemu veliko število strank, ki zahtevajo razmeroma kratko strežbo, ali pa manjše število strank, ki zahtevajo daljšo strežbo [12]. Tretji model pa načeloma lahko uporabimo za vse tiste situacije, ki jih s prvima dvema modeloma ne moremo učinkoviti opisati.

Disciplina v sistemu množične strežbe je pravilo, po katerem določimo vrstni red strežbe. Najbolj običajno pravilo se glasi: "Kdor prvi pride, je tudi prvi postrežen" [12]. V industrijskih aplikacijah pa je možno tudi drugo pravilo: "Kdor zadnji pride, je prvi postrežen". Npr., pri montaži industrijskega izdelka izberemo iz zaloge sestavnih delov najprej tistega, ki se nahaja na vrhu zaloge. Možna pa je tudi povsem naključna izbira strank, kot npr. vstopanje potnikov na vlak ali avtobus.

Modele sistemov množične strežbe, v katere prihajajo stranke posamično, označujemo z naslednjim opisom [3,4,11,12]:

vhodna porazdelitev/porazdelitev časov strežbe/število strežnih mest

Standardne oblike tega zapisa so naslednje [3,4,11,12]:

M: Poissonov proces dogodkov (prihodov strank ali zaključkov strežb) oz. eksponentna porazdelitev časov (časov med zaporednima prihodoma strank ali časov strežbe),
G: Splošna porazdelitev časov (časov med zaporednima prihodoma strank ali časov strežbe),
D: konstantna deterministična porazdelitev časov (časov med zaporednima prihodoma strank ali časov strežbe),

Če imamo npr. opravka s sistemom *M/M/r*, oznaka, ki ga opredeljuje, pomeni naslednje [12]: Vhodno tok strank je Poissonov proces, časi strežbe so porazdeljeni eksponentno, število strežnih mest pa je *r*. Z *M/G/1* pa označimo sistem, ki ima eno strežno mesto, prihodi tvorijo Poissonov proces, časi strežbe so pa porazdeljeni po nekem splošnem zakonu. Naštejmo še nekaj tipičnih sistemov: *G/M/r, M/D/r, G/G/r,* itn.

Sisteme množične strežbe obravnavamo kot rojstno-smrtne sisteme. Stranke v sistemu predstavljajo populacijo, prihodi oz. odhodi strank pa rojstva oz. smrti osebkov. Sistemi *M/M/r* imajo Markovsko lastnost, medtem ko druge vrste sistemov množične strežbe ne predstavljajo Markovskih procesov in jih moramo obravnavati s pomočjo posebnih postopkov [3,4,9,12].

Osnovni veličini, ki opredeljujeta nek sistem množične strežbe, sta [11,12]:

- Število strank v sistemu ali vrsti, ter
- Čas bivanja v sistemu oz. čas čakanja na strežbo.

Ključne statistične karakteristike, ki jih bomo obravnavali v sistemih množične strežbe v ravnovesnem stanju, opredelimo z naslednjimi veličinami [11,12]:

$E(N) = L$ ....povprečno število strank v sistemu (vključno s tistimi, ki so v strežbi),
$E(N_q) = L_q$ ....povprečno število strank v vrsti, ki čakajo na strežbo,
$E(N_S) = L_s$ ....povprečno število strank v strežbi,
E(W)....................................povprečen čas bivanja stranke v sistemu (vsota časa čakanja v vrsti in časa strežbe),
E(W_q)....................................povprečen čas čakanja stranke na strežbo (v vrsti).
E(W_s)....................................povprečen čas strank v strežbi.

(5.1)

Sisteme bomo vedno opazovali le v ravnovesnem stanju zato, ker bi bila sicer obravnava silno zahtevna in bi vodila do zelo kompleksnih analitičnih izračunov.

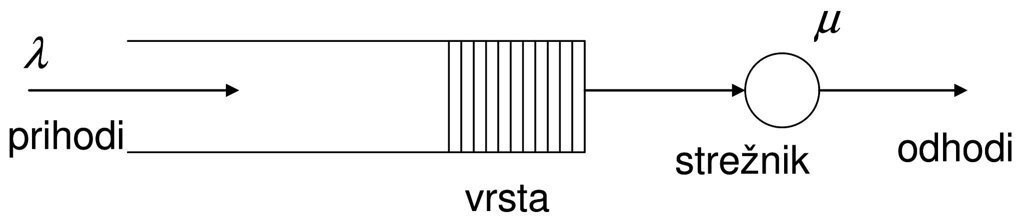
V nadaljevanju si bomo pogledali nekaj najbolj tipičnih sistemov množične strežbe. Obravnavali bomo tako enokanalne sisteme (eno strežno mesto), kot tudi večkanalne sisteme (več strežnih mest). Vedno bomo obravnavali disciplino "Kdor prvi pride, je prvi postrežen". Poleg tega bomo v vseh primerih predpostavili, da je razpoložljivost sistema popolna.

5.1 Sistem *M/M/1* (osnovni model)

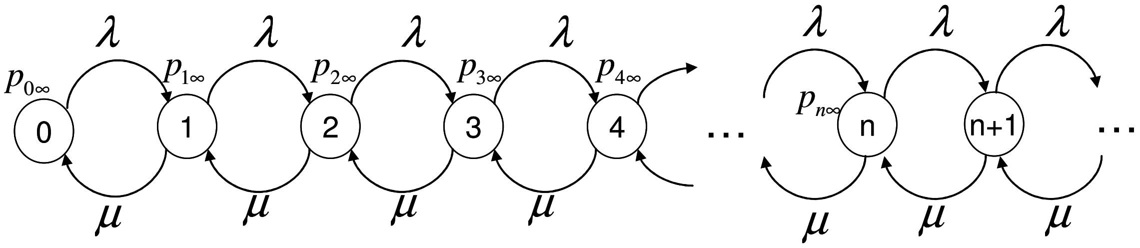
Za osnovni model predpostavimo naslednje [12]:

- Populacija strank je neskončna,
- Prostor za čakanje je neomejen, ter
- Disciplina je "Kdor prvi pride, je prvi postrežen".

Vhodni tok strank tvori Poissonov proces s parametrom λ, časi strežbe pa so neodvisne naključne spremenljivke, porazdeljene po eksponentnem zakonu. Torej zaključki strežbe tudi tvorijo Poissonov proces, ki ima parameter μ. Seveda imamo opravka z enim kanalom oz. enim strežnim mestom. Sistem *M/M/1* je shematsko prikazan na sliki 63, v obliki avtomata pa na sliki 64.



Slika 63: Strežni sistem *M/M/1*



Slika 64: Strežni sistem *M/M/1* v obliki avtomata

Kot je razvidno iz slike 64, bomo obravnavali le verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju. Iz slike 64 je tudi razvidno, da predpostavimo vedno enako pogostost prihodov strank λ in pogostost zaključkov strežbe (odhodov strank) μ, ne glede na to, koliko je osebkov v sistemu. To pomeni, da velja:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = ... = \lambda \\ &\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = ... = \mu \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1.1 Stacionarna verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj

Če upoštevamo izraz (5.2) v izrazih (4.161) do (4.165), ki smo jih imeli pri rojstno - smrtnih sistemih, dobimo:

$$\begin{aligned} &p_{1\infty} = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} \\ &p_{2\infty} = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot \mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot p_{0\infty} \\ &p_{3\infty} = \frac{\lambda^3}{\mu^3} \cdot p_{0\infty} \\ &... \\ &p_{i\infty} = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \cdot p_{0\infty} \\ &... \\ &p_{n\infty} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot p_{0\infty} \\ &... \end{aligned} \tag{5.3}$$

kjer seveda lahko gre $n \to \infty$. V nadaljevanju poskušajmo izračunati verjetnost $p_{0\infty}$, to je verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu). V ta namen tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
& p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + \ldots + p_{n\infty} + \ldots = 1 \\
& p_{0\infty} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot p_{0\infty} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot p_{0\infty} + \ldots = 1 \\
& p_{0\infty} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \ldots \right) = 1 \\
& p_{0\infty} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \ldots} = \frac{1}{S}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

kjer smo seveda upoštevali tudi izraze (5.3). Seveda bi izraz (5.4) lahko dobili tudi neposredno iz izrazov (4.168) oz. (4.169), če bi v njih upoštevali relacijo (5.2). Če vpeljemo novo veličino (takoimenovano ***intenzivnost prometa***) [12]:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.5}$$

nam izraz (5.4) preide v obliko:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots} = \frac{1}{S} \tag{5.6}$$

Pogoj za obstoj ravnovesne porazdelitve je naslednji:

$$S = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots < \infty \tag{5.7}$$

kar pomeni, da mora biti vrsta S kljub morebitnemu neskončnemu številu členov vseeno končna. To je možno le, če velja:

$$\begin{aligned}
& \rho < 1 \\
& \frac{\lambda}{\mu} < 1 \\
& \lambda < \mu
\end{aligned} \tag{5.8}$$

torej mora biti pogostost prihodov manjša od pogostosti odhodov, sicer se ravnovesna porazdelitev ne more vzpostaviti, vrsta pa se lahko začne poljubno daljšati (nekontrolirano kopičiti).

Vrsto S lahko izrazimo tudi kot geometrijsko vrsto:

$$S = \frac{1}{1-\rho} \tag{5.9}$$

pri čemer nam verjetnost (5.6) preide v obliko:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu} \tag{5.10}$$

Tako smo dobili verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu). Če upoštevamo izraz (5.3), bi se verjetnost za zasedbo 1. stanja v stacionarnem stanju (en osebek v sistemu) potemtakem glasila:

$$p_{1\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho \cdot (1-\rho) \tag{5.11}$$

verjetnost, da se nahajamo v 2. stanju (verjetnost, da sta 2 osebka v sistemu) bi se glasila:

$$p_{2\infty} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^2 \cdot (1-\rho) \tag{5.12}$$

verjetnosti, da se nahajamo v 3., 4.,..., *i*.tem,... *n*.tem,... stanju pa bi se glasile:

$$\begin{aligned}
&p_{3\infty} = \frac{\lambda^3}{\mu^3} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^3}{\mu^3} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^3 \cdot (1-\rho) \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&p_{i\infty} = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^i \cdot (1-\rho) \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&p_{n\infty} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^n \cdot (1-\rho) \\
&\ldots \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Torej je v splošnem stacionarna verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj pri *M/M/1* sistemu (osnovni model) naslednja:

$$p_{i\infty} = \rho^i \cdot (1-\rho)\ ,\ i = 0,1,2,...\ \ in\ \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.14}$$

Verjetnost v izrazu (5.10) predstavlja verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu). Z drugimi besedami to pomeni verjetnost, da v sistemu sploh ni nobenih strank, torej je tudi strežnik nezaseden. Ker velja:

$$P\left(strežnik\ zaseden\right)+P\left(strežnik\ nezaseden\right)=1 \tag{5.15}$$

pri čemer je:

$$P\left(strežnik\ nezaseden\right)=p_{0\infty} \tag{5.16}$$

sledi:

$$\begin{aligned}
&P\left(strežnik\ zaseden\right)=1-P\left(strežnik\ nezaseden\right)\\
&P\left(strežnik\ zaseden\right)=1-p_{0\infty}\\
&P\left(strežnik\ zaseden\right)=1-\left(1-\rho\right)\\
&P\left(strežnik\ zaseden\right)=\rho=\frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Torej je verjetnost, da je strežnik zaseden, enaka kar intenzivnosti prometa ρ, kar z drugimi besedami pomeni, da si slednjo lahko tolmačimo tudi kot delež časa, ko je strežnik zaposlen [12].

V nadaljevanju si poglejmo še verjetnost $P\left(i>N\right)$, da je v sistemu več kot N strank. Zapišemo lahko:

$$\begin{aligned}
&P\left(i>N\right)=\sum_{i=N+1}^{\infty}p_{i\infty}=\sum_{i=N+1}^{\infty}\rho^{i}\cdot\left(1-\rho\right)=\frac{\rho^{N+1}}{\rho^{N+1}}\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}\rho^{i}=\rho^{N+1}\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{\rho^{i}}{\rho^{N+1}}=\\
&=\rho^{N+1}\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}\rho^{i-(N+1)}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $s=i-\left(N+1\right)$ in dobimo:

$$\begin{aligned}
&P\left(i>N\right)=\rho^{N+1}\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\rho^{s}=\rho^{N+1}\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\frac{1}{1-\rho}\\
&P\left(i>N\right)=\rho^{N+1}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

kjer smo upoštevali, da je $\sum_{s=0}^{\infty} \rho^s = \frac{1}{1-\rho}$ geometrijska vrsta.

Na podoben način bi lahko izpeljali tudi verjetnost $P(i \geq N)$, torej, da je v sistemu vsaj N strank (ali več). Dobili bi rezultat:

$$P(i \geq N) = \rho^N = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \tag{5.20}$$

5.1.2 Povprečna vrednost števila strank

V nadaljevanju bomo izračunali tudi povprečno vrednost števila strank v sistemu $E(N(t))$ in pripadajočo varianco $VAR(N(t))$ po daljšem času (v ravnovesju!).

Povprečno vrednost števila strank v sistemu $E(N(t)) = L$ lahko na osnovi izrazov (5.10) do (5.14) izračunamo na naslednji način:

$$\begin{aligned} E(N(t)) = L = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_{i\infty} = 0 \cdot p_{0\infty} + 1 \cdot p_{1\infty} + 2 \cdot p_{2\infty} + \ldots = \\ = 0 \cdot (1-\rho) + 1 \cdot \rho \cdot (1-\rho) + 2 \cdot \rho^2 \cdot (1-\rho) + \ldots = \\ = (1-\rho) \cdot \{0 + \rho + 2 \cdot \rho^2 + 3 \cdot \rho^3 + \ldots\} = \\ = (1-\rho) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \rho^i \end{aligned} \tag{5.21}$$

Dokazati se da, da velja naslednja relacija [4,9]:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \quad \text{če } |\rho| < 1 \tag{5.22}$$

Odtod sledi:

$$E(N(t)) = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{5.23}$$

Povprečno število strank v sistemu v stacionarnem stanju je torej sledeče:

$$E\left(N(t)\right) = L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{5.24}$$

Izračunajmo še varianco $VAR\left(N(t)\right)$, pri čemer izhajamo iz izraza (3.101):

$$VAR\left(N(t)\right) = E\left(N^2(t)\right) - E^2\left(N(t)\right) \tag{5.25}$$

V ta namen najprej izračunajmo izraz $E\left[N(N-1)\right]$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} & E\left[N(N-1)\right] = E\left[N^2 - N\right] = E\left(N^2\right) - E(N) = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(i-1)\cdot p_{i\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(i-1)\cdot\rho^i\cdot(1-\rho) = \frac{\rho^2}{\rho^2}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(i-1)\cdot\rho^i\cdot(1-\rho) \\ & = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(i-1)\cdot\rho^{i-2} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Gotovo lahko zapišemo naslednja izraza:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho}\left(\rho^i\right) = i\cdot\rho^{i-1} \\ & \frac{d^2}{d\rho^2}\left(\rho^i\right) = \frac{d}{d\rho}\left(i\cdot\rho^{i-1}\right) = i\cdot(i-1)\cdot\rho^{i-2} \end{aligned} \tag{5.27}$$

zato izraz (5.26) preide v obliko:

$$\begin{aligned} & E\left[N(N-1)\right] = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\rho^i\right) = \\ & = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{d^2}{d\rho^2}\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right]}_{=\frac{1}{1-\rho}} = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

kjer smo zopet upoštevali relacijo, ki velja za geometrijsko vrsto. Če v izrazu (5.28) vpeljemo dvojno odvajanje, dobimo:

$$\begin{aligned} & E\left[N(N-1)\right] = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{d}{d\rho}\left[\frac{0-1\cdot(-1)}{(1-\rho)^2}\right] = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = \\ & = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{(-1)\cdot 2\cdot(1-\rho)\cdot(-1)}{(1-\rho)^4} = (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\frac{2\cdot(1-\rho)}{(1-\rho)^4} = \\ & = \rho^2\cdot\frac{2}{(1-\rho)^2} = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Odtod na osnovi izraza (5.24) sledi:

$$E\left[N(N-1)\right]=E\left(N^2\right)-E(N)=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$$E\left(N^2\right)=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}+E(N)=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}+\frac{\rho}{(1-\rho)}= \tag{5.30}$$

$$=\frac{2\rho^2+\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho^2+\rho}{(1-\rho)^2}$$

Varianca $VAR\left(N(t)\right)$ torej na osnovi izrazov (5.25), (5.30) in (5.24) zavzame naslednjo obliko:

$$VAR(N)=E\left(N^2\right)-E^2(N)=\frac{\rho^2+\rho}{(1-\rho)^2}-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2=\frac{\rho^2+\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{5.31}$$

Varianca pri povprečnem številu strank v sistemu je po daljšem času (v stacionarnem stanju) torej sledeča:

$$VAR\left(N(t)\right)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\ ;\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{5.32}$$

V nadaljevanju izračunajmo povprečno število strank v strežbi. Na osnovi izraza (5.17) lahko zapišemo naslednji izraz:

$$L_S=E\left(N_S(t)\right)=E(1)=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot p_{iS}=$$

$$=\underbrace{0\cdot p_{0S}}_{=0}+1\cdot p_{1S}+\underbrace{2\cdot p_{2S}}_{=0}+\ldots= \tag{5.33}$$

$$=1\cdot p_{1S}=1\cdot P(\textit{strežnik zaseden z eno stranko})=1\cdot\rho=\rho$$

kjer smo upoštevali le verjetnost p_{1S}, torej verjetnost, da strežnik lahko streže zgolj eni stranki naenkrat.

Izračunajmo še povprečno število strank v vrsti. Na osnovi izrazov (5.24) in (5.33) gotovo lahko zapišemo naslednje:

$$Povprečno\ število\ strank\ v\ sistemu =$$

$$= Povprečno\ število\ strank\ v\ vrsti + Povprečno\ število\ strank\ v\ strežbi$$

$$\underbrace{E\left(\text{strank v sistemu}\right)}_{E\left(N\left(t\right)\right)=L} = \underbrace{E\left(\text{strank v vrsti}\right)}_{E\left(N_q\left(t\right)\right)=L_q} + \underbrace{E\left(\text{strank v strežbi}\right)}_{E\left(N_S\left(t\right)\right)=L_S} \tag{5.34}$$

$$torej:$$

$$\frac{\rho}{1-\rho} = E\left(N_q\left(t\right)\right) + \rho$$

Sledi:

$$E\left(N_q\left(t\right)\right) = L_q = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho-\left(1-\rho\right)\cdot\rho}{1-\rho} = \frac{\rho-\rho+\rho^2}{1-\rho} \tag{5.35}$$

Povprečno število strank v vrsti je torej sledeče:

$$E\left(N_q\left(t\right)\right) = L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}\ , \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.36}$$

5.1.3 Porazdelitev časa bivanja stranke v sistemu

V nadaljevanju si poglejmo, kakšna je porazdelitev časa W bivanja neke nove stranke v sistemu. Denimo, da se v sistemu že nahaja n-1 strank, ki čakajo, ter ena stranka, ki je ravno strežena. Skupaj se torej v sistemu že nahaja n strank, ko pride neka nova stranka. Gotovo je čas bivanja te stranke v sistemu enak vsoti časov, da se postreže *n-1* čakajočim strankam, preostalemu času strežbe ravnokar strežene stranke, ter času postrežbe nove stranke (glej sliko 65).

Ker predpostavimo, da so časi strežbe porazdeljeni po eksponentnem zakonu, je čas W bivanja neke nove stranke v sistemu torej enak vsoti $n+1$ neodvisnih naključnih spremenljivk, ki so porazdeljene po eksponentnem zakonu. Če vsoto $n+1$ neodvisnih naključnih spremenljivk označimo z Y, lahko zapišemo:

$$\underbrace{Y}_{\substack{\text{čas bivanja}\\ \text{nove stranke}\\ \text{v sistemu}}} = W_{n+1} = \underbrace{Z_1 + Z_2 + ... + Z_{n-1}}_{\substack{\text{časi, da se postreže}\\ n-1\text{ strank}}} + \underbrace{Z_n}_{\substack{\text{čas, da se do}\\ \text{konca postreže}\\ \text{trenutno strežena}\\ \text{stranka}}} + \underbrace{Z_{n+1}}_{\substack{\text{čas, da se do}\\ \text{konca postreže}\\ \textit{nova}\\ \text{stranka}}} \tag{5.37}$$

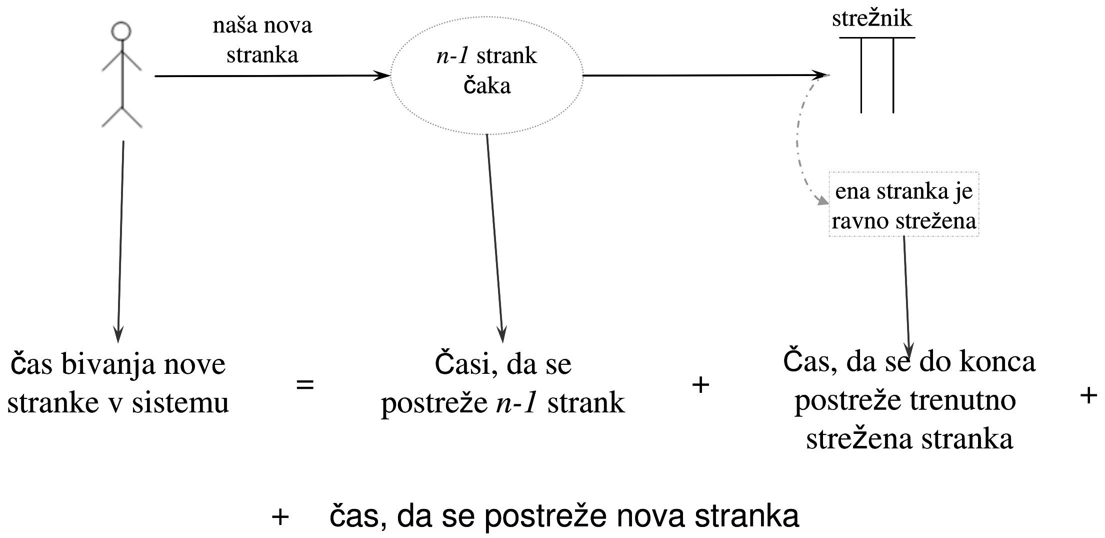
Kot vemo, je ta vsota porazdeljena po Erlangovem zakonu, pri čemer lahko na osnovi izraza (4.68) zapišemo naslednji izraz za porazdelitev gostote verjetnosti časa bivanja nove stranke v sistemu:

$$f_Y = f_{W_{n+1}} = \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^{n+1-1}}{(n+1-1)!} \cdot e^{-\mu \cdot t} \quad , \quad t > 0 \tag{5.38}$$

oziroma:

$$f_Y = f_{W_{n+1}} = \frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^{n}}{n!} \cdot e^{-\mu \cdot t} \quad , \quad t > 0 \tag{5.39}$$

pri čemer seveda upoštevamo parameter pogostosti zaključkov strežbe μ.



Slika 65: Ilustracija časa W bivanja neke nove stranke v sistemu, ki je enak vsoti časov, da se postreže *n-1* čakajočim strankam, preostalemu času strežbe ravnokar strežene stranke, ter času strežbe nove stranke

Funkcijo kumulativne porazdelitve verjetnosti $F_W(a) = P(Y \le a)$ do nekega časovnega trenutka a lahko zapišemo na naslednji način [11,12]:

$$\begin{aligned}
F_W(a) &= \mathrm{P}(Y \le a) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{Y \le a \mid n \text{ strank v sistemu}\} \cdot P\{n \text{ strank v sistemu}\} = \\
&= P(Y \le a \mid 0 \text{ strank v sistemu}) \cdot P(0 \text{ strank v sistemu}) + \\
&+ P(Y \le a \mid 1 \text{ stranka v sistemu}) \cdot P(1 \text{ stranka v sistemu}) + \\
&+ P(Y \le a \mid 2 \text{ stranki v sistemu}) \cdot P(2 \text{ stranki v sistemu}) + \ldots
\end{aligned} \tag{5.40}$$

kjer upoštevamo, da je v sistemu že n strank, ko pride nova stranka. Če upoštevamo tudi, da velja [11]:

$$P\{Y \leq a \mid n \text{ strank v sistemu}\} = \int_0^a f_Y(t)\,dt \tag{5.41}$$

lahko na osnovi izraza (5.39) zapišemo:

$$P\{Y \leq a \mid n \text{ strank v sistemu}\} = \int_0^a \left(\frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu \cdot t} \right) dt \tag{5.42}$$

Velja tudi, da so $P\{n \text{ strank v sistemu}\}$ verjetnosti, da se nahajamo v n.tem stanju oz. je v sistemu že n strank, ko pride nova stranka. Tako lahko na osnovi (5.14) zapišemo:

$$P\left(n \text{ strank } v\ sistemu\right) = p_{n\infty} = \rho^n \cdot (1-\rho) \tag{5.43}$$

Če upoštevamo izraza (5.42) in (5.43) v izrazu (5.40), dobimo:

$$F_W(a) = \mathrm{P}(Y \leq a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^a \left(\frac{\mu \cdot (\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu \cdot t} \right) dt \cdot \rho^n \cdot (1-\rho) \right] \tag{5.44}$$

Dokazati se da, da lahko zamenjamo operator sumacije in integracije. Tako dobimo:

$$F_W(a) = \mathrm{P}(Y \leq a) = \int_0^a \left[(1-\rho) \cdot \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot \rho^n \right\} \right] e^{-\mu \cdot t} dt \tag{5.45}$$

Izraz (5.45) se da še nekoliko poenostaviti. V ta namen namesto ρ vstavimo $\frac{\lambda}{\mu}$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_W(a) = \mathrm{P}(Y \leq a) &= \int_0^a \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\} \right] e^{-\mu \cdot t} dt = \\ &= \int_0^a \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{t^n}{n!} \cdot \lambda^n \right\} \right] e^{-\mu \cdot t} dt = \\ &= \int_0^a \left[(\mu - \lambda) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(t \cdot \lambda)^n}{n!} \right\} \right] e^{-\mu \cdot t} dt \end{aligned} \tag{5.46}$$

Dokazati se da, da velja naslednja relacija:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(t\cdot\lambda)^n}{n!}\right\}=e^{\lambda\cdot t} \tag{5.47}$$

tako izraz (5.46) preide v obliko:

$$\begin{aligned}
&F_W(a)=\mathrm{P}(Y\le a)=\int_0^a\left[(\mu-\lambda)\cdot e^{\lambda\cdot t}\right]e^{-\mu\cdot t}dt=\\
&=\int_0^a(\mu-\lambda)e^{(\lambda-\mu)\cdot t}dt=\int_0^a(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}dt=\\
&=(\mu-\lambda)\cdot\frac{-1}{(\mu-\lambda)}\cdot\left[e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}\right]_0^a=-\left[e^{-(\mu-\lambda)\cdot a}-1\right]=1-e^{-(\mu-\lambda)\cdot a}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti $f_W(a)$ za naključno spremenljivko *W* dobimo, če izraz (5.48) odvajamo po času *a*:

$$f_W(a)=\frac{dF_W(a)}{da}=\frac{d}{da}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)\cdot a}\right)=-e^{-(\mu-\lambda)\cdot a}\cdot\left(-(\mu-\lambda)\right)=(\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot a} \tag{5.49}$$

Če izraz (5.49) primerjamo z izrazom (3.72), očitno lahko sklepamo, da je tudi čas *W* bivanja neke nove stranke v sistemu porazdeljen po eksponentnem zakonu s parametrom $(\mu-\lambda)$. Tako lahko na osnovi tabele iz slike 41 zapišemo naslednjo vrednost za varianco in srednjo vrednost eksponentne porazdelitve za čas bivanja stranke v sistemu:

$$\begin{aligned}
E(W)&=\frac{1}{\mu-\lambda}\\
VAR(W)&=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Poglejmo si še verjetnost, da je čas bivanja stranke v sistemu daljši od neke vnaprej določene vrednosti t_0:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[W>t_0]=\int_{t_0}^{\infty}f_W(t)\,dt=\int_{t_0}^{\infty}(\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}dt=\\
&=(\mu-\lambda)\cdot\frac{-1}{\mu-\lambda}\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}\Big|_{t_0}^{\infty}=e^{-(\mu-\lambda)\cdot t_0}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Verjetnost, da je čas bivanja stranke v sistemu daljši od vnaprej določene vrednosti t_0, je torej naslednja:

$$P\left[W > t_0\right] = e^{-(\mu-\lambda)\cdot t_0} \tag{5.52}$$

Torej, večji kot je čas t_0, manjša je verjetnost, da bo stranka še bivala v sistemu.

5.1.4 Littleov zakon

Littleov zakon je v teoriji množične strežbe zelo pomemben, saj daje neposredno povezavo med povprečnimi števili strank v vrsti/sistemu in povprečnimi časi čakanja/bivanja strank v vrsti/sistemu. Za osnovni *M/M/1* sistem se Littleov zakon glasi:

$$\begin{aligned} E(N) &= L = \lambda \cdot E(W) \\ E(N_q) &= L_q = \lambda \cdot E(W_q) \\ E(N_S) &= L_S = \lambda \cdot E(W_S) \end{aligned} \tag{5.53}$$

Kot smo videli v poglavju 5.1.3., smo po dokaj obsežni izpeljavi prišli do rezultata za povprečen čas bivanja stranke v sistemu $E(W)$, podanega v izrazu (5.50). Očitno lahko do istega rezultata pridemo po mnogo krajši poti, če uporabimo Littleov zakon. Tako na osnovi izraza (5.53) $E(W)$ dobimo tako, da zgolj $E(N)$ iz izraza (5.24) delimo s parametrom λ:

$$E(W) = \frac{E(N(t))}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{5.54}$$

Očitno je ta rezultat enak rezultatu v izrazu (5.50).

S pomočjo Littleovega zakona lahko preprosto izračunamo tudi povprečen čas čakanja stranke v vrsti. Tako na osnovi izraza (5.53) $E(W_q)$ dobimo tako, da zgolj $E(N_q)$ iz izraza (5.36) delimo s parametrom λ:

$$\begin{aligned} E(W_q) &= \frac{E(N_q(t))}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \end{aligned} \tag{5.55}$$

Velikokrat je v uporabi tudi naslednja oblika tega izraza:

$$E\left(W_q\right)=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{5.56}$$

S pomočjo Littleovega zakona lahko preprosto izračunamo tudi povprečen čas čakanja stranke v fazi strežbe. Tako na osnovi izraza (5.53) $E(W_S)$ dobimo tako, da zgolj $E(N_S)$ iz izraza (5.33) delimo s parametrom λ:

$$E(W_S)=\frac{E(N_S(t))}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda}=\frac{1}{\mu} \tag{5.57}$$

Pravilnost rezultatov (5.54) do (5.57) preverimo tako, da preverimo, če je izpolnjena enakost:

$$\begin{aligned}
&E(W)=E\left(W_q\right)+E(W_S)=\\
&=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}+\frac{1}{\mu}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(\mu-\lambda)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)}+1\right)=\\
&=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda+\mu-\lambda}{(\mu-\lambda)}\right)=\frac{1}{(\mu-\lambda)}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Očitno dobimo enak rezultat za $E(W)$ kot v izrazu (5.54), torej smo se prepričali o pravilnosti dobljenih rezultatov za povprečne čase čakanja oz. bivanja strank.

Preden se lotimo praktičnega primera, razložimo še sledeče dejstvo. Denimo je intenzivnost prometa $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ zelo majhna in npr. velja: $\frac{\lambda}{\mu}<<1$ oz. $\lambda<<\mu$. V tem primeru seveda strežnik veliko hitreje streže, kot pa prihajajo nove stranke, zato je verjetnost, da bodo dolge vrste, zelo majhna. Vendar je v tem primeru strežnik načeloma dosti časa tudi nezaposlen, kar pa vsekakor ni v redu. Po drugi strani pa velik parameter ρ pomeni, da so vrste načeloma sicer daljše, vendar pa je strežnik večino časa zaposlen.

Torej je vsekakor potrebno najti nek kompromis oz. stremimo k temu, da bi bile vrste čim krajše, hkrati pa naj bi bil tudi strežnik čimveč časa zaposlen.

V nadaljevanju si poglejmo primer osnovnega *M/M/1* sistema [13].

Prihodi avtov na bencinsko črpalko z enim strežnim mestom tvorijo Poissonov proces. Pogostost prihodov avtov je $\frac{11}{\mathrm{h}}$. *Časi strežbe avtov so porazdeljeni eksponentno s povprečjem 5 min.*

a) *Dokaži, da obstaja ravnovesna porazdelitev.*
b) *Kolikšno je povprečno število avtov na črpalki in povprečen čas čakanja v vrsti na strežbo?*
c) *Kako se karakteristiki sistema spremenita, če povprečen čas strežbe zmanjšamo za 20 % ?*

Dano imamo naslednjo pogostost prihodov strank in povprečen čas strežbe: $\lambda = \frac{11}{\mathrm{h}}$, $E(W_S) = 5\,\mathrm{min}$

a) Najprej na osnovi izraza (5.57) izračunamo pogostost zaključkov strežbe μ :

$$E(W_S) = \frac{1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{5\,\mathrm{min}} = \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h}} = \frac{12}{\mathrm{h}} \tag{5.59}$$

Nato lahko izračunamo tudi intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{11}{\mathrm{h}}}{\frac{12}{\mathrm{h}}} = 0.91\overline{66} < 1 \tag{5.60}$$

Ker je parameter ρ manjši od 1, očitno ravnovesna porazdelitev obstaja.

b) Povprečno število avtov na črpalki (v sistemu) je na osnovi izraza (5.24) naslednje:

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{11}{12-11} = 11 \tag{5.61}$$

Torej se v povprečju na črpalki nahaja 11 avtov.

Na osnovi izraza (5.56) izračunajmo še povprečen čas čakanja v vrsti na strežbo:

$$E\left(W_q\right)=\frac{\lambda}{\mu\cdot(\mu-\lambda)}=\frac{\frac{11}{\mathrm{h}}}{\frac{12}{\mathrm{h}}\cdot\left(\frac{12}{\mathrm{h}}-\frac{11}{\mathrm{h}}\right)}=\frac{11}{12}\mathrm{h}=0.91\overline{66}\text{ ure}=$$
$$=54.99\text{ min}\approx 55\text{ min} \tag{5.62}$$

Torej je povprečen čas čakanja avtov v vrsti enak 55 minut.

c) Seveda se karakteristiki sistema $E(N)$ in $E\left(W_q\right)$ spremenita, če zmanjšamo povprečen čas strežbe za 20 %, torej iz $E\left(W_S\right)=$ 5 minut na $E\left(W_{S1}\right)=$ 4 minute. V tem primeru pogostost zaključkov strežbe naraste in dobimo:

$$\mu_1=\frac{1}{E\left(W_{S1}\right)}=\frac{1}{\underbrace{4\,\mathrm{min}}_{\substack{\text{za 20\%}\\ \text{manjši}\\ \text{kot prej}}}}=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{60}\mathrm{h}}=\frac{15}{\mathrm{h}} \tag{5.63}$$

Nova intenzivnost prometa v spremenjenih okoliščinah je:

$$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{\frac{11}{\mathrm{h}}}{\frac{15}{\mathrm{h}}}=0.73<1 \tag{5.64}$$

Torej tudi v tem primeru ravnovesna porazdelitev obstaja. Novo povprečno število avtov na črpalki (v sistemu) je na osnovi izraza (5.24) v tem primeru naslednje

$$E\left(N_1\right)=\frac{\lambda}{\mu_1-\lambda}=\frac{\frac{11}{\mathrm{h}}}{\frac{15}{\mathrm{h}}-\frac{11}{\mathrm{h}}}=2.75\text{ avta} \tag{5.65}$$

Torej se ob 20 % zmanjšanju povprečnega časa strežbe povprečno število avtov v sistemu zmanjša iz 11 avtov na 2.75 avta. Izračunajmo še nov povprečen čas čakanja avtov v vrsti na strežbo ob spremenjenih okoliščinah, pri čemer si zopet pomagamo z izrazom (5.56):

$$E\left(W_{q1}\right)=\frac{\lambda}{\mu_1\cdot(\mu_1-\lambda)}=\frac{\frac{11}{\mathrm{h}}}{\frac{15}{\mathrm{h}}\cdot\left(\frac{15}{\mathrm{h}}-\frac{11}{\mathrm{h}}\right)}=0.183\,\mathrm{h}\approx 11\,\mathrm{min} \tag{5.66}$$

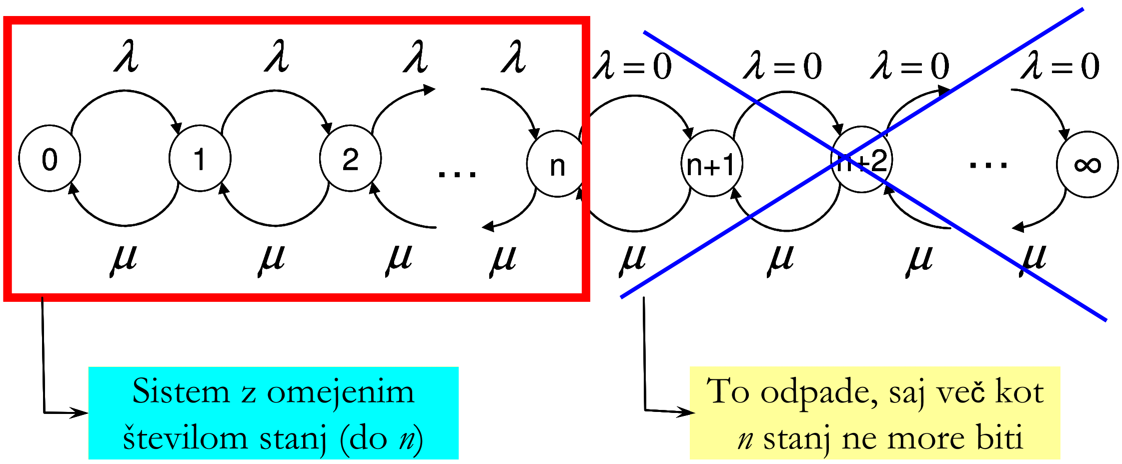
Torej se ob 20 % zmanjšanju povprečnega časa strežbe povprečen čas čakanja avtov v vrsti zmanjša iz 55 minut na 11 minut.

Iz tega primera je lepo razvidno, kako že ob relativno majhnem zmanjšanju povprečnega časa strežbe (povečanju pogostosti zaključkov strežbe oz. povečanju produktivnosti) dosežemo izredno velike pozitivne učinke, kar se tiče karakteristik sistema (zmanjšanje povprečnega števila avtov na črpalki, zmanjšanje povprečnega časa čakanja avtov v vrsti, itn).

V nadaljevanju bomo na podlagi osnovnega modela sistema *M/M/1* izpeljali še nekaj modificiranih modelov, ki načeloma bolj ustrezajo realnim situacijam v praksi.

5.2 Sistem M/M/1 (omejen prostor za čakanje)

Podobno kot pri osnovnem *M/M/1* sistemu, lahko izpeljemo model tudi za modificiran *M/M/1* sistem, ki velja za primere, ko ni dovolj prostora za čakanje strank [12]. V tem primeru velja, da pogostost prihodov strank naenkrat pade na 0, ko se prostor za čakanje v celoti napolni. To pomeni, da nove stranke v primeru, ko postane sistem v celoti napolnjen, odidejo nepostrežene, saj ne najdejo več prostora za čakanje. Tipične primere omejenega prostora za čakanje srečamo npr. pri avtomobilskih servisih, pralnicah, itn. Avtomat, ki ponazarja *M/M/1* sistem z omejenim prostorom za čakanje, je ilustriran na sliki 66.



Slika 66: *M/M/1* sistem z omejenim prostorom za čakanje

Kot je razvidno iz slike 66, je denimo v sistemu prostora za čakanje največ *n-1* strank (ter seveda vsebuje še stranko, ki je ravnokar strežena). Torej sistem dopušča največ *n* strank oz. lahko zavzame največ *n* stanj.

Za pogostost prihodov in odhodov strank danega rojstno-smrtnega sistema lahko zapišemo naslednji izraz [12]:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \,, & i < n \\ 0 \,, & i \geq n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1}}_{n} = \lambda$$
$$\mu_i = \mu \,, \quad i = 1,\, 2, \ldots \tag{5.67}$$

Vsota S iz izraza (5.7) je sedaj končna za vsako vrednost intenzivnosti prometa ρ in zaradi končnega števila *n* stanj sistema zavzame naslednjo vrednost:

$$S = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n = \sum_{i=0}^{n} \rho^i \tag{5.68}$$

Dokazati se da, da se lahko izraz (5.68) zapiše tudi v naslednji obliki:

$$S = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \tag{5.69}$$

Podobno kot pri modelu osnovnega *M/M/1* sistema (glej izraz (5.10)) lahko tudi tokrat zapišemo naslednjo relacijo za verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu):

$$p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \tag{5.70}$$

Za ostale verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju, ki so bile za osnovni sistem podane v izrazih (5.11) do (5.14), pa bi tokrat lahko na osnovi izraza (5.70) zapisali:

$$\begin{aligned}
p_{1\infty} &= \rho \cdot p_{0\infty} = \rho \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \\
p_{2\infty} &= \rho^2 \cdot p_{0\infty} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \\
&\vdots \\
p_{i\infty} &= \rho^i \cdot p_{0\infty} = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \\
&\vdots \\
p_{n\infty} &= \rho^n \cdot p_{0\infty} = \rho^n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Torej je v splošnem stacionarna verjetnostna porazdelitev za zasedbo stanj pri *M/M/1* sistemu z omejenim prostorom za čakanje naslednja:

$$p_{i\infty} = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\ , \quad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n \tag{5.72}$$

V nadaljevanju poglejmo, kakšno je povprečno število strank v sistemu z omejenim prostorom za čakanje. V ta namen najprej na osnovi izraza (5.72) tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
L = E(N) &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot p_{i\infty} = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \rho^i \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \rho^{i-1}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Ker vemo, da velja relacija:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^i\right) = i \cdot \rho^{i-1} \tag{5.74}$$

lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}
L = E(N) &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^i\right) = \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho}\left[\sum_{i=0}^{n} \rho^i\right]
\end{aligned} \tag{5.75}$$

V izrazih (5.68) in (5.69) smo videli, da velja relacija:

$$\sum_{i=0}^{n} \rho^{i} = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \tag{5.76}$$

torej lahko zapišemo:

$$L = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}\right] \tag{5.77}$$

Odtod sledi:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{-(n+1)\cdot\rho^{n}\cdot(1-\rho)-\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(-1)}{(1-\rho)^{2}}\right) = \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{-(n+1)\cdot\rho^{n}\cdot(1-\rho)+\left(1-\rho^{n+1}\right)}{(1-\rho)^{2}}\right) = \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{-(n+1)\cdot\rho^{n}+(n+1)\rho^{n+1}+1-\rho^{n+1}}{(1-\rho)^{2}}\right) = \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \left(\frac{-(n+1)\cdot\rho^{n}+n\cdot\rho^{n+1}+1}{(1-\rho)^{2}}\right) = \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \frac{1-(n+1)\cdot\rho^{n}+n\cdot\rho^{n+1}}{(1-\rho)^{2}} = \\
&= \frac{1}{1-\rho^{n+1}} \cdot \rho \cdot \frac{1-(n+1)\cdot\rho^{n}+n\cdot\rho^{n+1}}{(1-\rho)} = \\
&= \frac{\rho\left[1-(n+1)\cdot\rho^{n}+n\cdot\rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)(1-\rho)}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Povprečno število strank v sistemu je torej enako [9,11,31]:

$$L = E(N) = \frac{\rho\cdot\left[1-(n+1)\cdot\rho^{n}+n\cdot\rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(1-\rho)} \tag{5.79}$$

Verjetnost v izrazu (5.70) predstavlja verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnem stanju (nič osebkov v sistemu). Tudi v tem primeru to z drugimi besedami pomeni verjetnost, da v sistemu sploh ni nobenih strank, torej je tudi strežnik nezaseden. Ker podobno kot pri osnovnem sistemu (glej izraze (5.15) do (5.17)) velja:

$$\begin{aligned} &P(\textit{strežnik zaseden}) = 1 - P(\textit{strežnik nezaseden}) \\ &P(\textit{strežnik zaseden}) = 1 - p_{0\infty} \end{aligned} \tag{5.80}$$

na osnovi izraza (5.70) dobimo verjetnost, da je strežnik zaseden pri sistemu z omejenim prostorom za čakanje:

$$P(\text{strežnik zaseden}) = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} = \frac{1-\rho^{n+1}-1+\rho}{1-\rho^{n+1}} = \frac{\rho-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} = \rho \cdot \left(\frac{1-\rho^{n}}{1-\rho^{n+1}}\right) \tag{5.81}$$

Poglejmo še verjetnost, da je stranka izgubljena (ni postrežena), ali pa je sprejeta in nato postrežena. Gotovo velja, da če je v sistemu manj kot n strank, je stranka lahko sprejeta, sicer pa je izgubljena. Torej velja:

$$\underbrace{P(\text{stranka } i\text{zgubljena})}_{\substack{\text{Verjetnost, da pride}\\ \text{še več kot } n \text{ strank}\\ \text{in so izgubljene}}} = \underbrace{p_{n\infty}}_{\substack{\text{Verjetnost,}\\ \text{da je } \textit{že n} \text{ strank}\\ \text{v sistemu}}} \tag{5.82}$$

Velja tudi:

$$\underbrace{p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{n-1,\infty}}_{P(\text{stranka sprejeta})} + \underbrace{p_{n\infty}}_{P(\text{stranka } i\text{zgubljena})} = 1 \tag{5.83}$$

Zato na osnovi izraza za $p_{n\infty}$ v (5.71) sledi:

$$\begin{aligned} &P(\text{stranka sprejeta}) = 1 - P(\text{stranka } i\text{zgubljena}) = 1 - p_{n\infty} = \\ &= 1 - \rho^{n} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \end{aligned} \tag{5.84}$$

V nadaljevanju bomo vpeljali pojem takoimenovane efektivne intenzivnosti prihodov λ' [9,31], kjer upoštevamo le sprejete, ne pa tudi izgubljenih strank [9,11,31]:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda \cdot P(\text{stranka sprejeta}) = \lambda \cdot \left(1 - p_{n\infty}\right) = \\ &= \lambda \cdot \left[1 - \rho^{n}\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\right] = \lambda \cdot \left[\frac{1-\rho^{n+1}-\rho^{n}+\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right] = \lambda \cdot \left[\frac{1-\rho^{n}}{1-\rho^{n+1}}\right] \end{aligned} \tag{5.85}$$

Če izrazimo intenzivnost prometa z efektivno intenzivnostjo prihodov, dobimo:

$$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right] = \rho \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right] = P(\text{strežnik zaseden}) \tag{5.86}$$

Kot se izkaže, bomo morali veličini λ' oz. ρ' upoštevati v določenih nadaljnjih izpeljavah. Pri osnovnem sistemu smo videli (glej izraz (5.33)), da je povprečno število strank v strežbi enako intenzivnosti prometa, torej velja: $L_S = E(N_S) = \rho$. Pokazati se da, da za razliko od osnovnega sistema v tem primeru velja naslednji izraz za povprečno število strank v strežbi [9,11,31]:

$$E(N_S) = L_S = \rho' = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right] = \rho \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right] = P(\text{strežnik zaseden}) \tag{5.87}$$

Izračunajmo še povprečno število strank v vrsti. Podobno kot pri osnovnem sistemu v izrazu (5.34), tudi tukaj lahko na osnovi izraza (5.79) zapišemo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
&\textit{Povprečno število strank v sistemu} = \\
&= \textit{Povprečno število strank v vrsti} + \textit{Povprečno število strank v strežbi} \\
&\underbrace{E(\text{strank v sistemu})}_{E(N(t)) = L} = \underbrace{E(\text{strank v vrsti})}_{E(N_q(t)) = L_q} + \underbrace{E(\text{strank v strežbi})}_{E(N_S(t)) = L_S} \\
&\textit{torej}: \\
&\frac{\rho \cdot \left[1-(n+1)\cdot\rho^n + n\cdot\rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(1-\rho)} = E(N_q(t)) + \rho' \\
&\frac{\rho \cdot \left[1-(n+1)\cdot\rho^n + n\cdot\rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(1-\rho)} = E(N_q(t)) + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\rho} \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right]
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Odtod sledi:

$$E(N_q(t)) = \frac{\rho \cdot \left[1-(n+1)\cdot\rho^n + n\cdot\rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(1-\rho)} - \rho \cdot \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \right] \tag{5.89}$$

Littleov zakon ima za razliko od osnovnega sistema (glej izraz (5.53)) tokrat nekoliko drugačno obliko. Veljajo namreč naslednje relacije [9,31]:

$$\begin{aligned} E(N) &= L = \lambda' \cdot E(W) \\ E(N_q) &= L_q = \lambda' \cdot E(W_q) \\ E(N_S) &= L_S = \lambda' \cdot E(W_S) \end{aligned} \tag{5.90}$$

torej moramo tokrat v tem zakonu upoštevati efektivne intenzivnosti prihodov λ'. Za povprečen čas nahajanja stranke v sistemu torej velja:

$$E(W) = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda \cdot \left[1-\rho^n \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\right]} = \frac{\dfrac{\rho \cdot \left[1-(n+1)\cdot \rho^n + n \cdot \rho^{n+1}\right]}{\left(1-\rho^{n+1}\right)\cdot(1-\rho)}}{\lambda \cdot \left[1-\rho^n \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\right]} \tag{5.91}$$

Povprečen čas čakanja stranke v vrsti pa dobimo podobno kot pri osnovnem sistemu (glej izraz (5.58)) na naslednji način:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(W_q) + E(W_S) \\ E(W_q) &= E(W) - E(W_S) \\ E(W_q) &= E(W) - \frac{E(N_S)}{\lambda'} \end{aligned} \tag{5.92}$$

Če upoštevamo izraza (5.85) in (5.87), dobimo:

$$\begin{aligned} E(W_q) &= E(W) - \frac{\dfrac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\dfrac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\right]}{\lambda'} \\ E(W_q) &= E(W) - \frac{\dfrac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\dfrac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\right]}{\lambda \cdot \left[\dfrac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\right]} \\ E(W_q) &= E(W) - \underbrace{\frac{1}{\mu}}_{E(W_S)} \end{aligned} \tag{5.93}$$

Poglejmo si naslednji primer [5]:

Mimo Petrola z eno samo črpalko za črpanje kurilnega olja in 9 dodatnimi parkirnimi mesti za cisterne vozi v povprečju 20 tovrstnih vozil na uro, kjer načrpajo novo gorivo. Če so vsa parkirna mesta zasedena, nočejo tvegati z nevarnim parkiranjem in odpeljejo naprej. Vozniku vzame v povprečju 12 minut časa za črpanje in plačevanje nafte. Koliko cistern bo v povprečju na uro napolnilo svoje rezervoarje (povprečno število strank v sistemu)? Koliko časa bo v povprečju vzelo vozniku za nahajanje na črpalki (povprečen čas nahajanja stranke v sistemu)? Kolikšna je verjetnost, da je v sistemu 10 cistern in verjetnost, da je v sistemu manj kot 10 cistern (med 0 in 9)?

Podatke in problem lahko zapišemo na naslednji način:

$$\lambda = 20 \ vozil/uro = \frac{20}{h}$$

$$\mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{12 \min} = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{60} h} = \frac{5}{h}$$

$maksima\ln o\ število\ strank\ v\ sistemu:$

$$n = 9 + 1 = 10 \quad (prostor\ za\ 9\ strank\ na\ parkirnih\ mestih + stranka, ki\ si\ \tan ka\ in\ plačuje)$$

$$E(N) = ?$$

$$E(W) = ?$$

kjer smo upoštevali, da je $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$ (glej izraz (5.93)).

Najprej izračunamo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{20}{h}}{\frac{5}{h}} = 4 \tag{5.94}$$

Povprečno število strank v sistemu izračunamo na osnovi izraza (5.79):

$$L = E(N) = \frac{\rho \cdot \left[1 - (n+1) \cdot \rho^n + n \cdot \rho^{n+1}\right]}{\left(1 - \rho^{n+1}\right) \cdot (1 - \rho)} = \\ = \frac{4 \cdot \left[1 - (10+1) \cdot 4^{10} + 10 \cdot 4^{11}\right]}{\left(1 - 4^{11}\right) \cdot (1 - 4)} \tag{5.95}$$

Ta izraz lahko poenostavimo in dobimo:

$$
\begin{aligned}
&L=E(N)=\frac{4\cdot\left[1-11\cdot 4^{10}+10\cdot 4^{11}\right]}{\left(1-4^{11}\right)\cdot(-3)}=\frac{4\cdot\left[1-4^{10}\left(11-10\cdot 4\right)\right]}{3\cdot\left(4^{11}-1\right)}=\\
&=\frac{4\cdot\left[1+4^{10}\cdot 29\right]}{3\cdot 4^{11}-3}=\frac{121634820}{12582909}=9.66666
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

Torej bo v povprečju 9.66666 cistern na uro napolnilo svoje rezervoarje na črpalki. Povprečen čas nahajanja stranke v sistemu izračunamo na osnovi izraza (5.91). V ta namen najprej izračunamo efektivno pogostost prihodov λ' na osnovi izraza (5.85):

$$
\lambda'=\lambda\cdot\left[\frac{1-\rho^{n}}{1-\rho^{n+1}}\right]=20\cdot\left[\frac{1-4^{10}}{1-4^{11}}\right]=20\cdot\left[\frac{4^{10}-1}{4^{11}-1}\right]=20\cdot\left[\frac{1048575}{4194303}\right]=4.99999 \tag{5.97}
$$

Povprečen čas nahajanja stranke v sistemu je torej na osnovi izraza (5.91). naslednji:

$$
E(W)=\frac{L}{\lambda'}=\frac{9.66666}{4.99999}=1.93h \tag{5.98}
$$

Torej bo povprečen čas, ki ga porabi cisterna za zadrževanje na črpalki, enak 1.93 ure. Očitno je ta čas zelo velik, zato se v takšnih primerih upravljalec takšnih sistemov običajno raje odloči za več strežnih mest (več kanalov).

Na osnovi izraza (5.72) izračunajmo še verjetnost, da je v sistemu 10 cistern:

$$
\begin{aligned}
&p_{n\infty}=\rho^{n}\cdot\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\\
&p_{10\infty}=\rho^{10}\cdot\frac{1-\rho}{1-\rho^{10+1}}=4^{10}\cdot\frac{1-4}{1-4^{11}}=4^{10}\cdot\frac{3}{4^{11}-1}=\frac{3145728}{4194303}=0.750000
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

Torej je cca. 75% verjetnosti, da se v sistemu nahaja 10 cistern. Verjetnost, da je v sistemu manj cistern kot 10, pa je na osnovi izraza (5.83) naslednja:

$$\underbrace{p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{n-1,\infty}}_{P(manj\ kot\ 10\ cistern)} + p_{n\infty} = 1$$

$$\underbrace{p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{9,\infty}}_{P(manj\ kot\ 10\ cistern)} + p_{10\infty} = 1 \tag{5.100}$$

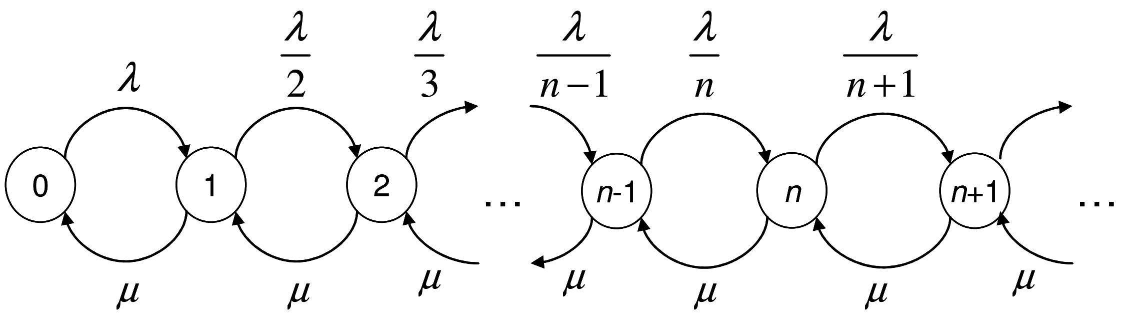
$$P(manj\ kot\ 10\ cistern) = 1 - p_{10\infty} = 1 - 0.750000 = 0.250000$$

Torej je cca. 25% verjetnosti, da se v sistemu nahaja manj kot 10 cistern (od 0 do 9).

5.3 Sistem M/M/1 (stranka se ustraši vrste)

V tem primeru predpostavljamo, da se lahko stranka, ki naleti na predolgo vrsto, odloči, da bo odšla nepostrežena.Gre za tako imenovani omahljivi strežni sistem, kjer stranka, če naleti na predolgo vrsto, lahko tudi odide, ne da bi bila postrežena. Očitno se pogostost prihodov strank v sistemu zmanjšuje sorazmerno z večanjem dolžine vrste.

Avtomat, ki ponazarja *M/M/1* sistem, kjer se stranka ustraši dolžine vrste, je ilustriran na sliki 67.



Slika 67: Avtomat, ki ponazarja *M/M/1* sistem, kjer se stranka ustraši dolžine vrste.

Za pogostost prihodov in odhodov strank danega rojstno-smrtnega sistema lahko zapišemo naslednji izraz [12]:

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}\ , \qquad i = 0, 1, \ldots$$
$$\mu_i = \mu\ , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5.101}$$

Izraz za pogostost prihodov strank si lahko interpretiramo na naslednji način. Večja je dolžina vrste (več je stanj), bolj se nova stranka ustraši in z večjo verjetnostjo odide nepostrežena. Torej očitno z dolžino vrste intenzivnost prihodov strank v sistem pada.

S pomočjo slike 67 lahko tvorimo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnem stanju. Tako za stanja veljajo naslednji izrazi:

$$\begin{aligned}
&\mu \cdot p_{1\infty} = \lambda \cdot p_{0\infty} \\
&\mu \cdot p_{2\infty} = \frac{\lambda}{2} \cdot p_{1\infty} \\
&\mu \cdot p_{3\infty} = \frac{\lambda}{3} \cdot p_{2\infty} \\
&\ldots \\
&\mu \cdot p_{i\infty} = \frac{\lambda}{i} \cdot p_{i-1\infty} \\
&\ldots \\
&\mu \cdot p_{n\infty} = \frac{\lambda}{n} \cdot p_{n-1\infty} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Če izraze (5.102) nekoliko preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned}
&p_{1\infty} = \lambda \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{1}{\mu} \\
&p_{2\infty} = \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{2} \cdot p_{1\infty} = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{1}{\mu^2} \\
&p_{3\infty} = \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{3} \cdot p_{2\infty} = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^3}{3!} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{1}{\mu^3} \\
&\vdots \\
&p_{i\,\infty} = \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{i} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{i-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{1} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{1}{\mu^i} = \overbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}^{\rho^i} \cdot \frac{p_{0\infty}}{i!} \\
&\vdots \\
&p_{n\,\infty} = \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{n} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{1}{\mu}}{1} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{1}{\mu^n} = \overbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}^{\rho^n} \cdot \frac{p_{0\infty}}{n!} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.103}$$

kjer smo zopet vpeljali intenzivnost prometa $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Splošen člen torej je:

$$p_{i\infty} = \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_{0\infty} \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.104}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0. tega stanja v stacionarnem stanju. V ta namen s pomočjo izraza (5.104) tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
&p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + \ldots + p_{i\infty} + \ldots = 1 \\
&p_{0\infty} + \frac{\rho}{1!} \cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_{0\infty} + \ldots + \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_{0\infty} + \ldots = 1 \\
&p_{0\infty} \cdot \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^i}{i!} + \ldots\right) = 1 \\
&p_{0\infty} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^i}{i!} + \ldots} = \frac{1}{S} \\
&S = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^i}{i!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} = e^{+\rho}
\end{aligned} \tag{5.105}$$

kjer smo upoštevali, da velja enakost: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} = e^{+\rho}$. Torej velja enakost $S = e^{+\rho}$ in potemtakem dobimo negativno eksponentno porazdelitev za verjetnost za zasedbo 0. tega stanja v stacionarnih razmerah:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{e^{+\rho}} = e^{-\rho} \tag{5.106}$$

Če vstavimo izraz (5.106) v izraz (5.104), dobimo naslednji izraz za verjetnost za zasedbo i. tega stanja v stacionarnih razmerah:

$$p_{i\infty} = \frac{\rho^i}{i!} \cdot e^{-\rho} \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.107}$$

Če primerjamo ta izraz z izrazom (4.87), vidimo, da smo dobili točno Poissonovo porazdelitev za verjetnost za zasedbo i. tega stanja v stacionarnih razmerah.

Poglejmo si še, kakšno je povprečno število strank v sistemu.

$$L = E(N) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_{i\infty} = \underbrace{0 \cdot p_{0\infty}}_{0} + \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\rho^i}{i!} \cdot e^{-\rho} = e^{-\rho} \cdot \rho \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \cdot \rho^{i-1}}{i!} =$$
$$= e^{-\rho} \cdot \rho \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} \tag{5.108}$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $m = i - 1$, dobimo naslednji izraz:

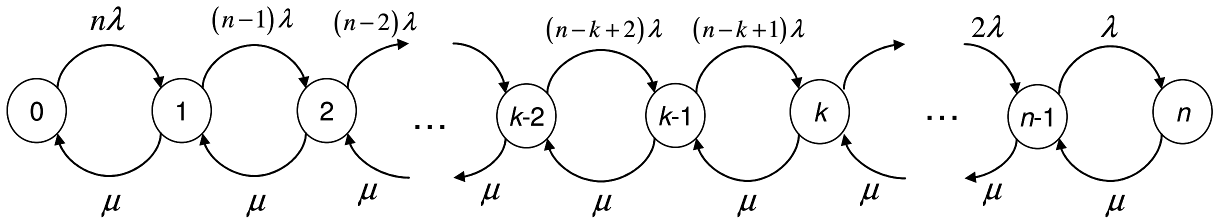
$$L = e^{-\rho} \cdot \rho \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!}}_{e^{\rho}} = e^{-\rho} \cdot \rho \cdot e^{\rho} = \rho \tag{5.109}$$

Torej velja za povprečno število strank v sistemu:

$$L = E(N) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.110}$$

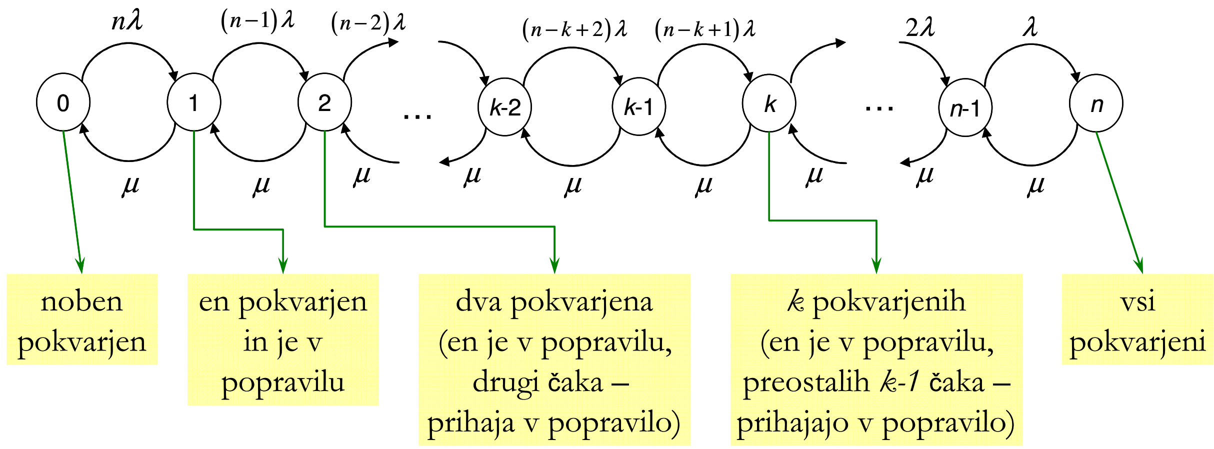
5.4 Sistem M/M/1 (končno število strank)

Gre za sistem s končno vhodno populacijo [5,12]. Naj bo *n* velikost populacije, iz katere stranke prihajajo v sistem. Če je v sistemu že *k* strank, to pomeni, da jih je v izvorni populaciji ostalo le še *n-k*. Avtomat na sliki 68 ilustrira sistem *M/M/1* s končnim številom strank.



Slika 68: Sistem *M/M/1* s končnim številom strank

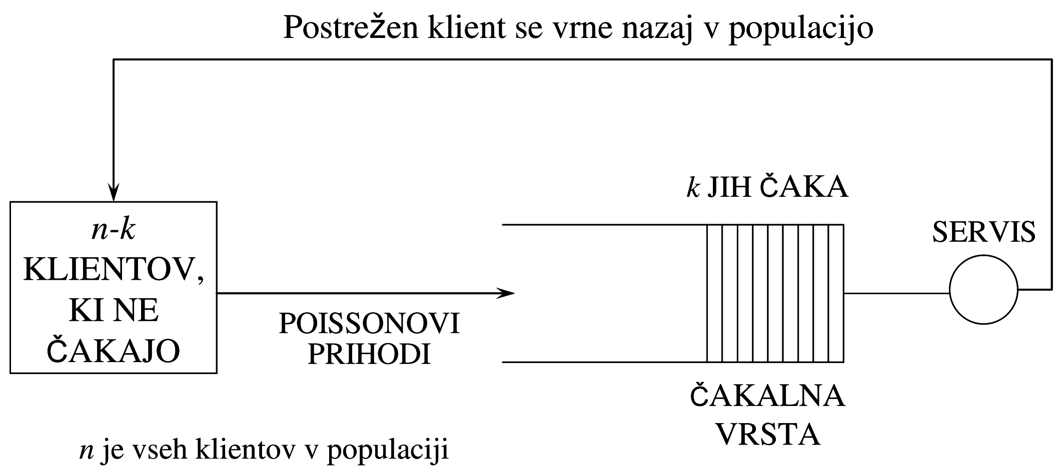
Med tovrstnimi aplikacijami je tipičen primer popravljanje strojev. Denimo imamo *n* istovrstnih strojev, ki jih popravlja en vzdrževalec. Predpostavimo, da vzdrževalec dela ves čas, ko stroji odpovedujejo, ter ne izgubi nič časa s hojo od enega stroja do drugega. Pogostost odpovedi posameznega stroja naj bo λ, pogostost zaključkov popravil pa μ. V tem primeru ima avtomat izgled, kot ga prikazuje slika 69.



Slika 69: Sistem *M/M/1* s končnim številom strank (primer popravljanja strojev)

Pokvarjeni stroji, ki odpovedo, predstavljajo stranke, ki čakajo na strežbo. Če je že k pokvarjenih strojev, ki čakajo na popravilo, je še n-k brezhibnih strojev, ki pa se tudi lahko pokvarijo. Denimo predstavljajo dogodki, ko se stroji pokvarijo, Poissonov proces, kjer je nova okvara nov dogodek. Časi med temi dogodki so porazdeljeni po eksponentnem zakonu. Če so vsi stroji dobri, se jih lahko največje število pokvari, zato je pogostost odpovedi vseh nepokvarjenih strojev $n \cdot \lambda$ največja. Ko pa se jih k že pokvari in čakajo na popravilo, se jih le še n-k lahko pokvari. Torej so gotovo dogodki, ko bi prišlo do nove okvare, bolj redki, pogostost odpovedi preostalih nepokvarjenih strojev $(n-k) \cdot \lambda$ pa je gotovo manjša kot v primeru vseh nepokvarjenih strojev. Torej očitno intenzivnost dogodkov novih okvar pada s številom že pokvarjenih strojev (odvisnost pogostosti odpovedi nepokvarjenih strojev od stanj sistema).

Princip delovanja *M/M/1* sistema z omejenim številom strank je lepo prikazan tudi na sliki 70.



Slika 70: Princip delovanja *M/M/1* sistema z omejenim številom strank

Proces odpovedovanja in popravljanja strojev lahko obravnavamo kot rojstno smrtni proces z naslednjimi vrednostmi pogostosti rojstev in smrti [5,12]:

$$\lambda_i = \begin{cases} (n-i)\cdot\lambda, & i = 0,1,2,...,n \\ 0 & i > n \end{cases} \tag{5.111}$$

$$\mu_i = \mu \ , \quad i = 1,\ 2,...$$

S pomočjo slike 70 lahko tvorimo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnem stanju. Tako za stanja veljajo naslednji izrazi (postavimo enakost indeksov *i*=*k*):

$$\begin{aligned}
&\mu\cdot p_{1\infty} = \mathrm{n}\cdot\lambda\cdot p_{0\infty} \\
&\mu\cdot p_{2\infty} = (n-1)\cdot\lambda\cdot p_{1\infty} \\
&\mu\cdot p_{3\infty} = (n-2)\cdot\lambda\cdot p_{2\infty} \\
&... \\
&\mu\cdot p_{i\infty} = (n-(i-1))\cdot\lambda\cdot p_{i-1\infty} \\
&... \\
&\mu\cdot p_{n\infty} = (n-(n-1))\cdot\lambda\cdot p_{n-1\infty}
\end{aligned} \tag{5.112}$$

Če izraze (5.112) nekoliko preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned}
&p_{1\infty} = \frac{\mathrm{n}\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{0\infty} \\
&p_{2\infty} = \frac{(n-1)\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{1\infty} \\
&p_{3\infty} = \frac{(n-2)\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{2\infty} \\
&... \\
&p_{i\infty} = \frac{(n-(i-1))\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{i-1\infty} \\
&... \\
&p_{n\infty} = \frac{(n-(n-1))\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{n-1\infty}
\end{aligned} \tag{5.113}$$

oziroma:

$$p_{1\infty} = \frac{n\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{0\infty}$$

$$p_{2\infty} = \frac{(n-1)\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{1\infty} = \frac{(n-1)\cdot\lambda}{\mu}\cdot\frac{n\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{0\infty} = (n-1)\cdot n\cdot\frac{\lambda^2}{\mu^2}\cdot p_{0\infty}$$

$$p_{3\infty} = \frac{(n-2)\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{2\infty} = \frac{(n-2)\cdot\lambda}{\mu}\cdot\frac{(n-1)\cdot\lambda}{\mu}\cdot\frac{n\cdot\lambda}{\mu}\cdot p_{0\infty} =$$

$$= (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot\frac{\lambda^3}{\mu^3}\cdot p_{0\infty}$$

$$\vdots$$

$$p_{i\,\infty} = \underbrace{(n-i+1)\cdot(n-i+2)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}_{\frac{n!}{(n-i)!}}\cdot\frac{\lambda^i}{\mu^i}\cdot p_{0\infty} \tag{5.114}$$

$$\vdots$$

$$p_{n\,\infty} = \underbrace{(n-n+1)\cdot(n-n+2)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}_{\frac{n!}{(n-n)!}}\cdot\frac{\lambda^n}{\mu^n}\cdot p_{0\infty} =$$

$$= \underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}_{n!}\cdot\frac{\lambda^n}{\mu^n}\cdot p_{0\infty}$$

Splošen člen torej je:

$$p_{i\infty} = \underbrace{(n-i+1)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}_{\frac{n!}{(n-i)!}}\cdot\rho^i\cdot p_{0\infty}\ , \quad i = 1,\ldots,n \quad \text{in} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.115}$$

kjer smo zopet vpeljali intenzivnost prometa $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0. tega stanja v stacionarnem stanju. V ta namen s pomočjo izraza (5.115) tvorimo naslednji izraz:

$$p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{i\,\infty} + \ldots + p_{n\,\infty} = 1 \tag{5.116}$$

oziroma:

$$p_{0\infty}+n\cdot\rho\cdot p_{0\infty}+(n-1)\cdot n\cdot\rho^2\cdot p_{0\infty}+...+n!\cdot\rho^n\cdot p_{0\infty}=1 \tag{5.117}$$

Odtod sledi:

$$p_{0\infty}\cdot\left[1+n\cdot\rho+(n-1)\cdot n\cdot\rho^2+...+n!\cdot\rho^n\right]=1 \tag{5.118}$$

Verjetnost za zasedbo 0. tega stanja v stacionarnem stanju torej je:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{1+n\cdot\rho+(n-1)\cdot n\cdot\rho^2+...+n!\cdot\rho^n}=\frac{1}{S} \tag{5.119}$$

Če vstavimo izraz (5.119) v izraz (5.115), dobimo verjetnost za zasedbo i.tega stanja v stacionarnih razmerah:

$$p_{i\,\infty}=\frac{\frac{n!}{(n-i)!}\cdot\rho^i}{1+n\cdot\rho+(n-1)\cdot n\cdot\rho^2+...+n!\cdot\rho^n},\quad i=1,...,n \quad \text{in} \quad \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{5.120}$$

V nadaljevanju si poglejmo, kakšno je povprečno število strank v sistemu pri omejenem številu strank. Gotovo lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} L=E(N)&=\sum_{i=0}^{n} i\cdot p_{i\infty}=\sum_{i=0}^{n} i\cdot(n-i+1)\cdot...\cdot(n-1)\cdot n\cdot\rho^i\cdot p_{0\infty}= \\ &=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\frac{n!}{(n-i)!}\cdot\rho^i\cdot p_{0\infty} \end{aligned} \tag{5.121}$$

Pokazati se da, da po nekoliko zahtevnejši izpeljavi dobimo za povprečno število strank v sistemu naslednji rezultat [5,12]:

$$L=E(N)=n-\frac{1}{\rho}\cdot(1-p_{0\infty}) \tag{5.122}$$

V nadaljevanju izračunajmo povprečno število strank v strežbi. Zapišemo lahko naslednji izraz:

$$L_S = \underbrace{E(N_S)}_{\substack{\text{en stroj}\\ \text{se popravlja}}} = \sum_{i=0}^{n} i \cdot p_{i\,S} = \underbrace{0 \cdot p_{0S}}_{0} + 1 \cdot p_{1S} + \underbrace{2 \cdot p_{2S} + ... + n \cdot p_{n\,S}}_{\substack{\text{0, saj več kot en stroj hkrati}\\ \text{ne moremo popravljati}}} =$$

$$= 1 \cdot p_{1S} = 1 \cdot P(strežnik\ zaseden\ z\ eno\ stranko) = \tag{5.123}$$

$$= 1 - P(strežnik\ ni\ zaseden\ z\ nobeno\ stranko) =$$

$$= 1 - \underbrace{p_{0\infty}}_{\substack{\text{strežnik}\\ \text{ni zaseden}}}$$

kjer smo upoštevali le verjetnost p_{1S}, torej verjetnost, da strežnik lahko streže zgolj eni stranki naenkrat.

Gotovo lahko zopet napišemo naslednji izraz:

$$\underbrace{E(N)}_{L} = \underbrace{E(N_q)}_{L_q} + \underbrace{E(N_S)}_{L_S} \tag{5.124}$$

$$E(N_q) = E(N) - E(N_S)$$

Odtod z upoštevanjem izrazov (5.122) in (5.123) za povprečno število strank v vrsti sledi:

$$E(N_q) = \underbrace{n - \frac{1}{\rho} \cdot (1 - p_{0\infty})}_{E(N)} - \underbrace{(1 - p_{0\infty})}_{E(N_S)} =$$

$$= n - \left(\frac{1}{\rho} + 1\right) \cdot (1 - p_{0\infty}) = n - \left(\frac{\rho + 1}{\rho}\right) \cdot (1 - p_{0\infty}) = n - \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu} + 1}{\frac{\lambda}{\mu}}\right) \cdot (1 - p_{0\infty}) = \tag{5.125}$$

$$= n - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right) \cdot (1 - p_{0\infty})$$

Poglejmo si naslednji primer [13]:

Neko napravo napajajo 3 napajalniki, ki so ves čas priključeni. Kadar napajalnik odpove, ga vzdrževalec popravi. Posamezen napajalnik odpove v povprečju enkrat na 20 dni, povprečen čas popravila napajalnika pa je 2 dni. Predpostavimo, da sta čas delovanja napajalnika med zaporednima odpovedma in čas popravila porazdeljena eksponentno. Kolikšno je povprečno število nedelujočih napajalnikov po daljšem času?

Najprej podajmo podatke:

$$\lambda = \frac{1}{20\,\text{dni}} = \frac{\frac{1}{20}}{\text{dan}}$$

$$\mu = \frac{1}{2\,\text{dni}} = \frac{\frac{1}{2}}{\text{dan}} \tag{5.126}$$

$$n = 3$$

$$E(N) = ?$$

Nato lahko izračunamo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{\frac{1}{20}}{\text{dan}}}{\frac{\frac{1}{2}}{\text{dan}}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \tag{5.127}$$

Na osnovi izraza (5.119) lahko izračunamo verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah:

$$\begin{aligned} p_{0\infty} &= \frac{1}{1 + n \cdot \rho + (n-1) \cdot n \cdot \rho^2 + \ldots + n! \cdot \rho^n} = \frac{1}{1 + 3 \cdot \rho + 2 \cdot 3 \cdot \rho^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \rho^3} \\ &= \frac{1}{1 + 3\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0.1 + 6 \cdot \left(0.1^2 + 0.1^3\right)} = 0.732 \end{aligned} \tag{5.128}$$

Torej je 73.2 % verjetnosti, da bo sistem v stacionarnem stanju prazen (bo v njem 0 osebkov oz. ne bo nobenega napajalnika v popravilu).

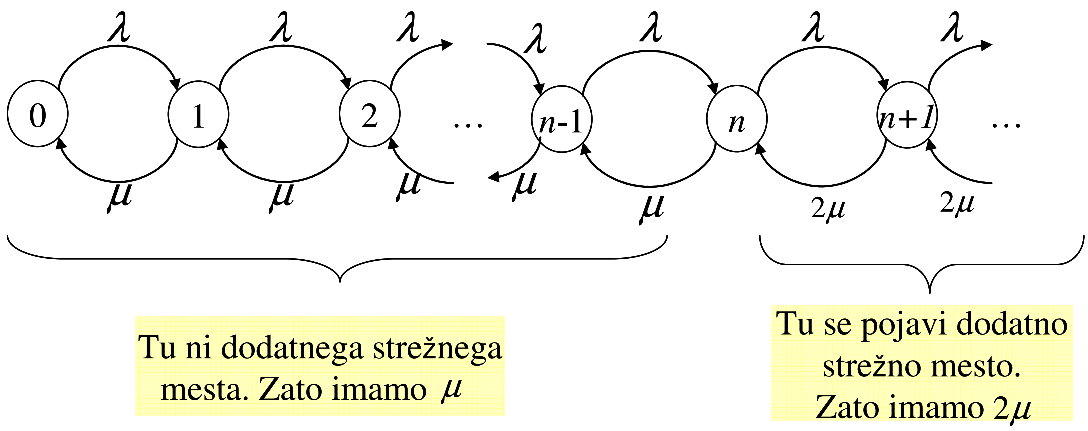
Na osnovi izraza (5.122) lahko izračunamo še povprečno število strank v sistemu:

$$L = E(N) = n - \frac{1}{\rho}\cdot(1-p_{0\infty}) = 3 - \frac{1}{0.1}\cdot(1-0.732) = 3-10\cdot(0.268) = 0.32 \qquad (5.129)$$

Torej je povprečno število nedelujočih napajalnikov po daljšem času enako 0.32.

5.5 Sistem M/M/1 (dodatno strežno mesto za daljše vrste)

V praksi se večkrat zgodi, da je število strežnih mest odvisno od števila strank v sistemu (npr. število blagajn v trgovini, število okenc v banki, itn) [12]. Denimo, da imamo eno samo strežno mesto, dokler je število strank v sistemu manjše ali enako od n. Ko pa število strank preseže vrednost n, se uvede dodatno strežno mesto. Slednje se zopet ukine, čim število strank v sistemu pade na vrednost $\leq n$. Slika 71 prikazuje avtomat za sistem M/M/1 z dodatnim strežnim mestom za daljše vrste.



Slika 71: Sistem M/M/1 (dodatno strežno mesto za daljše vrste)

Za pogostost rojstev in smrti lahko zapišemo naslednji izraz:

$$\lambda_i = \lambda, \qquad i = 0,1,2,...$$
$$\mu_i = \begin{cases} \mu\ , & i = 1,...,n \\ 2\mu\ , & i = n+1,\ n+2,... \end{cases} \qquad (5.130)$$

kjer se seveda ob uvedbi dodatnega strežnega mesta intenzivnost zaključkov strežbe podvoji.

S pomočjo slike 71 lahko tvorimo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnem stanju. Tako za stanja veljajo naslednji izrazi:

$$
\begin{aligned}
&\mu \cdot p_{1\infty} = \lambda \cdot p_{0\infty} \\
&\mu \cdot p_{2\infty} = \lambda \cdot p_{1\infty} \\
&\mu \cdot p_{3\infty} = \lambda \cdot p_{2\infty} \\
&\ldots \\
&\mu \cdot p_{i\infty} = \lambda \cdot p_{i-1\infty} \\
&\ldots \\
&\mu \cdot p_{n\infty} = \lambda \cdot p_{n-1\infty} \\
&2 \cdot \mu \cdot p_{n+1\infty} = \lambda \cdot p_{n\infty} \\
&2 \cdot \mu \cdot p_{n+2\infty} = \lambda \cdot p_{n+1\infty} \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{5.131}
$$

Za stanja med 0 in *n* tako dobimo naslednje verjetnosti v stacionarnem stanju:

$$
\begin{aligned}
&p_{1\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} \\
&p_{2\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{1\infty} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_{0\infty} \\
&p_{3\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{2\infty} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot p_{0\infty} \\
&\quad \cdots \\
&p_{i\,\infty} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot p_{0\infty} \\
&\quad \cdots \\
&p_{n\,\infty} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_{0\infty}
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

Za stanja večja od n pa dobimo verjetnosti v stacionarnem stanju:

$$\begin{aligned}
p_{n+1,\infty} &= \frac{\lambda}{2\mu}\cdot p_{n\,\infty} = \frac{\lambda}{2\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\cdot p_{0\infty} \\
p_{n+2,\infty} &= \frac{\lambda}{2\mu}\cdot p_{n+1,\infty} = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{2}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\cdot p_{0\infty} \\
p_{n+3,\infty} &= \frac{\lambda}{2\mu}\cdot p_{n+2,\infty} = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{3}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\cdot p_{0\infty} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Splošen člen torej je:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{i}\cdot p_{0\infty} \ , & i = 0, 1, \ldots, n \\ \left(\dfrac{\lambda}{2\mu}\right)^{i-n}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\cdot p_{0\infty} \ , & i = n+1,\ n+2, \ldots \end{cases} \tag{5.134}$$

Če uvedemo še intenzivnost prometa $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, dobimo:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \rho^{i}\cdot p_{0\infty} \ , & i = 0, 1, \ldots, n \\ \left(\dfrac{\rho}{2}\right)^{i-n}\cdot\rho^{n}\cdot p_{0\infty} \ , & i = n+1,\ n+2, \ldots \end{cases}$$

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \rho^{i}\cdot p_{0\infty} \ , & i = 0, 1, \ldots, n \\ \dfrac{\rho^{i-n}\cdot\rho^{n}}{2^{i-n}}\cdot p_{0\infty} \ , & i = n+1,\ n+2, \ldots \end{cases} \tag{5.134}$$

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \rho^{i}\cdot p_{0\infty} \ , & i = 0, 1, \ldots, n \\ \dfrac{\rho^{i}\cdot p_{0\infty}}{2^{i-n}} \ , & i = n+1,\ n+2, \ldots \end{cases}$$

Torej velja za porazdelitev verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju naslednji izraz:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \rho^{i}\cdot p_{0\infty} \ , & i = 0, 1, \ldots, n \\ \dfrac{\rho^{i}\cdot p_{0\infty}}{2^{i-n}} \ , & i = n+1,\ n+2, \ldots \end{cases} \qquad \text{kjer je} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.135}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah. Gotovo velja naslednji izraz:

$$p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{n\,\infty} + p_{n+1,\infty} + p_{n+2,\infty} + \ldots = 1 \tag{5.136}$$

ki z upoštevanjem izraza (5.135) preide v obliko:

$$p_{0\infty} + \rho^1 \cdot p_{0\infty} + \rho^2 \cdot p_{0\infty} + \ldots + \rho^n \cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^{n+1}}{2^1} \cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^{n+2}}{2^2} \cdot p_{0\infty} + \ldots = 1$$

$$p_{0\infty} \cdot \left[1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \frac{\rho^{n+1}}{2^1} + \frac{\rho^{n+2}}{2^2} + \ldots \right] = 1$$

$$p_{0\infty} \cdot \left[\underbrace{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n}_{\sum_{i=0}^{n} \rho^i} + \underbrace{\frac{\rho^{n+1}}{2^1} + \frac{\rho^{n+2}}{2^2} + \ldots}_{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-n}}} \right] = 1 \tag{5.137}$$

$$p_{0\infty} = \frac{1}{\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \rho^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-n}}}_{S}} = \frac{1}{S}$$

Vsoto S v imenovalcu lahko še nekoliko preoblikujemo:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \rho^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-n}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i}_{\frac{1-\rho^n}{1-\rho}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-n}} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \frac{\rho^n}{\rho^n} \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\rho^i}{2^{i-n}} =$$

$$= \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \rho^n \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\rho^{i-n}}{2^{i-n}} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \rho^n \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{i-n} \tag{5.138}$$

kjer smo podobno kot v izrazih (5.68) in (5.69) upoštevali, da velja enakost: $\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$. Če nato vpeljemo novo spremenljivko $i - n = m$, sledi:

$$S = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \rho^n \cdot \overbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2} \right)^m}^{\text{geometrijska vrsta}} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \frac{\rho^n}{1 - \frac{\rho}{2}} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} + \frac{2 \cdot \rho^n}{2-\rho} \tag{5.139}$$

Izraz (5.139) še nekoliko razvijemo in dobimo:

$$S=\frac{\left(1-\rho^{n}\right)\cdot(2-\rho)+2\rho^{n}\cdot(1-\rho)}{(1-\rho)\cdot(2-\rho)}=\frac{2-\rho-2\cdot\rho^{n}+\rho^{n+1}+2\cdot\rho^{n}-2\cdot\rho^{n+1}}{(1-\rho)\cdot(2-\rho)}=$$
$$=\frac{2-\rho-\rho^{n+1}}{(1-\rho)\cdot(2-\rho)} \tag{5.140}$$

Če vstavimo izraz (5.140) v izraz (5.137), dobimo verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S}=\frac{(1-\rho)\cdot(2-\rho)}{2-\rho-\rho^{n+1}}\ ,\qquad \text{kjer je }\ \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{5.141}$$

Porazdelitev verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju seveda dobimo, če vstavimo izraz (5.141) v izraz (5.135):

$$p_{i\,\infty}=\begin{cases}\rho^{i}\cdot\dfrac{(1-\rho)\cdot(2-\rho)}{2-\rho-\rho^{n+1}}\ , & i=0,\,1,\ldots,\,n\\[2ex] \dfrac{\rho^{i}\cdot\dfrac{(1-\rho)\cdot(2-\rho)}{2-\rho-\rho^{n+1}}}{2^{i-n}}\ , & i=n+1,\,n+2,\ldots\end{cases}\qquad \text{kjer je }\ \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{5.142}$$

Izpeljava ključnih statističnih karakteristik je v tem primeru nekoliko bolj zapletena. Detajle si lahko bralec pogleda v literaturi [4,9,31]. Zato omenimo le, da je npr. povprečno število strank v sistemu priporočljivo izračunati kar na osnovi osnovne definicije, torej [12]:

$$E(N)=L=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot p_{i\,\infty} \tag{5.143}$$

V nadaljevanju si poglejmo naslednji primer [13]:

V neki trgovini imajo eno blagajno, dokler je število strank v trgovini manjše ali enako 12. Če pa to število preseže 12, odprejo novo blagajno. Prihodi strank na blagajno tvorijo Poissonov proces s pogostostjo 15/h, časi strežbe na blagajni pa so porazdeljeni eksponentno s povprečjem 3 min. Izračunajte verjetnost, da je v trgovini 8 strank, ter verjetnost, da je v trgovini 14 strank.

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{15}{h}$$

$$\mu = \frac{1}{3\min} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{60}h} = \frac{20}{h} \tag{5.144}$$

$$n = 12$$

Nato lahko izračunamo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{15}{h}}{\frac{20}{h}} = \frac{3}{4} \tag{5.145}$$

Na osnovi izraza (5.140) lahko izračunamo vrednost vsote S:

$$S = \frac{2-\rho-\rho^{n+1}}{(1-\rho)\cdot(2-\rho)} = \frac{2-\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^{13}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)} = \frac{2-\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^{13}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}} = \frac{4^2\left(\frac{5}{4}-\frac{3^{13}}{4^{13}}\right)}{5} =$$
$$= \frac{4^2\left(\frac{5\cdot 4^{12}-3^{13}}{4^{13}}\right)}{5} = \frac{5\cdot 4^{12}-3^{13}}{5\cdot 4^{11}} = 4-\frac{3^{13}}{5\cdot 4^{11}} = 3.9239 \tag{5.146}$$

Torej je verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah na osnovi izraza (5.141) enaka:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1}{3.9239} = 0.2548 \tag{5.147}$$

V nadaljevanju izraz (5.135) preoblikujmo v skladu s podatki naloge in izračunanim izrazom (5.147):

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot 0.2548 \ , & i = 0, 1, \ldots, 12 \\ \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot 0.2548}{2^{i-12}} \ , & i = 13, 14, \ldots \end{cases} \tag{5.148}$$

Verjetnost, da je v trgovini 8 strank, je enaka:

$$p_{8\infty} = \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot 0.2548 = 0.0255 \tag{5.149}$$

Verjetnost, da je v trgovini 14 strank, pa je enaka:

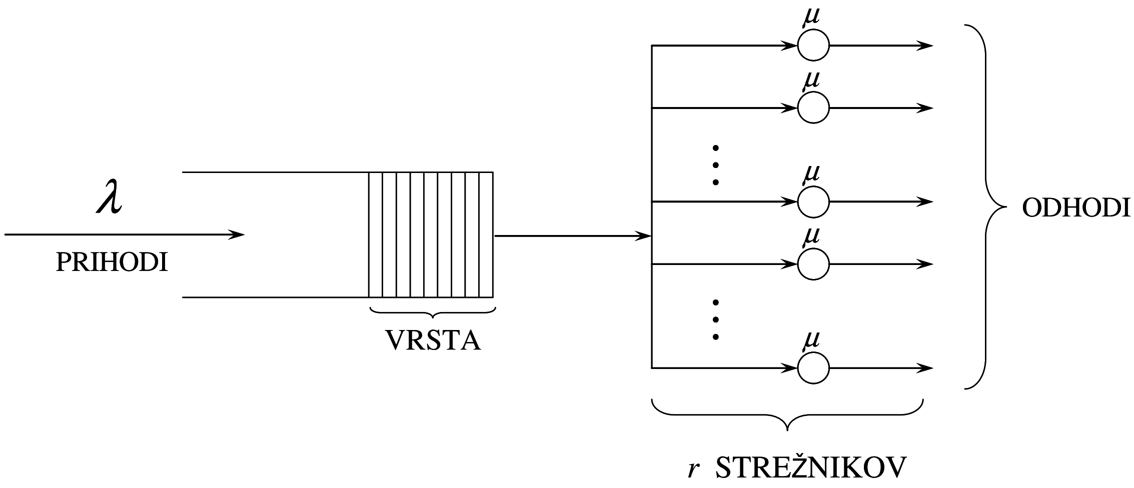
$$p_{14\infty} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{14} \cdot 0.2548}{2^{14-12}} = 1.135 \cdot 10^{-3} = 0.001135 \tag{5.150}$$

V tem trenutku smo končali z obravnavo enokanalnih sistemov množične strežbe z enim strežnim mestom. V nadaljevanju pa si bomo pogledali še večkanalne sisteme množične strežbe. Najprej bomo podobno kot pri enokanalnih sistemih obravnavali osnovni večkanalni sistem, potem pa še nekatere njegove modificirane inačice.

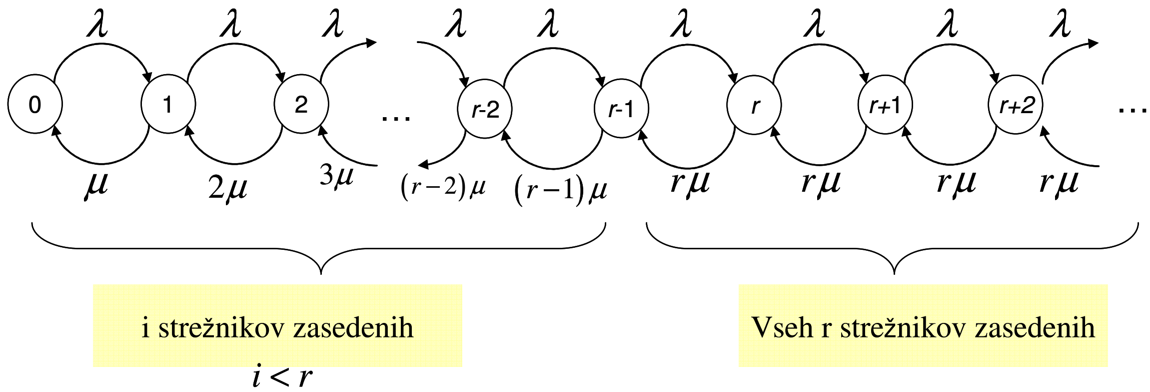
5.6 Sistem M/M/r (osnovni model)

Denimo imamo v sistemu *r* strežnikov, ki delujejo neodvisno drug od drugega [5,11,12]. Predpostavimo, da se stranke, ki prihajajo v sistem, postavijo v eno samo vrsto v zaporedju, kot prihajajo v sistem. Čim se določeno strežno mesto izprazni, gre v strežbo tista stranka, ki je prva v vrsti. Če pride stranka v sistem takrat, ko je več strežnikov prostih, gre h kateremukoli od njih. Prihodi strank tvorijo Poissonov proces s pogostostjo λ. Časi strežbe posameznih strežnikov pa so neodvisne naključne spremenljivke, ki so zaradi ekvivalentnosti strežnikov porazdeljene po eksponentnem zakonu s povprečjem $\frac{1}{\mu}$. Dokler je število strank manjše od števila strežnikov $(\text{je } i \le r)$, bodo vse stranke istočasno v strežbi. Če pa je $i > r$, je strank več kot strežnikov, zato bo *r* strankam istočasno nudena strežba, $i - r$ strank bo pa moralo čakati.

Princip delovanja osnovnega *M/M/r* sistema je predstavljen na sliki 72, avtomat za ta sistem je pa ilustriran na sliki 73. Podobno kot pri *M/M/1* osnovnem sistemu, tudi pri osnovnem *M/M/r* sistemu predpostavimo, da imamo opravka z neskončno populacijo strank, neomejenim prostorom za čakanje, ter disciplino "Kdor prvi pride, je prvi postrežen".



Slika 72: Princip delovanja osnovnega *M/M/r* sistema



Slika 73: Avtomat za osnovni *M/M/r* sistem

Iz slike 73 je razvidno naslednje. Če je strank manj kot strežnikov, npr. jih je $i < r$, potem je zaposlenih le i strežnikov, ki jih strežejo (vse naenkrat), preostali strežniki pa niso zaposleni. Zato je skupna intenzivnost odhodov postreženih strank enaka $i \cdot \mu$ (je proporcinalna številu strank oz. zaposlenih strežnikov). Če pa je strank več kot vseh r strežnikov, pa so seveda vsi strežniki zasedeni, zato postane skupna intenzivnost odhodov postreženih strank vseskozi enaka $r \cdot \mu$.

Seveda imamo zopet opravka z rojstno smrtnim procesom, kjer za parametre velja:

$$\lambda_i = \lambda, \qquad i = 0,1,2,...$$
$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu \;, & 1 \le i < r \\ r \cdot \mu \;, & i \ge r \end{cases} \tag{5.151}$$

kjer je μ kapaciteta (intenzivnost) strežbe posameznega strežnega mesta.

S pomočjo slike 73 lahko tvorimo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnem stanju. Tako za stanja veljajo naslednji izrazi:

$$
\begin{aligned}
&\mu \cdot p_{1\infty} = \lambda \cdot p_{0\infty} \\
&2 \cdot \mu \cdot p_{2\infty} = \lambda \cdot p_{1\infty} \\
&3 \cdot \mu \cdot p_{3\infty} = \lambda \cdot p_{2\infty} \\
&i \cdot \mu \cdot p_{i\infty} = \lambda \cdot p_{i-1\infty} \\
&\ldots \\
&(r-1) \cdot \mu \cdot p_{r-1\infty} = \lambda \cdot p_{r-2\infty} \\
&r \cdot \mu \cdot p_{r\infty} = \lambda \cdot p_{r-1\infty} \\
&r \cdot \mu \cdot p_{r+1\infty} = \lambda \cdot p_{r\infty} \\
&r \cdot \mu \cdot p_{r+2\infty} = \lambda \cdot p_{r+1\infty} \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{5.152}
$$

Izraze (5.152) lahko še nekoliko preoblikujemo in dobimo:

$$
\begin{aligned}
&p_{1\infty} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} \\
&p_{2\infty} = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot p_{1\infty} = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^2}{2! \cdot \mu^2} \cdot p_{0\infty} \\
&p_{3\infty} = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot p_{2\infty} = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^3}{3! \cdot \mu^3} \cdot p_{0\infty} \\
&\quad \ldots \\
&p_{i\,\infty} = \frac{\lambda}{i \cdot \mu} \cdot p_{(i-1)\,\infty} = \frac{\lambda}{i \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda}{(i-1) \cdot \mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} \cdot p_{0\infty} \\
&\quad \ldots \\
&p_{r-1,\infty} = \frac{\lambda}{(r-1) \cdot \mu} \cdot p_{r-2,\infty} = \frac{\lambda}{(r-1) \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda}{(r-2) \cdot \mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \\
&\qquad = \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)! \cdot \mu^{r-1}} \cdot p_{0\infty} \\
&p_{r\,\infty} = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot p_{r-1,\infty} = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda}{(r-1) \cdot \mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^r}{r! \cdot \mu^r} \cdot p_{0\infty} \\
&p_{r+1,\infty} = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot p_{r,\infty} = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda}{(r-1) \cdot \mu} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \\
&\qquad = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda^r}{r! \cdot \mu^r} \cdot p_{0\infty}
\end{aligned}
\tag{5.153}
$$

$$p_{r+2,\infty}=\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\cdot p_{r+1,\infty}=\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\cdot\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\cdot\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\cdot\frac{\lambda}{(r-1)\cdot\mu}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda}{2\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\cdot p_{0\infty}=$$
$$=\left(\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\right)^2\cdot\frac{\lambda^r}{r!\cdot\mu^r}\cdot p_{0\infty}$$

... itn.

Splošni člen torej lahko pišemo v obliki:

$$\begin{aligned}
p_{i\,\infty}&=\frac{\lambda^i}{i!\cdot\mu^i}\cdot p_{0\infty}\ , \qquad i=0,\,1,\,2,\ldots,r\\
p_{r\,\infty}&=\frac{\lambda^r}{r!\cdot\mu^r}\cdot p_{0\infty}\\
p_{j\,\infty}&=\left(\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\right)^{j-r}\cdot p_{r\,\infty}=\left(\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\right)^{j-r}\cdot\frac{\lambda^r}{r!\cdot\mu^r}\cdot p_{0\infty}\ , \qquad j=r+1,\ r+2,\ldots,\infty
\end{aligned} \tag{5.154}$$

V primeru *M/M/r* sistema definiramo intenzivnost prometa na naslednji način [12]:

$$\rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \quad\Rightarrow\quad \frac{\lambda}{\mu}=\rho\cdot r \tag{5.155}$$

Odtod seveda sledi:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i&=(\rho\cdot r)^i\\
\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r&=(\rho\cdot r)^r\\
\left(\frac{\lambda}{\mu\cdot r}\right)^{j-r}&=\rho^{j-r}
\end{aligned} \tag{5.156}$$

Če upoštevamo izraze (5.156) v izrazu (5.154), dobimo:

$$\begin{aligned}
p_{i\,\infty}&=\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot p_{0\infty}\ , \qquad i=0,\,1,\ldots,\ r\\
p_{r\,\infty}&=\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot p_{0\infty}\\
p_{j\,\infty}&=\rho^{j-r}\cdot p_{r\,\infty}=\rho^{j-r}\cdot\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot p_{0\infty}=\\
&=\frac{\rho^j\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty}\ , \qquad j=r+1,\ r+2,\ldots,\ \infty
\end{aligned} \tag{5.157}$$

Izraz (5.157) lahko zapišemo tudi v obliki enotnega indeksa *i*:

$$p_{i\,\infty}=\begin{cases}\dfrac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot p_{0\infty}\,, & i=0,\,1,...,\,r\\[2ex] \dfrac{\rho^i\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty}\,, & i=r+1,\,r+2,...,\,\infty\end{cases}\quad,\ \text{kjer}\quad \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \tag{5.158}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah. Gotovo velja naslednji izraz:

$$p_{0\infty}+p_{1\infty}+...+p_{r\,\infty}+p_{r+1,\infty}+p_{r+2,\infty}+...=1 \tag{5.159}$$

Če upoštevamo izraz (5.158) v izrazu (5.159), dobimo:

$$\begin{aligned}
&p_{0\infty}+p_{1\infty}+...+p_{r\,\infty}+...=1\\
&p_{0\infty}+\frac{\rho\cdot r}{1!}\cdot p_{0\infty}+\frac{(\rho\cdot r)^2}{2!}\cdot p_{0\infty}+...+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot p_{0\infty}+\\
&\qquad\qquad+\frac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty}+\frac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty}+...=1\\
&p_{0\infty}\cdot\left[1+\frac{\rho\cdot r}{1!}+\frac{(\rho\cdot r)^2}{2!}+...+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}+\frac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}+\frac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}+...\right]=1
\end{aligned} \tag{5.160}$$

$$p_{0\infty}=\frac{1}{\underbrace{1+\dfrac{\rho\cdot r}{1!}+\dfrac{(\rho\cdot r)^2}{2!}+...+\dfrac{(\rho\cdot r)^r}{r!}+\dfrac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}+\dfrac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}+...}_{=S}}$$

Torej za vsoto *S* velja:

$$\begin{aligned}
S&=1+\frac{\rho\cdot r}{1!}+\frac{(\rho\cdot r)^2}{2!}+...+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}+\frac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}+\frac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}+...=\\
&=1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{\rho^r\cdot r^r}{r!}+\frac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}+\frac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}+...=\\
&=1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{\rho^r\cdot r^r}{r!}\cdot\underbrace{\left(1+\rho+\rho^2+...\right)}_{\frac{1}{1-\rho}}=\\
&=1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{\rho^r\cdot r^r}{r!\cdot(1-\rho)}=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}
\end{aligned} \tag{5.161}$$

Torej za verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah velja:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}}\ ,\qquad \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \tag{5.162}$$

Če vstavimo izraz (5.162) v izraz (5.158), dobimo naslednji izraz za verjetnost za zasedbo i.tega stanja v stacionarnih razmerah pri *M/M/r* sistemu:

$$p_{i\,\infty}=\begin{cases}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot\frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}}, & i=0,1,...,r\\ \frac{\rho^i\cdot r^r}{r!}\cdot\frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}}, & i=r+1,r+2,...,\infty\end{cases}\ ,\ \text{kjer}\ \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \tag{5.163}$$

Seveda ravnovesna porazdelitev obstaja le, če je vsota S v izrazih (5.161) oz. (5.162) končna. To pa se zgodi v primeru, če velja [12]:

$$\begin{aligned}&\rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu}<1\\ &oz.:\\ &\frac{\lambda}{\mu}<r\end{aligned} \tag{5.164}$$

Če izraz (5.164) ne velja, ravnovesna porazdelitev ne obstaja, vrsta pa se lahko začne poljubno daljšati (nekontrolirano kopičiti).

V nadaljevanju izračunajmo verjetnost, da mora stranka čakati na strežbo. Tedaj ni nobeno strežno mesto prosto oz. je vseh r strežnikov zasedenih. Zapišemo lahko naslednji izraz:

$$P(\text{vseh } r \text{ strežnikov zasedenih})=\underbrace{\underbrace{p_r}_{\substack{\text{VSI}\\ \text{ZASEDENI}\\ \text{IN ŠE NI}\\ \text{VRSTE}}}+\underbrace{p_{r+1}}_{\substack{\text{VSI}\\ \text{ZASEDENI}\\ \text{IN 1 } \textit{STRANKA}\\ \text{ČAKA}}}+\underbrace{p_{r+2}}_{\substack{\text{VSI}\\ \text{ZASEDENI}\\ \text{IN 2 } \textit{STRANKI}\\ \text{ČAKATA}}}+...}_{\text{VSI ZASEDENI}}=p_{č} \tag{5.165}$$

Če upoštevamo izraz (5.158) v izrazu (5.165), dobimo:

$$
\begin{aligned}
p_{\check{c}} &= \frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^{r+1}\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^{r+2}\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty} + \ldots = \\
&= \frac{\rho^r\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty}\cdot \underbrace{\left[1+\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots\right]}_{\frac{1}{1-\rho}}
\end{aligned}
\tag{5.166}
$$

Verjetnost, da so vsi strežniki zasedeni in bo morala stranka čakati, je torej na osnovi izraza (5.162) sledeča:

$$
p_{\check{c}} = \frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot\frac{1}{1-\rho}\cdot \overbrace{p_{0\infty}}^{\frac{1}{S}} = \frac{\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot\frac{1}{1-\rho}}{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}}\quad,\qquad \text{kjer}\quad \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu}
\tag{5.167}
$$

Izraz (5.167) predstavlja takoimenovano ***Erlangovo zakasnitev (formula C),*** ki je uporabna zlasti v telefoniji [9,11,31].

V nadaljevanju bomo določili še nekatere statistične karakteristike, značilne za osnovne *M/M/r* sisteme. Najprej izračunajmo povprečno število strank v sistemu $E(N(t))$, pri čemer lahko na osnovi izraza (5.158) tvorimo naslednji izraz:

$$
\begin{aligned}
L = E(N) &= \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot p_{i\,\infty} = \sum_{i=0}^{r} i\cdot\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot p_{0\infty} + \sum_{i=r+1}^{\infty} i\cdot\frac{\rho^i\cdot r^r}{r!}\cdot p_{0\infty} = \\
&= \frac{\rho\cdot r}{\rho\cdot r}\cdot\sum_{i=0}^{r} i\cdot\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot p_{0\infty} + \frac{r^r}{r!}\cdot\sum_{i=r+1}^{\infty} i\cdot\rho^i\cdot p_{0\infty} = \left(\rho\cdot r\cdot\sum_{i=0}^{r}\frac{(\rho\cdot r)^{i-1}}{(i-1)!}+\frac{r^r}{r!}\cdot\sum_{i=r+1}^{\infty} i\cdot\rho^i\right)p_{0\infty}
\end{aligned}
\tag{5.168}
$$

Gotovo lahko zapišemo naslednji izraz:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{r} i\cdot\rho^i + \sum_{i=r+1}^{\infty} i\cdot\rho^i = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\rho^i \\
&\sum_{i=r+1}^{\infty} i\cdot\rho^i = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\rho^i - \sum_{i=0}^{r} i\cdot\rho^i
\end{aligned}
\tag{5.169}
$$

Če vpeljemo še novo spremenljivko $i-1=m$, tako dobimo:

$$L=E(N)=p_{0\infty}\cdot\left[\rho\cdot r\cdot\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^m}{m!}+\frac{r^r}{r!}\cdot\left\{\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\rho^i-\sum_{i=0}^{r}i\cdot\rho^i\right\}\right] \tag{5.170}$$

Podobno kot pri osnovnem *M/M/1* sistemu, lahko sedaj uporabimo izraz (5.22). Dokazati se da, da velja tudi izraz [9,11,31]:

$$\sum_{i=0}^{r}i\cdot\rho^i=\frac{\rho\cdot\left[r\cdot\rho^{r+1}-(r+1)\cdot\rho^r+1\right]}{(1-\rho)^2}\quad,\qquad|\rho|<1 \tag{5.171}$$

Če izraza (5.22) in (5.171) upoštevamo v izrazu (5.170), tako dobimo:

$$L=p_{0\infty}\cdot\left[\rho\cdot r\cdot\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^m}{m!}+\frac{r^r}{r!}\cdot\underbrace{\left\{\frac{\rho}{(1-\rho)^2}-\frac{\rho\cdot\left[r\cdot\rho^{r+1}-(r+1)\cdot\rho^r+1\right]}{(1-\rho)^2}\right\}}_{=F}\right] \tag{5.172}$$

V nadaljevanju izpeljimo izraz *F*:

$$\begin{aligned}F&=\frac{\rho-\rho\cdot r\cdot\rho^{r+1}+(r+1)\cdot\rho^{r+1}-\rho}{(1-\rho)^2}=\frac{-\rho\cdot r\cdot\rho^{r+1}+r\cdot\rho^{r+1}+\rho^{r+1}}{(1-\rho)^2}=\\&=\frac{r\cdot\rho^{r+1}\cdot(1-\rho)}{(1-\rho)^2}+\frac{\rho^{r+1}}{(1-\rho)^2}=\frac{r\cdot\rho^{r+1}}{(1-\rho)}+\frac{\rho^{r+1}}{(1-\rho)^2}\end{aligned} \tag{5.173}$$

Če izraz (5.173) upoštevamo v izrazu (5.172), dobimo:

$$\begin{aligned}L&=p_{0\infty}\cdot\left[\rho\cdot r\cdot\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^m}{m!}+\frac{r^r}{r!}\cdot\left(\frac{r\cdot\rho^{r+1}}{1-\rho}+\frac{\rho^{r+1}}{(1-\rho)^2}\right)\right]=\\&=p_{0\infty}\cdot\left[\rho\cdot r\cdot\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^m}{m!}+\frac{(\rho\cdot r)^r\cdot\rho\cdot r}{r!\cdot(1-\rho)}+\frac{r^r\cdot\rho^{r+1}}{r!\cdot(1-\rho)^2}\right]=\\&=p_{0\infty}\cdot\left[\rho\cdot r\cdot\underbrace{\left\{\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^m}{m!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}\right\}}_{S=\frac{1}{p_{0\infty}}}+\frac{\rho\cdot(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)^2}\right]\end{aligned} \tag{5.174}$$

kjer smo upoštevali tudi izraza (5.161) oz. (5.162). Za povprečno število strank v sistemu torej sledi:

$$L = E(N) = p_{0\infty} \cdot \left[\rho \cdot r \cdot \frac{1}{p_{0\infty}} + \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \right] = \rho \cdot r + p_{0\infty} \cdot \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \ , \qquad \text{kjer je} \quad \rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \tag{5.175}$$

V nadaljevanju izračunajmo tudi povprečno število strank v vrsti $E(N_q(t))$. Dokazati se da, da med veličinama L in L_q velja podobna relacija, kot smo jo izpeljali pri modelu *M/M/1* osnovnega sistema (glej izraz (5.34)) [11]:

$$\begin{aligned} &\underbrace{E(N)}_{L} = \underbrace{E(N_q)}_{L_q} + \underbrace{E(N_S)}_{\frac{\lambda}{\mu}} \\ &\underbrace{E(N_q)}_{L_q} = \underbrace{E(N)}_{L} - \underbrace{E(N_S)}_{\frac{\lambda}{\mu}} = \underbrace{E(N)}_{L} - \rho \cdot r \end{aligned} \tag{5.176}$$

Velja torej:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = L - \rho \cdot r \ , \qquad \text{kjer} \quad \rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \tag{5.177}$$

Če upoštevamo izraz (5.175), dobimo:

$$L_q = \rho \cdot r + p_{0\infty} \cdot \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} - \rho \cdot r \tag{5.178}$$

Povprečno število strank v vrsti je torej naslednje [12]:

$$L_q = E(N_q) = p_{0\infty} \cdot \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \tag{5.179}$$

pri čemer je verjetnost za zasedbo 0. stanja v stacionarnih razmerah seveda dana z izrazom (5.162).

Za osnovni *M/M/r* sistem se Littlov zakon glasi [11]:

$$E(N) = L = \lambda \cdot E(W)$$
$$E(N_q) = L_q = \lambda \cdot E(W_q) \tag{5.180}$$

Odtod lahko za povprečen čas čakanja stranke v sistemu na osnovi izraza (5.175) zapišemo naslednji izraz:

$$E(W) = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\rho \cdot r + p_{0\infty} \cdot \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \right] = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho \cdot \left[r + p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \right] =$$
$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot \left[r + p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} \right] = \left[\frac{1}{\mu} + p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2 \cdot r \cdot \mu} \right] \tag{5.181}$$

Za povprečen čas čakanja stranke v vrsti pa lahko na osnovi izrazov (5.179) in (5.180) zapišemo:

$$E(W_q) = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{\rho \cdot (\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2} =$$
$$= p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2 \cdot r \cdot \mu} \tag{5.182}$$

Če primerjamo izraza (5.181) in (5.182) za veličini $E(W)$ in $E(W_q)$, vidimo, da očitno velja naslednja relacija med njima:

$$E(W) = E(W_q) + \frac{1}{\mu} \tag{5.183}$$

Poglejmo si naslednji primer:

Denimo imamo banko, v kateri sta aktivni dve bančni okenci. Stranke, ki vstopajo v banko, tvorijo enojno čakalno vrsto in gredo k naslednjemu prostemu okencu, ko pridejo na začetek vrste. V povprečju pride 15 strank /h v banko, čas strežbe posamezne stranke pa je v povprečju 3 minute. Prihodi strank v banko predstavljajo Poissonov proces, časi zaključkov strežbe pa so porazdeljeni po eksponentnem zakonu. Poiščite verjetnost, da bo morala stranka, ko pride v banko, čakati.

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{15}{h} = \frac{15}{60\min} = \frac{1}{4}/\min$$

$$\mu = \frac{1}{E(Ws)} = \frac{1}{3\min} = \frac{1}{3}/\min \qquad (5.184)$$

$$r = 2$$

Ker imamo opravka z dvemi strežnimi mesti, gre očitno za model osnovnega *M/M/2* sistema. Nato na osnovi izraza (5.155) izračunamo tudi intenzivnost prometa ρ ter produkt $\rho \cdot r$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{r\cdot\mu} = \frac{\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{3}{8} \\ \rho\cdot r &= \frac{3}{8}\cdot 2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned} \qquad (5.185)$$

V nadaljevanju izračunajmo verjetnost, da mora stranka čakati na strežbo. To se seveda zgodi, ko ni nobeno strežno mesto prosto oz. so vsi strežniki zasedeni. Seveda imamo v tem primeru opravka s takoimenovano Erlangovo zakasnitvijo, ki smo jo spoznali v izrazu (5.167). Slednja v našem primeru preide v naslednjo obliko:

$$p_{\check{c}} = P(\text{čaka}) = \frac{\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot\frac{1}{1-\rho}}{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho\cdot r)^r}{r!\cdot(1-\rho)}} = \frac{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{8}}}{1+\frac{3}{4}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)}} = \qquad (5.186)$$

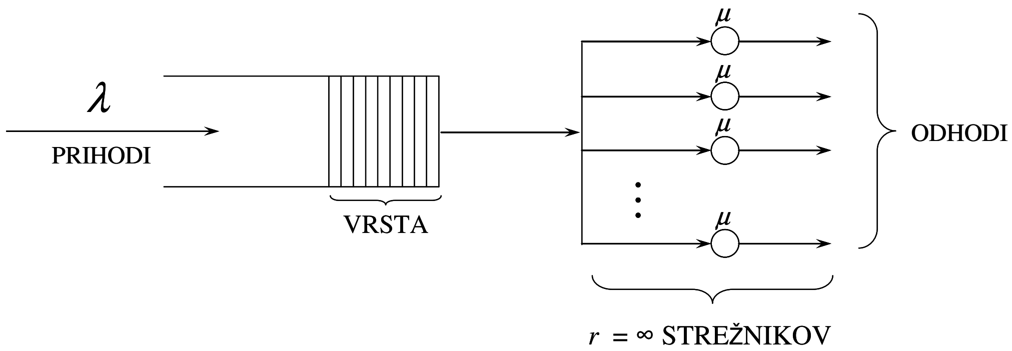
$$= \frac{\frac{9}{32}\cdot\frac{1}{\frac{5}{8}}}{1+\frac{3}{4}+\frac{9}{32\cdot\frac{5}{8}}} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{20}{20}+\frac{15}{20}+\frac{9}{20}} = \frac{9}{44} = 0.2045$$

Torej je 20.45% verjetnosti, da bo morala stranka čakati na postrežbo v banki.

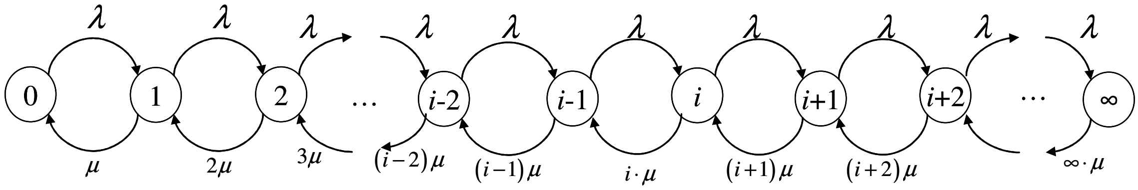
5.7 Sistem M/M/r (veliko strežnih mest)

V nekaterih primerih, npr. v veleblagovnicah, velikih tržnicah, itn, je število strežnih mest lahko zelo veliko in tedaj lahko model osnovnega M/M/r sistema poenostavimo na takšen način, da postavimo $r \to \infty$ [12]. Tedaj imamo opravka s takoimenovanim $M/M/\infty$ sistemom oz. z neomejenim servisom strežbe.

Princip delovanja $M/M/\infty$ sistema je predstavljen na sliki 74, avtomat za ta sistem je pa ilustriran na sliki 75.



Slika 74: Sistem z neomejenim številom strežnikov $M/M/\infty$



Slika 75: Avtomat za sistem z neomejenim številom strežnikov $M/M/\infty$

Seveda je pri tem sistemu načeloma strank vedno manj kot strežnikov, zato bo vsaka takoj postrežena in pravzaprav čakalnih vrst sploh ne bo. Kljub temu pa bodo seveda še vedno stranke v sistemu, ki ga opazujemo.

Tudi tokrat imamo opravka z rojstno smrtnim procesom, kjer za parametre velja:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda, & i &= 0,1,2,... \\ \mu_i &= i \cdot \mu \ , & i &= 1,\ 2,...,\ \infty \end{aligned} \tag{5.187}$$

Ker je zaposlenih v sistemu toliko strežnikov, kot je strank v sistemu (denimo jih je i v sistemu), je skupna intenzivnost odhodov (postreženih strank) enaka $i \cdot \mu$. Verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnih razmerah dobimo na podoben način, kot pri osnovnem *M/M/r* sistemu. Tako nam izraz (5.158) preide v naslednjo obliko:

$$p_{i\,\infty} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \cdot p_{0\infty} = \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} \cdot p_{0\infty} \ , \qquad i = 0,\ 1,\ 2,...,\ \infty \tag{5.188}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost $p_{0\infty}$, da ni nobene stranke v sistemu. V ta namen podobno kot v izrazu (5.160) tvorimo naslednjo relacijo:

$$\begin{aligned} & p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{i\,\infty} + ... = 1 \\ & p_{0\infty} + \frac{\lambda^1}{1! \cdot \mu^1} \cdot p_{0\infty} + \frac{\lambda^2}{2! \cdot \mu^2} \cdot p_{0\infty} + ... + \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} \cdot p_{0\infty} + ... = 1 \\ & p_{0\infty} \cdot \left(1 + \frac{\lambda^1}{1! \cdot \mu^1} + \frac{\lambda^2}{2! \cdot \mu^2} + ... + \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + ... \right) = 1 \end{aligned} \tag{5.189}$$

Velja torej:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^1}{1! \cdot \mu^1} + \frac{\lambda^2}{2! \cdot \mu^2} + ... + \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + ...} = \frac{1}{S} \tag{5.190}$$

Vsota S nam preide v naslednjo obliko:

$$S = 1 + \frac{\lambda^1}{1! \cdot \mu^1} + \frac{\lambda^2}{2! \cdot \mu^2} + ... + \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} = e^{+\frac{\lambda}{\mu}} \tag{5.191}$$

Za verjetnost $p_{0\infty}$, da ni nobene stranke v sistemu, torej sledi:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{e^{+\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \tag{5.192}$$

Če upoštevamo izraz (5.192) v izrazu (5.188), dobimo naslednjo verjetnost, da bo po daljšem času v sistemu *i* strank (v stacionarnem stanju):

$$p_{i\,\infty} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \quad , \qquad i = 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, \infty \tag{5.193}$$

V nadaljevanju poglejmo, kolikšno je povprečno število strank v sistemu. V ta namen tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} L = E(N) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_{i\,\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_{i\,\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1}}{(i-1)!} \end{aligned} \tag{5.194}$$

Vpeljimo novo spremenljivko *m = i-1* in dobimo:

$$L = E(N) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m)!}}_{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.195}$$

Za povprečno število strank v sistemu torej sledi:

$$L = E(N) = \frac{\lambda}{\mu} \tag{5.196}$$

Littlov zakon se podobno kot pri osnovnem *M/M/r* sistemu (glej izraz (5.180)) glasi:

$$E(N) = \lambda \cdot E(W) \quad \Rightarrow \quad E(W) = \frac{1}{\lambda} \cdot E(N) = \frac{1}{\mu} \tag{5.197}$$

Povprečen čas zadrževanja stranke v sistemu je torej enak:

$$E(W) = \frac{1}{\mu} \tag{5.198}$$

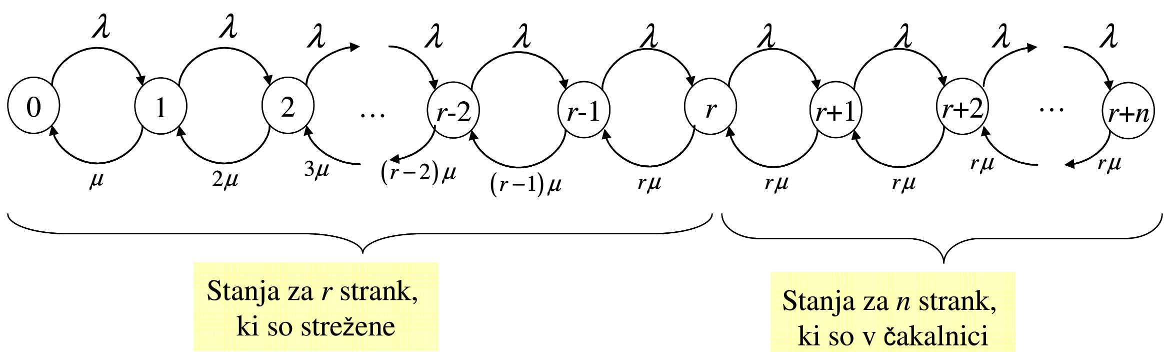
Ker čakalnih vrst pri $M/M/\infty$ sistemu ne more biti, sledi:

$$
\begin{aligned}
&L_q = E\left(N_q\right) = 0 \\
&E\left(W_q\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5.199}
$$

Povprečno število strank v vrsti in povprečen čas čakanja stranke v vrsti sta torej enaka 0.

5.8 Sistem *M/M/r* (omejen prostor za čakanje)

Podobno kot pri *M/M/1* sistemu, lahko tudi v primeru več strežnih mest izpeljemo model, ki opisuje proces strežbe v primeru, ko je prostor za čakanje omejen [12]. Tudi v tem primeru predpostavimo, da pogostost prihodov strank naenkrat pade na 0, ko se prostor za čakanje popolnoma zapolni. To pomeni, da nove stranke v primeru, ko postane sistem v celoti napolnjen, odidejo nepostrežene, saj ne najdejo več prostora za čakanje. Denimo je v prostoru za čakanje lahko največ n strank. Ker je r strank tudi v procesu strežbe (pri r strežnikih), torej nova stranka odide nepostrežena, če je ob njenem prihodu v sistemu že $r+n$ strank. Avtomat za *M/M/r* sistem pri omejenem prostoru za čakanje je ilustriran na sliki 76.



Slika 76: Avtomat za *M/M/r* sistem pri omejenem prostoru za čakanje

Seveda stanja večja od $r+n$ niso ilustrirana na sliki 76, saj je lahko v sistemu največ $r+n$ strank. Za pogostost prihodov in odhodov danega rojstno-smrtnega sistema lahko zapišemo naslednji izraz:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \ , & 0 \le i < r+n \\ 0, & i \ge r+n \end{cases}$$
$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu \ , & 1 \le i < r \\ r \cdot \mu \ , & i \ge r \end{cases} \tag{5.200}$$

Podobno kot pri osnovnem *M/M/r* sistemu lahko izpeljemo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnih razmerah. Dobimo podoben izraz kot izraz (5.158), le da tokrat upoštevamo, da je lahko v sistemu največ $r+n$ strank:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \overbrace{\dfrac{(\rho \cdot r)^i}{i!} \cdot p_{0\infty}}^{\substack{\text{VERJETNOSTI ZA } r \text{ STRANK,} \\ \text{KI SO STREŽENE}}} \ , & i = 0, 1, ..., r \\ \underbrace{\dfrac{\rho^i \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty}}_{\substack{\text{VERJETNOSTI ZA } n \text{ STRANK,} \\ \text{KI SO V ČAKALNICI}}} \ , & i = r+1, r+2, ..., r+n \end{cases} \ , \text{ kjer je } \rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \tag{5.201}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0.stanja $p_{0\infty}$ v stacionarnih razmerah. Zapišemo lahko naslednji izraz:

$$p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r\,\infty} + p_{r+1,\infty} + ... + p_{r+n,\infty} = 1$$
$$p_{0\infty} + \frac{\rho \cdot r}{1!} \cdot p_{0\infty} + \frac{(\rho \cdot r)^2}{2!} \cdot p_{0\infty} + ... + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} +$$
$$+ \frac{\rho^{r+1} \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} + \frac{\rho^{r+2} \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} + ... + \frac{\rho^{r+n} \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} = 1 \tag{5.202}$$

Odtod sledi:

$$p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1}{1 + \dfrac{\rho \cdot r}{1!} + \dfrac{(\rho \cdot r)^2}{2!} + ... + \dfrac{(\rho \cdot r)^r}{r!} + \dfrac{\rho^{r+1} \cdot r^r}{r!} + ... + \dfrac{\rho^{r+n} \cdot r^r}{r!}} \tag{5.203}$$

Za vsoto S velja:

$$S = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \left[1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^n \right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \rho^i \tag{5.204}$$

Kot smo videli že pri *M/M/1* sistemu z omejenim prostorom za čakanje (glej izraz (5.69)), velja naslednji izraz:

$$\sum_{i=0}^{n} \rho^i = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \tag{5.205}$$

Torej veljata za vsoto *S* in verjetnost $p_{0\infty}$ naslednja izraza:

$$S = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \qquad \text{in} \qquad p_{0\infty} = \frac{1}{S} \tag{5.206}$$

Za verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnih razmerah pa velja:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \dfrac{(\rho \cdot r)^i}{i!} \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} \dfrac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \dfrac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \dfrac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}} \;, & i = 0, 1, \ldots, r \\ \dfrac{\rho^i \cdot r^r}{r!} \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} \dfrac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \dfrac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \dfrac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}} \;, & i = r+1, \ldots, r+n \end{cases} \tag{5.207}$$

kjer je $\rho = \dfrac{\lambda}{r \cdot \mu}$

V nadaljevanju izračunajmo povprečno število strank v vrsti [9,31], pri čemer vpeljemo spremenljivko $N = r + n$, ki predstavlja maksimalno število strank v sistemu:

$$\begin{aligned} L_q &= E(N_q) = \sum_{i=r}^{N} (i-r) \cdot p_{i\,\infty} = \sum_{i=r+1}^{N} (i-r) \cdot \frac{\rho^i \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} = \\ &= \frac{r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \sum_{i=r}^{N} (i-r) \cdot \rho^i = \frac{r^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \frac{\rho^r}{\rho^r} \cdot \sum_{i=r}^{N} (i-r) \cdot \rho^i = \frac{r^r \cdot \rho^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \sum_{i=r}^{N} (i-r) \cdot \rho^{i-r} \end{aligned} \tag{5.208}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $m = i - r$ in dobimo:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \sum_{m=0}^{N-r} m \cdot \rho^m = \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{N-r} m \cdot \rho^{m-1}}_{\frac{d}{d\rho}\left(\sum\limits_{m=0}^{N-r} \rho^m\right)} = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{m=0}^{N-r} \rho^m\right) \end{aligned} \tag{5.209}$$

Gotovo lahko podobno kot pri izrazu (5.205) zapišemo:

$$\sum_{m=0}^{N-r} \rho^m = \frac{1-\rho^{N-r+1}}{1-\rho} \tag{5.210}$$

Tako nam izraz (5.209) preide v obliko:

$$L_q = \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{N-r+1}}{1-\rho}\right) \tag{5.211}$$

V izrazu (5.211) je očitno potrebno izvesti tudi odvajanje. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \frac{-(N-r+1)\cdot \rho^{N-r} \cdot (1-\rho) - \left(1-\rho^{N-r+1}\right)\cdot(-1)}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \frac{-(N-r+1)\cdot \rho^{N-r} + (N-r+1)\cdot \rho^{N-r+1} + 1 - \rho^{N-r+1}}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot p_{0\infty} \cdot \rho \cdot \frac{1-(N-r+1)\cdot \rho^{N-r} + (N-r)\cdot \rho^{N-r+1}}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-(N-r)\cdot \rho^{N-r} - \rho^{N-r} + (N-r)\cdot \rho^{N-r+1}\right] = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} \cdot \left\{(N-r)+1-(N-r)\cdot \rho\right\}\right] = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} \cdot \left\{1+(N-r)\cdot(1-\rho)\right\}\right] \end{aligned} \tag{5.212}$$

Izraz (5.212) lahko zapišemo še nekoliko drugače:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} - \rho^{N-r} \cdot (N-r)\cdot(1-\rho)\right] = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} - \rho^{N-r} \cdot (N-\rho \cdot N - r + \rho \cdot r)\right] = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} - \rho^{N-r} \cdot N + \rho^{N-r+1} \cdot N + \rho^{N-r} \cdot r - \rho^{N-r+1} \cdot r\right] = \\ &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^{N-r} \cdot (1+N-r) + \rho^{N-r+1} \cdot (N-r)\right] \end{aligned} \tag{5.213}$$

Če upoštevamo še, da je $N = r + n$, izraz (5.213) preide v naslednjo obliko:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1 - \rho^{n+r-r} \cdot (1+n+r-r) + \rho^{n+r-r+1} \cdot (n+r-r)\right] \\
L_q = E(N_q) &= \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1 - \rho^{n} \cdot (1+n) + \rho^{n+1} \cdot n\right]
\end{aligned}
\tag{5.214}
$$

Tako smo torej izračunali povprečno število strank v vrsti. Podobno kot pri *M/M/1* sistemu z omejenim prostorom za čakanje (glej izraze (5.85), (5.86) in (5.88)) tudi tukaj velja relacija:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{E(\text{strank v sistemu})}_{E(N(t))=L} = \underbrace{E(\text{strank v vrsti})}_{E(N_q(t))=L_q} + \underbrace{E(\text{strank v strežbi})}_{E(N_S(t))=L_S} \\
&E(N_S(t)) = \rho' = \frac{\lambda'}{\mu}
\end{aligned}
\tag{5.215}
$$

torej moramo pri obravnavi upoštevati takoimenovano efektivno intenzivnost prihodov λ'. Tako za povprečno število strank v sistemu dobimo:

$$
L = L_q + \underbrace{\frac{\lambda'}{\mu}}_{\rho'} = L_q + \frac{\lambda \cdot (1 - p_{n+r,\infty})}{\mu} = L_q + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\rho \cdot r} \cdot (1 - p_{n+r,\infty}) = L_q + \rho \cdot r \cdot (1 - p_{n+r,\infty}) \tag{5.216}
$$

kjer je:

$$
1 - p_{n+r,\infty} = p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{r\,\infty} + p_{r+1,\infty} + \ldots + p_{n+r-1,\infty} \tag{5.217}
$$

verjetnost, da je stranka sprejeta oz. ostane v sistemu (ni izgubljena). Seveda izraz (5.216) izračunamo tako, da upoštevamo izraz (5.214) za izračun L_q ter izraz (5.207) za izračun verjetnosti p_{n+r}. Povprečno število strank v sistemu pa seveda lahko izračunamo tudi po definiciji, torej da tvorimo izraz:

$$
L = E(N) = \sum_{i=0}^{r+n} i \cdot p_{i\,\infty} \ , \tag{5.218}
$$

pri čemer je $p_{i\,\infty}$ podan z izrazom (5.207).

Littlov zakon ima podobno kot pri *M/M/1* sistemu z omejenim prostorom za čakanje (glej izraz (5.90)) naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} E(N) &= L = \lambda' \cdot E(W) \\ E(N_q) &= L_q = \lambda' \cdot E(W_q) \end{aligned} \tag{5.219}$$

Za povprečen čas bivanja stranke v sistemu torej velja:

$$E(W) = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda \cdot (1 - p_{r+n,\infty})} \tag{5.220}$$

Za povprečen čas čakanja stranke v vrsti pa velja:

$$E(W_q) = \frac{L_q}{\lambda'} = \frac{L_q}{\lambda \cdot (1 - p_{r+n,\infty})} \tag{5.221}$$

Preverimo še povezavo med izrazoma (5.220) in (5.221):

$$E(W) = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L_q + \rho'}{\lambda'} = E(W_q) + \frac{\frac{\lambda'}{\mu}}{\lambda'} = E(W_q) + \frac{1}{\mu} \tag{5.222}$$

Na koncu si poglejmo še verjetnost, da stranki ni potrebno čakati, pri čemer lahko zapišemo naslednji izraz

$$\underbrace{P(\text{čaka})}_{P(\text{vsi strežniki zasedeni})} + \underbrace{P(\text{ne čaka})}_{P(\text{niso vsi strežniki zasedeni})} = 1 \tag{5.223}$$

Za verjetnost, da mora stranka čakati, velja:

$$\begin{aligned} P(\text{čaka}) &= P(\text{vsi strežniki zasedeni}) = \\ &= \underbrace{p_{r\,\infty}}_{\substack{\text{VSI ZASEDENI} \\ \text{IN ŠE NI VRSTE}}} + \underbrace{p_{r+1,\infty}}_{\substack{\text{VSI ZASEDENI} \\ \text{IN 1 ČLOVEK} \\ \text{ČAKA}}} + \underbrace{p_{r+2,\infty}}_{\substack{\text{VSI ZASEDENI} \\ \text{IN 2 ČLOVEKA} \\ \text{ČAKATA}}} + \ldots + \underbrace{p_{r+n,\infty}}_{\substack{\text{VSI ZASEDENI} \\ \text{IN } n \text{ LJUDI} \\ \text{ČAKA}}} = p_{\check{c}} \end{aligned} \tag{5.224}$$

Torej je verjetnost, da stranki ni potrebno čakati, enaka:

$$P(\text{ne čaka}) = 1 - P(\text{čaka}) = 1 - \left(p_{r\,\infty} + p_{r+1,\infty} + p_{r+2,\infty} + \ldots + p_{r+n,\infty}\right) \tag{5.225}$$

Po drugi strani pa vemo, da velja tudi:

$$p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{r\,\infty} + p_{r+1,\infty} + \ldots + p_{r+n,\infty} = 1 \tag{5.226}$$

oziroma:

$$p_{r\infty} + p_{r+1,\infty} + ... + p_{r+n,\infty} = 1 - \left(p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r-1,\infty} \right) \tag{5.227}$$

Verjetnost, da stranki ni potrebno čakati, je torej naslednja:

$$P\left(\text{ne čaka}\right) = 1 - \left[1 - \left(p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r-1,\infty} \right) \right] = p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r-1,\infty} \tag{5.228}$$

V izrazu (5.228) smo tako dobili verjetnost, da se sistem nahaja v enem od stanj $0, 1, ..., r-1$. V teh stanjih pa vsi strežniki niso zasedeni, zato je logično, da stranki ni potrebno čakati.

Poglejmo si naslednji primer [13]:

Prihodi strank na avtobusni kolodvor z r okenci tvorijo Poissonov proces s pogostostjo prihodov $\frac{6}{\min}$. *Časi prodaje vozovnic so neodvisni in porazdeljeni eksponentno s povprečjem* $\frac{1}{3}\min$. *Odgovorite na naslednja vprašanja:*

a) Kolikšno minimalno število okenc je potrebno, da vrste ne bodo poljubno dolge?

b) Denimo je $r = 4$. *Nova stranka bo čakala na vozovnico, če je število strank pred okenci (v sistemu)* ≤ 5. *Sicer pa odide brez vozovnice,* če je $r + n = 4 + 2 = 6$ *oz. sta v čakalnici že 2 stranki. Odtod sklepamo, da je v čakalnici prostora za največ 2 stranki, saj sicer začnejo stranke odhajati nepostrežene.*

b.1) Kakšna je ravnovesna porazdelitev verjetnosti za dani proces?

b.2) Kakšno je povprečno število strank pred okenci (v sistemu)?

b.3) Kakšna je verjetnost, da stranki ni treba čakati na nakup vozovnice?

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{6}{\min}$$

$$\mu = \frac{1}{E\left(W_S\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}\min} = \frac{3}{\min} \tag{5.229}$$

a) Zadostiti moramo pogoju $\rho < 1$, da se vrsta ne bo nekontrolirano kopičila. Odtod sledi:

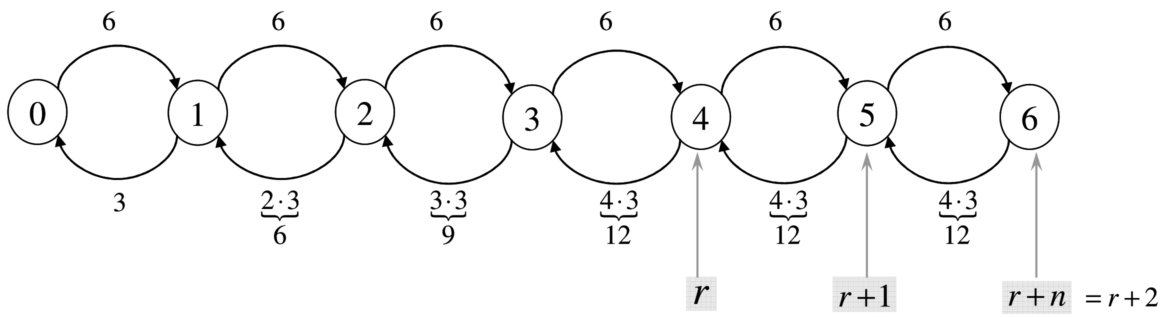
$$\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} = \frac{\frac{6}{\min}}{r \cdot \frac{3}{\min}} = \frac{2}{r} < 1 \qquad (5.230)$$

kar nam da izraz:

$$2 < r \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = 3 \qquad (5.231)$$

Torej, vsaj 3 okenca so potrebna na kolodvoru, da se vrste ne bodo poljubno dolgo kopičile.

b) $r = 4$, Imamo sistem *M/M/4*, model za omejen prostor za čakanje. Na osnovi slike 76 lahko narišemo avtomat za ta primer, ki je ilustriran na sliki 77.



Slika 77: Avtomat za dani primer

Iz slike 77 je razvidno, da so lahko največ 4 stranke strežene hkrati, ter se še največ 2 stranki nahajata v čakalnici (oz. je lahko največ 6 strank v sistemu).

b.1) Ravnovesno porazdelitev verjetnosti za dani proces dobimo, če izračunamo vse verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnih razmerah. V ta namen uporabimo izraz (5.201), to je:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} \cdot p_{0\infty}, & i = 0, \ldots, r \\ \frac{\rho^i \cdot r^r}{r!} \cdot p_{0\infty}, & i = r+1,\ r+2, \ldots,\ r+n \end{cases} \qquad (5.232)$$

Seveda moramo izračunati tudi intenzivnost prometa, kar nam da:

$$\begin{aligned} &\rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu}=\frac{6}{4\cdot 3}=0.5 \;\; oz. \\ &\rho\cdot r=0.5\cdot 4=2 \end{aligned} \tag{5.233}$$

Če izraz (5.233) vstavimoo v izraz (5.232), dobimo:

$$p_{i\,\infty}=\begin{cases} \dfrac{(2)^i}{i!}\cdot p_{0\infty}\;, & i=0,\,1,\,2,\,3,\,4 \\ \dfrac{(0.5)^i\cdot 4^4}{4!}\cdot p_{0\infty}\;, & i=5,\,6 \end{cases} \tag{5.234}$$

V nadaljevanju je potrebno na osnovi izrazov (5.203) oz. (5.204) izračunati tudi verjetnost $p_{0\infty}=\dfrac{1}{S}$. Za vsoto S dobimo:

$$\begin{aligned} S&=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}=\sum_{i=0}^{3}\frac{2^i}{i!}+\frac{2^4}{4!}\cdot\frac{1-0.5^3}{1-0.5}= \\ &=\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{4\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{0.875}{0.5}= \\ &=1+2+2+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{3}\cdot 1.75=5+\frac{4}{3}+1.1\overline{666}=7.5 \end{aligned} \tag{5.235}$$

Torej za verjetnost $p_{0\infty}=\dfrac{1}{S}$ velja:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S}=\frac{1}{7.5}=0.1\overline{33}=\frac{1}{\frac{75}{10}}=\frac{10}{5\cdot 15}=\frac{2}{15}=\frac{6}{45} \tag{5.236}$$

Če izraz (5.236) upoštevamo v izrazu (5.234), dobimo:

$$\begin{aligned} &p_{i\,\infty}=\begin{cases} \dfrac{2^i}{i!}\cdot\dfrac{6}{45}\;, & i=0,\,1,\,2,\,3,\,4 \\ (0.5)^i\cdot\dfrac{4^2\cdot 4^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\dfrac{6}{45}\;, & i=5,\,6 \end{cases} \\ &p_{i\infty}=\begin{cases} \dfrac{2^i}{i!}\cdot\dfrac{6}{45}\;, & i=0,\,1,\,2,\,3,\,4 \\ 0.5^i\cdot\dfrac{2\cdot 4^2}{3}\cdot\dfrac{6}{45}\;, & i=5,\,6 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.237}$$

oziroma:

$$p_{i\infty} = \begin{cases} \dfrac{2^i}{i!} \cdot \dfrac{6}{45}, & i = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0.5^i \cdot \dfrac{32}{3} \cdot \dfrac{6}{45}, & i = 5, 6 \end{cases} \tag{5.238}$$

Najprej izračunajmo verjetnosti $p_{1\infty}, p_{2\infty}, p_{3\infty}, p_{4\infty}$:

$$\begin{aligned} p_{1\infty} &= \frac{2^1}{1!} \cdot \frac{6}{45} = \frac{12}{45} \quad , \qquad p_{2\infty} = \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{6}{45} = \frac{12}{45} \quad , \\ p_{3\infty} &= \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{6}{45} = \frac{8}{45} \quad , \qquad p_{4\infty} = \frac{2^4}{4!} \cdot \frac{6}{45} = \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{6}{45} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{45} = \frac{4}{45} \end{aligned} \tag{5.239}$$

Nato izračunajmo še verjetnosti $p_{5\infty}, p_{6\infty}$:

$$\begin{aligned} p_{5\infty} &= 0.5^5 \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{6}{45} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{2^5}{3} \cdot \frac{6}{45} = \frac{2}{45} \\ p_{6\infty} &= 0.5^6 \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{6}{45} = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{2^5}{3} \cdot \frac{6}{45} = \frac{1}{45} \end{aligned} \tag{5.240}$$

Ravnovesna porazdelitev vseh verjetnosti v stacionarnem stanju je torej sledeča:

$$p_{i\,\infty},\ i = 0, \ldots, 6 = \underbrace{\left\{ \frac{6}{45}, \frac{12}{45}, \frac{12}{45}, \frac{8}{45}, \frac{4}{45}, \frac{2}{45}, \frac{1}{45} \right\}}_{\Sigma\ =\ 1} \tag{5.241}$$

b.2) Povprečno število strank v sistemu lahko izračunamo na dva načina. Pri prvem načinu uporabimo izraz (5.218) in dobimo:

$$\begin{aligned} E(N) = L &= \sum_{i=0}^{r+n} i \cdot p_{i\,\infty} = \sum_{i=0}^{4+2} i \cdot p_{i\,\infty} = \\ &= 0 \cdot p_{0\infty} + 1 \cdot p_{1\infty} + 2 \cdot p_{2\infty} + 3 \cdot p_{3\infty} + 4 \cdot p_{4\infty} + 5 \cdot p_{5\infty} + 6 \cdot p_{6\infty} \\ &= 1 \cdot \frac{12}{45} + 2 \cdot \frac{12}{45} + 3 \cdot \frac{8}{45} + 4 \cdot \frac{4}{45} + 5 \cdot \frac{2}{45} + 6 \cdot \frac{1}{45} = \frac{92}{45} \end{aligned} \tag{5.242}$$

Torej velja:

$$E(N) = 2.0\overline{44} \sim 2 \tag{5.243}$$

Povprečno število strank v sistemu je torej cca. 2.

Pri drugem načinu najprej na osnovi izraza (5.214) izračunamo povprečno število strank v vrsti:

$$
\begin{aligned}
L_q &= E\left(N_q\right) = \frac{(\rho \cdot r)^r \cdot p_{0\infty} \cdot \rho}{r! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \left[1-\rho^n \cdot (1+n) + \rho^{n+1} \cdot n\right] = \\
&= \frac{(2)^4 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{1}{2}}{4! \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1+2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2+1} \cdot 2\right] = \\
&= \frac{2^3 \cdot \frac{6}{45}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2^2}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{2^3}\right) \cdot 2\right] = \frac{2^3 \cdot \frac{6}{45}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left[1-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right] = \\
&= \frac{8}{45} \cdot \left[\frac{2}{4}\right] = \frac{4}{45} = 0.0888
\end{aligned}
\tag{5.244}
$$

Nato na osnovi izraza za ρ' v izrazu (5.216) dobimo:

$$
\rho' = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{\lambda \cdot \left(1-p_{n+r,\infty}\right)}{\mu} = \rho \cdot r \cdot \left(1-p_{n+r,\infty}\right) = 2 \cdot \left(1-p_{6,\infty}\right) = 2 \cdot \left(1-\frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45} \tag{5.245}
$$

Na osnovi izraza (5.216) nato lahko izračunamo povprečno število strank v sistemu:

$$
L = L_q + \rho' = \frac{4}{45} + \frac{88}{45} = \frac{92}{45} \tag{5.246}
$$

Očitno dobimo enak rezultat, kot smo ga dobili pri prvem načinu v izrazu (5.242).

b.3) Izračunajmo še verjetnost, da stranki ni potrebno čakati na nakup vozovnice. V ta namen si pomagamo z izrazom (5.228) in dobimo:

$$
\begin{aligned}
P(\text{ne čaka}) &= p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{r-1,\infty} = p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + p_{3\infty} = \\
&= \frac{6}{45} + \frac{12}{45} + \frac{12}{45} + \frac{8}{45} = \frac{38}{45} = 0.8\overline{44}
\end{aligned}
\tag{5.247}
$$

Torej je verjetnost, da stranki ni potrebno čakati na nakup vozovnice, enaka cca. 84.4 %.

5.9 Sistem M/M/r (prostor za čakanje ni dovoljen)

Če bi postavili pri *M/M/r* sistemu z omejenim prostorom za čakanje število strank v čakalnici na $n=0$, potem prostor za čakanje sploh ni dovoljen, tvorba vrst pa sploh ni možna [12]. V tem primeru so stranke, ki pridejo takrat, ko so vsa strežna mesta že zasedena, za sistem avtomatično izgubljene. V praksi predstavljajo takšne sisteme telefonski pozivi po *r* linijah. To pomeni, da so pozivi, ki pridejo, ko so vse linije že zasedene, izgubljeni oz. se ne registrirajo.

Vsota *S* v izrazu (5.206) pri $n=0$ dobi naslednjo obliko:

$$S=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot\frac{1-\rho^{0+1}}{1-\rho}=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}+\frac{(\rho\cdot r)^r}{r!}\cdot 1=\sum_{i=0}^{r}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!} \tag{5.248}$$

Za verjetnost $p_{0\infty}=\dfrac{1}{S}$ v izrazu (5.206) potem sledi:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S}=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{r}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}}\ ,\qquad \text{kjer}\ \ \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \tag{5.249}$$

Če to upoštevamo v izrazu (5.201) za verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnih razmerah, dobimo naslednji izraz:

$$p_{i\,\infty}=\begin{cases}\dfrac{(\rho\cdot r)^i}{i!}\cdot p_{0\infty}\ , & i=0,1,\ldots,r\\ 0\ , & i>r\ \ \}\ \text{ker ni dovoljen prostor za čakanje}\end{cases} \tag{5.250}$$

kar vodi do izraza:

$$p_{i\,\infty}=\frac{\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{r}\frac{(\rho\cdot r)^i}{i!}}\ ,\qquad i=0,1,\ldots,r\quad \text{in}\quad \rho=\frac{\lambda}{r\cdot\mu} \tag{5.251}$$

V primeru telefonskih klicev verjetnosti v izrazu (5.251) predstavljajo verjetnosti, da je *i* telefonskih linij zasedenih. Gre za takoimenovano ***Erlangovo Loss B formulo za izgube***.

Poglejmo si naslednji primer:

Telefonski pozivi naročnikov tvorijo Poissonov proces s pogostostjo 0.82 na minuto. Časi pogovorov so porazdeljeni eksponentno s povprečjem 2.8 minute. Kolikšno naj bo minimalno število telefonskih linij, da verjetnost, da se telefonska zveza ne vzpostavi, ne bo presegla 20 %?

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{0.82}{\min}$$
$$E(W_S) = 2.8\min \tag{5.252}$$
$$\mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{2.8\min} = \frac{0.357}{\min}$$

Telefonska linija se ne bo vspostavila, če je že zasedenih točno vseh r linij. Verjetnost, da je že zasedenih natanko vseh r linij, je enaka $p_{r\infty}$. Ta verjetnost ne sme presegati 20%, kar pomeni:

$$p_{r\infty} \le 0.2 \tag{5.253}$$

Na osnovi izraza (5.251) lahko ta pogoj zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$p_{r\infty} = \frac{\dfrac{(\rho \cdot r)^r}{r!}}{\sum\limits_{i=0}^{r} \dfrac{(\rho \cdot r)^i}{i!}} \le 0.2 \tag{5.254}$$

V nadaljevanju izračunajmo še izraz $\rho \cdot r$:

$$\rho \cdot r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.82}{0.357} = 2.296 \sim 2.3 \tag{5.255}$$

Če vstavimo izraz (5.255) v izraz (5.254), dobimo:

$$p_{r\infty} = \frac{\dfrac{(2.3)^r}{r!}}{\sum\limits_{i=0}^{r} \dfrac{(2.3)^i}{i!}} \le 0.2 \tag{5.256}$$

Ugotoviti moramo takšno minimalno število linij *r*, da bo zadoščeno pogoju (5.256). To lahko storimo s poskušanjem. Denimo vzamemo $r=3$, pri čemer izraz (5.256) preide v obliko:

$$p_{3\infty}=p_{r\infty}=\frac{\frac{2.3^3}{3!}}{\sum_{i=0}^{3}\frac{2.3^i}{i!}}=\frac{\frac{2.3^3}{3!}}{1+\frac{2.3^1}{1!}+\frac{2.3^2}{2!}+\frac{2.3^3}{3!}}=\frac{\frac{2.3^3}{3!}}{7.972}=\underbrace{0.2543>0.2}_{\text{TOREJ POGOJ NI IZPOLNJEN}} \tag{5.257}$$

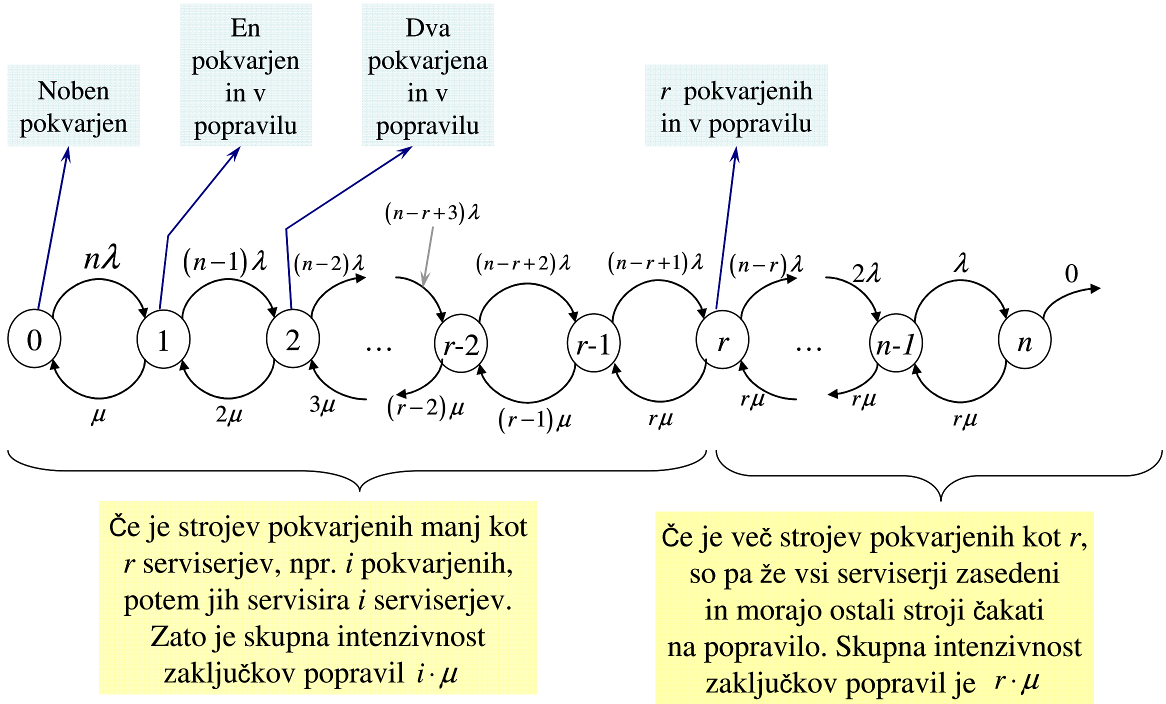
Ker pogoj (5.256) pri $r=3$ očitno ni izpolnjen, moramo poiskati nek drug, bolj ustrezen *r*. Denimo sedaj vzamemo $r=4$, pri čemer izraz (5.256) preide v obliko:

$$\begin{aligned} p_{4\infty}=p_{r\infty}&=\frac{\frac{2.3^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4}\frac{2.3^i}{i!}}=\frac{\frac{2.3^4}{4!}}{\underbrace{1+2.3+\frac{2.3^2}{2!}+\frac{2.3^3}{3!}}_{7.972}+\frac{2.3^4}{4!}}=\frac{1.166}{7.972+1.166}= \\ &=\frac{1.166}{9.1380}=\underbrace{0.1275<0.2}_{\text{POGOJ JE TOKRAT IZPOLNJEN}} \end{aligned} \tag{5.258}$$

Očitno je pogoj (5.256) pri izbranem $r=4$ tokrat izpolnjen. Torej so potrebne najmanj 4 telefonske linije, če želimo zagotoviti, da verjetnost, da se telefonska zveza ne vzpostavi, ne preseže 20 %.

5.10 Sistem M/M/r (končno število strank)

Že pri *M/M/1* sistemu s končnim številom strank smo ugotovili, da predstavlja tipičen primer strežbe končnega števila strank npr. popravljanje istovrstnih strojev. Denimo imamo *n* strojev in *r* vzdrževalcev, ki sproti popravljajo stroje in ne izgubijo nič časa s hojo od stroja do stroja [11,12]. Pogostost odpovedi posameznih strojev je λ, pogostost zaključkov popravil pa naj bo μ in enaka za vse vzdrževalce. V danem primeru ima avtomat izgled, kot je prikazan na sliki 78.



Slika 78: Sistem *M/M/r* s končnim številom strank (primer popravljanja strojev)

Stanja večja od r si lahko interpretiramo na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
&\text{stanje } r+1 \;\Rightarrow\; r+1 \text{ pokvarjenih, } r \text{ jih je v popravilu, eden čaka}\\
&\text{stanje } r+2 \;\Rightarrow\; r+2 \text{ pokvarjenih, } r \text{ jih je v popravilu, dva čakata}\\
&\dots\\
&\text{stanje } n-1 \;\Rightarrow\; n-1 \text{ pokvarjenih, } r \text{ jih je v popravilu,}\\
&\qquad\qquad\qquad n-1-r \text{ jih čaka na popravilo}\\
&\text{stanje } n \;\Rightarrow\; n \text{ pokvarjenih, } r \text{ jih je v popravilu,}\\
&\qquad\qquad\qquad n-r \text{ jih čaka na popravilo}
\end{aligned}
\tag{5.259}
$$

Tudi tukaj podobno kot pri *M/M/1* sistemu s končnim številom strank velja, da so pri določenem številu že pokvarjenih strojev dogodki, ko bi prišlo do nove okvare, bolj redki. Torej je pogostost odpovedi preostalih nepokvarjenih strojev gotovo manjša kot v primeru vseh nepokvarjenih strojev. Zato sklepamo, da očitno intenzivnost dogodkov novih okvar pada s številom že pokvarjenih strojev.

Model za dani proces je rojstno smrtni proces, kjer za intenzivnost novih okvar in pogostost zaključenih popravil lahko zapišemo naslednji izraz:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda \cdot (n-i) \ , & 0 \le i < n \\ 0 \ , & i \ge n \end{cases}$$
$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu \ , & 1 \le i < r \\ r \cdot \mu \ , & i \ge r \end{cases} \tag{5.260}$$

S pomočjo slike 78 lahko tvorimo verjetnosti za zasedbo posameznih stanj v stacionarnem stanju. Tako za stanja manjša ali enaka r veljajo naslednji izrazi:

$$\begin{aligned} &\mu \cdot p_{1\infty} = \mathrm{n} \cdot \lambda \cdot p_{0\infty} \\ &2 \cdot \mu \cdot p_{2\infty} = (n-1) \cdot \lambda \cdot p_{1\infty} \\ &3 \cdot \mu \cdot p_{3\infty} = (n-2) \cdot \lambda \cdot p_{2\infty} \\ &\ldots \\ &i \cdot \mu \cdot p_{i\infty} = (n-(i-1)) \cdot \lambda \cdot p_{i-1\infty} \\ &\ldots \\ &r \cdot \mu \cdot p_{r\infty} = (n-(r-1)) \cdot \lambda \cdot p_{r-1\infty} \end{aligned} \tag{5.261}$$

oziroma:

$$p_{1\infty} = n \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot p_{0\infty}$$

$$p_{2\infty} = (n-1) \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot p_{1\infty} = (n-1) \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot n \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{0\infty} = \frac{(n-1) \cdot n}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_{0\infty}$$

$$p_{3\infty} = (n-2) \cdot \frac{\lambda}{3\mu} \cdot p_{2\infty} = \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot p_{0\infty}$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned} p_{i\,\infty} &= \frac{(n-i+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i}_{i!}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot p_{0\infty} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot p_{0\infty} = \\ &= \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot p_{0\infty} \end{aligned} \tag{5.262}$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned} p_{r\,\infty} &= \frac{\overbrace{(n-r+1)}^{(n-(r-1))} \cdot (n-(r-2)) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}_{r!}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r \cdot p_{0\infty} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r \cdot p_{0\infty} = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r \cdot p_{0\infty} \end{aligned}$$

Če zopet vpeljemo intenzivnost prometa $\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \rho \cdot r$, potem za stanja manjša ali enaka r dobimo naslednji splošni člen za verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnih razmerah:

$$p_{i\,\infty} = \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i \cdot p_{0\infty} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \cdot (\rho \cdot r)^i \cdot p_{0\infty} \quad , \qquad i = 0, 1, \ldots, r \tag{5.263}$$

Podobno, kot smo speljali izraz (5.263) za stanja $\le r$, se da izpeljati tudi verjetnosti za zasedbo stanj pri stanjih, večjih od r. Pokazati se da, da po nekoliko bolj zapleteni izpeljavi dobimo naslednji izraz [11,12]:

$$p_{i\,\infty} = \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i \cdot p_{0\infty}}{r! \cdot (n-i)!} \quad , \qquad i = r,\; r+1, \ldots, n \tag{5.264}$$

Če oba izraza (5.263) in (5.264) združimo v enoten izraz, torej dobimo naslednji izraz za zasedbo stanj v stacionarnih razmerah:

$$p_{i\,\infty} = \begin{cases} \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i \cdot p_{0\infty} \quad , & i = 0, 1, \ldots, r \\ \dfrac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i \cdot p_{0\infty}}{r! \cdot (n-i)!} \quad , & i = r,\; r+1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.265}$$

V nadaljevanju izpeljimo verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah $p_{0\infty}$. V ta namen tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} & p_{0\infty} + p_{1\infty} + \ldots + p_{r\,\infty} + p_{r+1,\infty} + \ldots + p_{n\,\infty} = 1 \\ & \binom{n}{0} \cdot p_{0\infty} + \binom{n}{1} \cdot (\rho \cdot r)^1 \cdot p_{0\infty} + \ldots + \binom{n}{r-1} \cdot (\rho \cdot r)^{r-1} \cdot p_{0\,\infty} + \\ & + \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^r}{r! \cdot (n-r)!} \cdot p_{0\infty} + \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^{r+1}}{r! \cdot (n-(r+1))!} \cdot p_{0\infty} + \ldots + \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^n}{r! \cdot (n-n)!} \cdot p_{0\infty} = 1 \\ & p_{0\infty} \cdot \left[\sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i + \sum_{i=r}^{n} \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i}{r! \cdot (n-i)!} \right] = 1 \\ & \qquad p_{0\infty} = \frac{1}{S} = \frac{1}{\underbrace{\sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i + \sum_{i=r}^{n} \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i}{r! \cdot (n-i)!}}_{S}} \end{aligned} \tag{5.266}$$

Povprečno število strank v sistemu (npr. stroji, ki so že v popravilu, ter stroji, ki čakajo na popravilo) izračunamo s pomočjo naslednjega izraza [12]:

$$
\begin{aligned}
L = E(N) &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot p_{i\infty} = \sum_{i=0}^{r-1} i \cdot \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i \cdot p_{0\infty} + \sum_{i=r}^{n} i \cdot \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i}{r! \cdot (n-i)!} \cdot p_{0\infty} = \\
&= p_{0\infty} \cdot \left[\sum_{i=0}^{r-1} i \cdot \binom{n}{i} \cdot (\rho \cdot r)^i + \frac{r^r \cdot n!}{r!} \cdot \sum_{i=r}^{n} i \cdot \frac{\rho^i}{(n-i)!} \right]
\end{aligned}
\tag{5.267}
$$

Povprečno število strank, ki čakajo v vrsti (npr. strojev, ki čakajo na popravilo), pa izračunamo s pomočjo izraza [12]:

$$
\begin{aligned}
E(N_q) = L_q &= \sum_{i=r}^{n} (i-r) \cdot p_{i\infty} = \sum_{i=r}^{n} (i-r) \cdot \frac{r^r \cdot n! \cdot \rho^i}{r! \cdot (n-i)!} \cdot p_{0\infty} = \\
&= p_{0\infty} \cdot \frac{r^r \cdot n!}{r!} \cdot \sum_{i=r}^{n} (i-r) \cdot \frac{\rho^i}{(n-i)!}
\end{aligned}
\tag{5.268}
$$

Kot se izkaže, bi bilo nadaljnje analitično poenostavljanje veličin $E(N), E(N_q)$ dokaj zahtevno. To velja tudi za izračun ostalih statističnih karakteristik. Podrobnosti o tovrstnih izpeljavah si lahko bralec pogleda v literaturi [4,12,31].

Poglejmo si naslednji primer [12]:

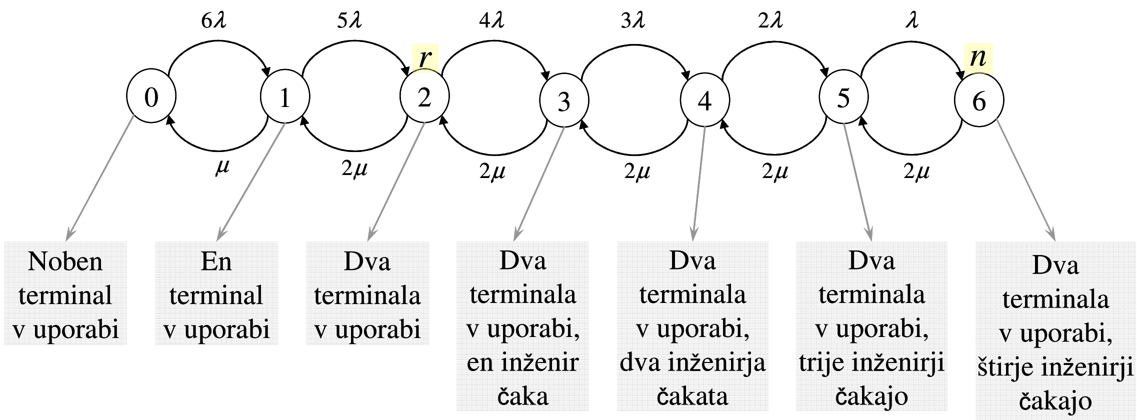
Skupina 6 inženirjev uporablja za svoje izračune 2 terminala. Časi izračunov so porazdeljeni eksponentno in trajajo v povprečju 20 min. Vsak inženir potrebuje terminal v povprečju dvakrat na uro, pri čemer so časi med dvema zaporednima uporabama terminala porazdeljeni eksponentno. Kolikšno je povprečno število inženirjev, ki morajo čakati na uporabo terminala?

Očitno imamo opravka z modelom sistema *M/M/2* za končno število strank. Seveda v tem primeru stranke niso stroji, ki so v popravilu oz. čakajo na popravilo, pač pa inženirji, ki uporabljajo terminal oz. čakajo na uporabo terminala.

Zapišimo najprej podatke:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \frac{2}{\mathrm{h}} \\
&E(W_S) = 20\,\mathrm{min} \\
&\mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{20\,\mathrm{min}} = \frac{1}{20 \cdot \frac{1}{60}\,\mathrm{h}} = \frac{3}{\mathrm{h}} \qquad (5.269) \\
&r = 2 \\
&n = 6
\end{aligned}
$$

Avtomat iz slike 78 ima tokrat obliko, kot jo prikazuje slika 79.



Slika 79: Sistem *M/M/2* s končnim številom 6 strank (inženirjev)

Izračunajmo nato intenzivnost prometa ter produkt $\rho \cdot r$:

$$\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \rho \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \qquad (5.270)$$

Vsota S iz izraza (5.266) preide v naslednjo obliko:

$$S=\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\cdot(\rho\cdot r)^{i}+\sum_{i=r}^{n}\frac{r^{r}\cdot n!\cdot\rho^{i}}{r!\cdot(n-i)!}=\sum_{i=0}^{1}\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i}+\sum_{i=2}^{6}\frac{2^{2}\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i}}{2!\cdot(6-i)!}=$$

$$=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{0}+\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{(6-2)!}+\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{(6-3)!}+\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4}}{(6-4)!}+ \tag{5.271}$$

$$+\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}}{(6-5)!}+\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6}}{(6-6)!}$$

kar da naslednji rezultat:

$$S=1+6\cdot\frac{2}{3}+2\cdot 6!\cdot\left[\frac{1}{3^{2}\cdot 4!}+\frac{1}{3^{3}\cdot 3!}+\frac{1}{3^{4}\cdot 2!}+\frac{1}{3^{5}\cdot 1!}+\frac{1}{3^{6}\cdot 0!}\right]=$$

$$=5+2\cdot 6!\cdot\frac{1}{9}\cdot\left[\frac{1}{4!}+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{3^{2}\cdot 2}+\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{3^{4}}\right]=$$

$$=5+160\cdot\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right]= \tag{5.272}$$

$$=5+160\cdot\left[\frac{1}{24}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right]=$$

$$=5+160\cdot[0.2021]=37.345$$

Verjetnost, da noben terminal ni v uporabi, je enaka verjetnosti za zasedbo 0.tega stanja. Ta je na osnovi izrazov (5.266) in (5.272) enaka:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S}=0.0267 \tag{5.273}$$

Povprečno število inženirjev, ki morajo čakati na uporabo terminala, dobimo na osnovi izraza (5.268):

$$
\begin{aligned}
E\left(N_q\right) = L_q &= \sum_{i=r}^{n}(i-r)\cdot p_{i\infty} = \sum_{i=r}^{n}(i-r)\cdot\frac{r^r\cdot n!\cdot\rho^i}{r!\cdot(n-i)!}\cdot p_{0\infty} = \\
&= \sum_{i=2}^{6}(i-2)\cdot\frac{2^2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i}{2!\cdot(6-i)!}\cdot 0.0267
\end{aligned}
\tag{5.274}
$$

kar nam da naslednji rezultat:

$$
\begin{aligned}
&E\left(N_q\right) = \\
&= 0.0267\cdot\left[0+1\cdot\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}{(6-3)!}+2\cdot\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4}{(6-4)!}+3\cdot\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5}{(6-5)!}+4\cdot\frac{2\cdot 6!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6}{(6-6)!}\right] = \\
&= 0.0267\cdot 2\cdot 6!\cdot\left[\frac{1}{3^3\cdot 3!}+\frac{2}{3^4\cdot 2!}+\frac{3}{3^5\cdot 1!}+\frac{4}{3^6\cdot 0!}\right] = \\
&= \frac{0.0267\cdot 2\cdot 6!}{3^3}\cdot\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}\right] = \frac{0.0267\cdot 2\cdot 6!}{3^3}\cdot\left[\frac{5}{6}+\frac{4}{27}\right] = 1.3976
\end{aligned}
\tag{5.275}
$$

Torej je povprečno število inženirjev, ki morajo čakati na uporabo prostega terminala, enako 1.3976 inženirja.

5.11 Sklep o sistemih množične strežbe

V tem delu smo predstavili le nekatere najosnovnejše sisteme množične strežbe, kako razvijemo njihove analitične modele, ter kako slednje lahko koristno uporabimo. Seveda obstaja še vrsta sistemov, ki jih tukaj nismo predstavili. Tako npr. nismo predstavili sistema za disciplino ***"Vnaprej določene prioritete"***, ki obravnava primere, ko se ob prihodu stranke z višjo prioriteto strežba trenutno strežene stranke bodisi prekine, ali pa se ne prekine [12]. Prav tako npr. nismo obravnavali tudi sistemov ***M/G/1***, ki jih je potrebno uporabiti za primere tistih enokanalnih sistemov, kjer je Poissonov proces sicer dobra aproksimacija za proces prihajanja strank v sistem, medtem ko pa predpostavka o eksponentni porazdelitvi časov strežbe ni več upravičena. V takšnih primerih je namreč lahko porazdelitev časov strežbe veliko bolj splošne narave kot pa eksponentna porazdelitev [12].

V tem delu tudi nismo obravnavali ***simulacije*** sistemov množične strežbe. Metoda simulacije je še posebej uporabna v primerih, ko je sistem strežbe tako zapleten, da je analitične rešitve za model silno težko ali celo nemogoče najti. V takšnih primerih daje simulacija odgovore na zastavljena vprašanja v krajšem času, kot bi ga pa porabili za razvoj analitičnih modelov. Kot se tudi izkaže, dobimo s simulacijo takšne modele, ki dokaj dobro opisujejo realne sisteme. Podrobnosti o simulaciji sistemov množične strežbe, pa tudi o analitičnem razvoju modelov za različne bolj komplicirane tovrstne sisteme, si lahko bralec pogleda v ustrezni literaturi [3,4,9,11,12,31].

Na tem mestu smo končali z obravnavo najosnovnejših elementov teorije verjetnosti in stohastičnih procesov, ki so potrebni za elementarno razumevanje problematike predmeta Stohastični procesi v logistiki. V nadaljevanju pa si bomo pogledali še zbirko nekaterih rešenih nalog, ki bo podkrepila razumevanje obravnavane snovi.

Zbirka bo zajeta v naslednjih dveh poglavjih:

- **6 ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ TEORIJE VERJETNOSTI IN MARKOVSKIH VERIG**, ter
- **7 ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ STOHASTIČNIH PROCESOV IN MNOŽIČNE STREŽBE**.

Poudarimo še, da bodo zaradi večje preglednosti slike v nadaljevanju v obeh zbirkah numerirane nekoliko drugače, kot v dosedanji teoretični obravnavi. Namreč, njihovo numeriranje bo vsebovalo tudi številko poglavja, ne pa le zaporedne številke slike. Prepričani smo, da to bralca ne bo zmedlo, pač pa mu bo v večjo pomoč pri razumevanju snovi.

6 ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ TEORIJE VERJETNOSTI IN MARKOVSKIH VERIG

Zbirka rešenih nalog iz teorije verjetnosti in markovskih verig obsega naslednje primere:

- primeri iz kombinatorike,
- primeri iz verjetnostnega računa,
- primeri iz teorije verjetnosti,
- primeri iz metode največjega verjetja, ter
- primeri iz markovskih verig.

Teoretične osnove, ki se tičejo posameznih primerov, so bile razložene v prejšnjih poglavjih tega dela. V nadaljevanju pa si najprej poglejmo nekaj primerov iz kombinatorike.

6.1 Primeri iz kombinatorike

Primere, ki jih bomo reševali, lahko razdelimo na štiri kategorije:

- primeri, ki jih rešujemo s tako imenovanim osnovnim izrekom kombinatorike,
- primeri iz permutacij,
- primeri iz variacij, ter
- primeri iz kombinacij.

6.1.1 Primeri, ki jih rešujemo z osnovnim izrekom kombinatorike

Primer 1:

Želimo izvesti dve določeni operaciji v zaporedju, kjer je:

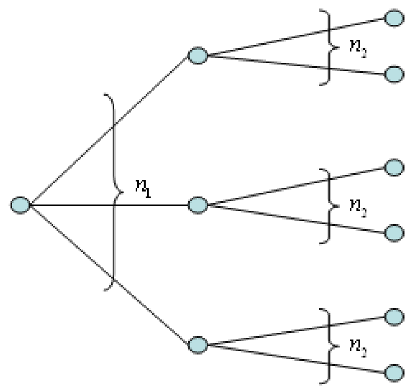
$n_1 =$ št. načinov, na katere je lahko 1. operacija izvedena, ter

$n_2 =$ št. načinov, na katere je lahko 2. operacija izvedena, ko je 1. operacija izvršena.

Opravka imamo z osnovnim izrekom kombinatorike, tako da na osnovi izraza (2.1) velja:

$$N = n_1 \cdot n_2 \tag{6.1}$$

Torej produkt $(n_1 \cdot n_2)$ predstavlja število načinov, na katere sta lahko obe operaciji izvedeni v zaporedju (glej tudi sliko 6.1).



Slika 6.1: Primer dveh operacij v zaporedju

<u>Primer 2:</u>

Imamo komisijo z 10 ljudmi. V tej komisiji najprej izberemo predsednika in nato podpredsednika. Na koliko načinov lahko to naredimo?

Najprej zapišimo podatke:

$n_1 =$ število načinov, na katere je lahko predsednik izvoljen ($n_1 = 10$)

$n_2 =$ število načinov, na katere je lahko podpredsednik izvoljen, ko je predsednik že izbran ($n_2 = 9$)

Ker imamo ponovno opravka z osnovnim izrekom kombinatorike, tudi pri tem primeru na osnovi izraza (2.1) velja:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 10 \cdot 9 = 90 \tag{6.2}$$

Odtod sledi, da lahko na 90 različnih načinov izberemo najprej predsednika in nato podpredsednika.

6.1.2 Primeri iz permutacij

Primer 1:

Recimo, da želimo izvesti k operacij v zaporedju, kjer je:

$n_1 =$ število načinov, za prvo operacijo,

$n_2 =$ število načinov, za 2. operacijo, ko je 1. operacija izvršena,

$n_3 =$ število načinov, za 3. operacijo, ko sta 1. in 2. operacija izvršeni,

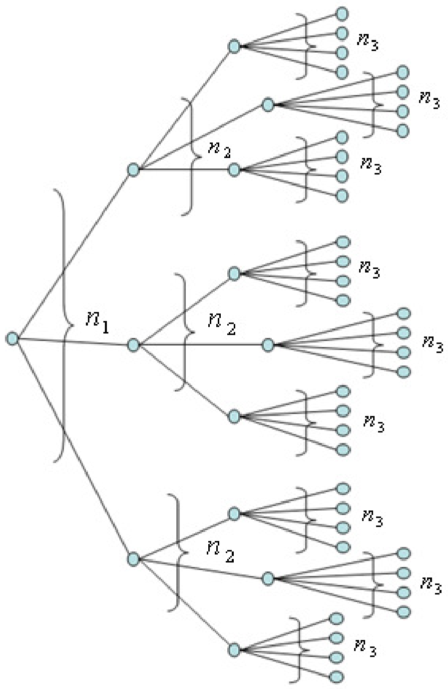
…

$n_i =$ število načinov, za *i*-to operacijo, ko je *i*-1 operacij izvršenih (i = 1, 2, … , k)

Za število načinov, da je k operacij izvršenih v zaporedju, na osnovi izraza (2.1) sledi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k \tag{6.3}$$

Torej produkt $\left(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k\right)$ predstavlja število načinov, na katere je lahko k operacij izvedenih v zaporedju. Na sliki 6.2 so shematično prikazane prve tri operacije, izvedene v zaporedju.



Slika 6.2: Primer treh operacij v zaporedju

Zanima nas še, na koliko različnih načinov lahko razporedimo danih *k* operacij v različnem vrstnem redu. Na začetku postopka lahko rečemo, da je $n_1 = n$, saj imamo na razpolago še vseh *n* možnih operacij. Ko pa razvrstimo prvo operacijo, nam ostane še *n*-1 operacij, ki jih je potrebno razporediti. Ko torej razporedimo drugo operacijo, nam tako ostane še *n*-2 operacij itn, dokler nam ne ostane še samo ena operacija, ki jo je potrebno razvrstiti. Velja torej:

$$\begin{aligned} n_1 &= n \\ n_2 &= n-1 \\ n_3 &= n-2 \\ &\ldots \\ n_k &= n-k+1 \\ &\ldots \\ n_n &= n-n+1=1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Če sedaj na osnovi izraza (2.4) zapišemo še skupno število vseh možnih permutacij, dobimo:

$$P_n = \underbrace{n}_{n_1} \cdot \underbrace{(n-1)}_{n_2} \cdot \underbrace{(n-2)}_{n_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(n-k+1)}_{n_k} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(n-n+1)}_{n_n=1} = n! \tag{6.5}$$

Torej je skupno število vseh možnih permutacij za *k* operacij (k=1,2,…n), enako *n*!, kar pomeni, da lahko na toliko načinov izbereš n objektov.

<u>Primer 2:</u>

Zanima nas, na koliko načinov lahko izberemo 4 objekte {A, B, C, D}?

Objekte lahko razporejamo na več različnih načinov. Npr. {ABCD}, {ABDC},…, {DCBA}. Podobno kot v prejšnjem primeru, je na začetku postopka $n_1 = n = 4$, saj imamo na razpolago še vse 4 možne objekte. Ko pa razvrstimo prvi objekt, nam ostanejo še trije objekti, ki jih je potrebno razporediti. Ko torej razporedimo drugi objekt, nam tako ostaneta dva, po razporeditvi tretjega pa nam ostane še samo en objekt, ki ga je potrebno razporediti. Opisano razmišljanje zapišemo takole:

$$\begin{aligned} n_1 &= n = 4 \\ n_2 &= n-1 = 3 \\ n_3 &= n-2 = 2 \\ n_4 &= n-3 = 1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Na osnovi izraza (2.4) zapišemo še skupno število vseh možnih permutacij:

$$P_n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4! \tag{6.7}$$

Torej je skupno število vseh možnih permutacij za dane 4 objekte enako 4!.

<u>Primer 3:</u>

Zanima nas, koliko je ponovljenih permutacij črk pri besedi DADDY?

Za razliko od prej imamo tokrat opravka s permutacijami s ponavljanjem. Ker imamo v besedi DADDY opravka s petimi črkami, kjer se ena črka, to je črka D, ponovi trikrat, očitno na osnovi izraza (2.9) sledi:

$$P_n^k = P_5^3 = \frac{\overbrace{5!}^{\text{VSEH ČRK}}}{\underbrace{3!}_{\text{D-ji}}} = 4 \cdot 5 = 20 \tag{6.8}$$

Torej imamo pri besedi DADDY opravka z 20 ponovljenimi permutacijami črk.

6.1.3 Primeri iz variacij

<u>Primer 1:</u>

Na koliko načinov lahko izberemo k objektov izmed n objektov v določenem zaporedju?

Objekte lahko izbiramo na več različnih načinov. Tako kot pri permutacijah brez ponavljanja lahko tudi pri variacijah brez ponavljanja na začetku postopka rečemo, da je $n_1 = n$, saj imamo na razpolago še vseh n možnih objektov. Ko pa izberemo 1. objekt, nam ostane za izbiro še n-1 objektov. Ko torej izberemo 2. objekt, nam tako ostane še n-2 objektov itn, dokler nam ne ostane še samo en objekt. Opisan postopek lahko zapišemo z naslednjim izrazom:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = n && \text{(izbira 1. objekta v zaporedju)} \\
&n_2 = n-1 && \text{(izbira 2. objekta v zaporedju)} \\
&\dots && \\
&n_k = n-k+1 && \text{(izbira objekta } k \text{ v zaporedju)}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Na osnovi izraza (2.12) zapišimo še skupno število vseh možnih variacij:

$$V_n^k = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{6.10}$$

Torej je skupno število vseh možnih variacij za izbranih k objektov enako $\frac{n!}{(n-k)!}$, kar lahko tudi zapišemo z naslednjim izrazom:

$${}_nV_k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \tag{6.11}$$

<u>*Primer 2:*</u>

Koliko permutacij velikosti 3 je lahko najdenih v skupini 5 objektov {A, B, C, D, E}?

Podobno kot v prejšnjem primeru, imamo tudi tukaj opravka z izbiro treh objektov v skupini petih. Objekte lahko izbiramo na več različnih načinov. Npr. {ABC}, {ABD},…, {EDC}. Če upoštevamo izraz (2.12), dobimo naslednje:

$${}_5V_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \tag{6.12}$$

Sledi, da lahko izberemo 3 objekte iz skupine petih na 60 različnih načinov.

Primer 3:

Imamo komisijo 10 ljudi. Na koliko načinov lahko izberemo predsednika, podpredsednika in blagajnika?

Podobno kot v prejšnjem primeru, imamo tudi tukaj opravka z izborom treh ljudi v komisiji desetih. Če ponovno upoštevamo izraz (2.12), dobimo naslednje:

$$_{10}V_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \tag{6.13}$$

Torej lahko predsednika, podpredsednika in blagajnika izberemo na 720 različnih načinov.

6.1.4 Primeri iz kombinacij

Primer 1:

Na koliko načinov lahko izberemo 3 objekte izmed {A, B, C, D, E}, kjer vrstni red ni pomemben?

Ker gre za kombinacije brez ponavljanja, na osnovi izraza (2.16) dobimo:

$$_5K_3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \tag{6.14}$$

Če vrstni red ni pomemben, lahko 3 objekte izmed množice petih izberemo na 10 načinov, ki so postavljeni takole: {ABC}, {ABD}, {ABE}, {ACD}, {ACE}, {ADE}, {BCD}, {BCE}, {BDE} in {CDE}.

Primer 2:

Med 100 izdelki iste serije je 10 slabih. Iz serije naenkrat izberemo vzorec po 5 izdelkov. Koliko je možnih vzorcev, v katerih:

a) ni nobenega slabega izdelka;

b) je natanko en slab izdelek?

Tudi v tem primeru gre za kombinacije brez ponavljanja, torej na osnovi izraza (2.16) sledi:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad K_{90}^{5} = \overbrace{\binom{90}{5}}^{\substack{\text{Od 90 dobrih}\\ \text{smo jih}\\ \text{potegnili 5 dobrih}}} = 43\,949\,268 \\
&\text{b)}\quad K_{100}^{1} = \overbrace{\binom{90}{4}}^{\substack{\text{Od 90 dobrih}\\ \text{smo potegnili}\\ \text{4 dobre}}} \cdot \overbrace{\binom{10}{1}}^{\substack{\text{Od 10 slabih}\\ \text{smo potegnili}\\ \text{enega slabega}}} = 25\,551\,900
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Sledi, da je možnih 43 949 268 kombinacij vzorcev, med katerimi ni niti enega slabega izdelka, ter 25 551 900 kombinacij vzorcev, med katerimi je natanko en izdelek slab.

<u>Primer 3:</u>

Imamo 9 igrač in 4 otroke. Prvi otrok dobi 3 igrače, drugi 2, tretji 2 in četrti 2 igrači. Koliko je možnih kombinacij razdelitev vseh igrač?

Ponovno gre za primer kombinacij brez ponavljanja, torej na osnovi izraza (2.16) sledi:

$$
\begin{aligned}
K &= \binom{9}{3}\cdot\binom{9-3}{2}\cdot\binom{6-2}{2}\cdot\binom{4-2}{2} = \\
&= \frac{9!}{6!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!} = \\
&= \frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 7560
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Torej je možnih 7560 kombinacij, da razdelimo vseh 9 igrač med 4 otroke po opisanem postopku.

6.2 Primeri iz verjetnostnega računa

Primere, ki jih bomo reševali, lahko razdelimo na naslednje kategorije:

- osnove verjetnostnega računa,
- pogojna verjetnost in verjetnost produkta dogodkov,
- zakon totalnih verjetnosti in
- Bayesovo pravilo.

6.2.1 Osnovni primeri iz verjetnostnega računa

V tem poglavju bo obravnavanih nekaj kombiniranih primerov iz kombinatorike in verjetnostnega računa.

Primer 1:

Želimo izbrati 3 ljudi (predsednika, podpredsednika in blagajnika) izmed 10 ljudi v določenem zaporedju. Od tega je 6 moških in 4 so ženske. Kolikšna je verjetnost, da so vsi trije izbrani člani moški?

Najprej na osnovi izraza (2.12) izračunajmo število načinov, na katere lahko izberemo 3 ljudi izmed 10 ljudi:

$$ {}_{10}V_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \tag{6.17} $$

Na osnovi izraza (2.12) še izračunajmo število načinov, na katere lahko izberemo 3 moške izmed 6 moških:

$$ {}_{6}V_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120 \tag{6.18} $$

Sedaj pa lahko na osnovi izraza (3.9) oziroma (3.10) izračunamo verjetnost, da so vsi trije izbrani člani moški. To naredimo tako, da število načinov, na katere lahko izberemo 3 moške izmed šestih (število elementarnih dogodkov v množici A), delimo s številom načinov, na katere lahko izberemo 3 ljudi izmed desetih (število vseh dogodkov). Sledi:

$$P(\text{vsi trije moški}) = \frac{n_A}{N} = \frac{{}_6V_3}{{}_{10}V_3} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6} \tag{6.19}$$

Torej je verjetnost, da so vsi trije izbrani člani moški, enaka $\frac{1}{6}$.

<u>Primer 2:</u>

Izračunaj verjetnost, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko.

Označimo z A dogodek, da "pade vsaj ena trojka", z $\overline{A}$ pa dogodek, da "ne pade nobena trojka".

Dve kocki lahko vržemo na 36 različnih načinov $(6 \cdot 6)$. Ker pa želimo z enim metom zadeti vsaj eno trojko, se nam nabor vseh možnosti zmanjša na preostalih 12 možnosti: $\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$.

Vendar, ker imamo v naboru 12 možnosti opravka s kombinacijo $(3,3)$, ki se dvakrat ponovi, bomo v nadaljevanju postopka upoštevali to kombinacijo le enkrat. Tako nam za izračun verjetnosti, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko, ostane 11 možnosti izmed vseh možnih 36 načinov metanja dveh kock. Na osnovi izraza (3.10) tako sledi:

$$P(A) = \frac{11}{36} \tag{6.20}$$

Verjetnost, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko, je torej enaka $\frac{11}{36}$.

Primer 3:

Izračunajte verjetnost, da ima 5 oseb različne rojstne dni.

Obravnavani primer si lahko predstavljamo tudi kot primer žare s 365 kroglami od 1 do 365. Če najprej v stanju A (glej izraz 6.21) potegnemo kroglo i in jo nato vrnemo, to pomeni, da v nobenem drugem stanju več ne moremo izvleči krogle i. Če v stanju B izvlečemo kroglo j, ki ni enaka krogli i, tudi več v preostalih stanjih ne moremo izvleči krogel i in j, saj smo jih že v prvih dveh stanjih. Na podoben način se postopek ponavlja do zadnjega stanja E, kjer izvlečena krogla m ne more biti enaka kroglam l, j, i in k.

$$
\begin{aligned}
&\text{A="Potegnemo kroglo } i\text{, vračamo."} \\
&\text{B="Potegnemo kroglo } j\text{, vračamo."} \quad (j \neq i) \\
&\text{C="Potegnemo kroglo } k\text{, vračamo."} \quad (k \neq j \neq i) \\
&\text{D="Potegnemo kroglo } l\text{, vračamo."} \quad (l \neq j \neq i \neq k) \\
&\text{E="Potegnemo kroglo } m\text{, vračamo."} \quad (m \neq l \neq j \neq i \neq k)
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Za primer rojstnih dni pa to pomeni naslednje. Prva oseba ima lahko rojstni dan na kateri koli dan izmed 365 dni v letu (glej izraz 6.22). Druga oseba tako ne more več imeti rojstnega dne na isti dan kot prva oseba, temveč ima na razpolago le še 364 možnosti (dni v letu). Tovrstno razmišljanje se na opisan način način za primer 5 oseb ponavlja in tako dobimo verjetnost, da ima 5 oseb različne rojstne dni:

$$
P = \frac{365}{\underbrace{365}_{\substack{\text{katerikoli} \\ i}}} \cdot \frac{364}{\underbrace{365}_{\substack{\text{ne sme} \\ \text{biti } i}}} \cdot \frac{363}{\underbrace{365}_{\substack{\text{ne sme} \\ \text{biti } i \text{ in } j}}} \cdot \frac{362}{\underbrace{365}_{\substack{\text{ne sme} \\ \text{biti } i \text{ in} \\ j \text{ in } k}}} \cdot \frac{361}{\underbrace{365}_{\substack{\text{ne sme} \\ \text{biti } i \text{ in } j \\ \text{in } k \text{ in } l}}} = \ldots
\tag{6.22}
$$

Primer 4:

Kolikšna je verjetnost, da pri lotu (49/6) izmed 6 krogel izvlečemo:

a) vseh 6 napačnih krogel,

b) 4 zmagovite krogle,

c) 5 zmagovitih krogel,

d) 5+1 zmagovitih krogel,

e) vseh 6 zmagovitih krogel?

a) Najprej na osnovi izraza (2.16) izračunajmo število načinov, na katere lahko izvlečemo 6 krogel izmed 49 krogel:

$$K_{49}^{6}=\binom{49}{6}=\frac{49!}{(49-6)!\cdot 6!}=13\ 983\ 816 \tag{6.23}$$

Na osnovi izraza (2.16) še izračunajmo število načinov, na katere lahko izvlečemo vseh 6 napačnih krogel izmed 43 napačnih:

$$K_{43}^{6}=\binom{43}{6}=\frac{43!}{(43-6)!\cdot 6!}=6\ 096\ 454 \tag{6.24}$$

Sedaj pa lahko na osnovi izraza (3.10) izračunamo verjetnost, da je vseh 6 izvlečenih krogel napačnih. To naredimo tako, da število načinov, na katere lahko izvlečemo vseh 6 napačnih krogel delimo s številom načinov, na katere lahko izvlečemo 6 krogel izmed vseh 49 krogel. Sledi:

$$P(6\ \text{napačnih})=\frac{K_{43}^{6}}{K_{49}^{6}}=\frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}}=\frac{6\ 096\ 454}{13\ 983\ 816}=0.4359 \tag{6.25}$$

Torej je verjetnost, da izvlečemo vseh 6 napačnih krogel, enaka 0.4359.

b) Zapišimo najprej naslednja dogodka:

A = "potegnemo 4 zmagovite izmed 6 zmagovitih" $\rightarrow$ $K_{6}^{4}(A)=\binom{6}{4}$

B = "potegnemo 2 napačni izmed 43 napačnih" $\rightarrow$ $K_{43}^{2}(B)=\binom{43}{2}$

Ker je potrebno v nalogi poiskati verjetnost, da bomo zadeli 4 zmagovite ter 2 napačni, je torej potrebno poiskati še presek med dogodkoma A in B, kar lahko storimo na sledeč način:

$$K_6^4(A) \cap K_{43}^2(B) = K_6^4(A) \cdot K_{43}^2(B) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\ 545 \tag{6.26}$$

Sedaj pa lahko na osnovi izraza (3.10) izračunamo verjetnost, da bomo zadeli 4 zmagovite ter 2 napačni krogli izmed 49 možnih krogel. To naredimo na enak način kot v prejšnjih primerih, t.j. da število načinov, na katere lahko izvlečemo 4 zmagovite ter 2 napačni krogli, delimo s številom vseh možnih načinov. Sledi:

$$P\left(4 \text{ zmagovite}\right) = \frac{K_6^4(A) \cap K_{43}^2(B)}{K_{49}^6} = \frac{13\ 545}{\binom{49}{6}} = 0.000968 \tag{6.27}$$

Torej je verjetnost, da izvlečemo 4 zmagovite in 2 napačni krogli, enaka 0.000968.

c) Na podoben način lahko izračunamo tudi verjetnost, da pri lotu zadenemo 5 zmagovitih. Vsekakor imamo v tem primeru opravka z naborom 49 krogel, izmed katerih je 6 krogel zmagovitih, 42 krogel napačnih in je 1 krogla tako imenovana »bonus krogla«. Glede na to, da ta naloga pravi, da izmed 6 zmagovitih zadenemo 5 zmagovitih in izmed 42 napačnih zadenemo 1 napačno, je postopek za izračun verjetnosti sledeč (izmed 1 bonus krogle ne potegnemo nobene):

$$P\left(5 \text{ zmagovitih}\right) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{42}{1} \cdot \binom{1}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{252}{\binom{49}{6}} = 0.000018 \tag{6.28}$$

d) Podobno bi tudi izračunali verjetnost za dogodek 5+1 zmagovitih krogel. To pomeni, da bi prav tako od 6 zmagovitih zadeli 5 zmagovitih in hkrati od ene bonus krogle potegnili eno bonus kroglo. Sledi:

$$P(5+1 \text{ zmagovitih}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{\binom{49}{6}} = 0.00000042 \qquad (6.29)$$

e) Verjetnost, da iz množice 49 krogel zadenemo vseh 6 zmagovitih, pa je naslednja:

$$P(6 \text{ zmagovitih}) = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\ 983\ 816} \qquad (6.30)$$

Primer 5:

Iz kupa 32 kart na slepo potegnemo eno karto. Kakšna je verjetnost, da je:

a) ta karta črne barve,

b) ta karta kralj,

c) ta karta srce?

Najprej izračunajmo število načinov, na katere lahko potegnemo eno karto s kupa 32 kart. Če upoštevamo izraz (2.16), dobimo naslednje:

$$K_{32}^{1} = \binom{32}{1} = 32 \qquad (6.31)$$

Zapišimo še obravnavane dogodke:

A = »karta je črne barve«

B = »karta je kralj«

C = »karta je srce«

Sedaj lahko na osnovi izraza (3.10) zapišemo še verjetnosti za posamezne dogodke. Sledi:

$$P(A) = \frac{16 \text{ črnih}}{32 \text{ vseh}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4 \text{ kralji}}{32 \text{ vseh}} = \frac{1}{8} \tag{6.32}$$

$$P(C) = \frac{8 \text{ src}}{32 \text{ vseh}} = \frac{1}{4}$$

Torej je verjetnost, da bomo iz kupa 32 kart potegnili črno karto, enaka 0.5, za karto kralja je verjetnost enaka 0.125, in za srčevo karto je verjetnost enaka 0.25.

Primer 6:

Med 30 izdelki so 4 pokvarjeni. Na slepo izberemo vzorec 4 izdelkov. Kolikšna je verjetnost, da so/sta:

a) A = {vsi izdelki v vzorcu pokvarjeni}

b) B = {natanko 2 izdelka v vzorcu pokvarjena}

c) C = {vsi izdelki v vzorcu dobri}

Najprej izračunajmo število načinov, na katere lahko iz 30 izdelkov potegnemo vzorec 4 izdelkov. Če upoštevamo izraz (2.16), dobimo naslednje:

$$K_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{(30-4)! \cdot 4!} = 27\ 405 \tag{6.33}$$

Sedaj lahko na osnovi izraza (3.10) zapišemo še verjetnosti za posamezne dogodke. Najprej izračunajmo verjetnost, da so vsi izdelki v vzorcu štirih izdelkov pokvarjeni. Sledi:

$$P(A) = \frac{\overbrace{\binom{4}{4}}^{\substack{\text{Izmed 4 pokvarjenih} \\ \text{izdelkov so v vzorcu} \\ \text{4 pokvarjeni}}}}{K_{30}^{4}} = \frac{1}{27\ 405} = 0.000036 \tag{6.34}$$

Verjetnost, da sta natanko 2 izdelka v vzorcu štirih izdelkov pokvarjena, je naslednja:

$$P(B)=\frac{\overbrace{\binom{4}{2}}^{\substack{\text{Izmed 4}\\ \text{pokvarjenih izd.}\\ \text{sta 2 pokvarjena}\\ \text{v vzorcu}}}\cdot\overbrace{\binom{26}{2}}^{\substack{\text{Izmed 26}\\ \text{dobrih izd.}\\ \text{sta 2 dobra}\\ \text{v vzorcu}}}}{K_{30}^{4}}=\frac{\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{26!}{(26-2)!\cdot 2!}}{27\,405}=\frac{1950}{27\,405}=0.0712 \tag{6.35}$$

Verjetnost, da so vsi izdelki v vzorcu dobri, pa je naslednja:

$$P(C)=\frac{\binom{26}{4}}{K_{30}^{4}}=\frac{14\,950}{27\,405}=0.545 \tag{6.36}$$

Primer 7:

Iz kupa 32 kart potegnemo hkrati 3 karte. Kolikšna je verjetnost dogodkov?

a) A = {vse 3 karte so rdeče}

b) B = {vse 3 karte so asi}

c) C = {med 3 izvlečenimi kartami je vsaj en kralj}

Najprej izračunajmo število načinov, na katere lahko iz kupa 32 kart potegnemo 3 karte. Če upoštevamo izraz (2.16), dobimo naslednje:

$$K_{32}^{3}=\binom{32}{3}=4960 \tag{6.37}$$

Sedaj pa lahko na osnovi izraza (3.10) izračunamo verjetnost, da bomo potegnili vse 3 karte rdeče. Sledi:

$$P(A)=\frac{\overbrace{\binom{16}{3}}^{\text{Od 16 rdečih smo potegnili 3 rdeče}}}{K_{32}^{3}}=0.1129 \tag{6.38}$$

Verjetnost, da so vse 3 izvlečene karte asi, je naslednja:

$$P(B)=\frac{\overbrace{\binom{4}{3}}^{\text{Od 4 asov smo potegnili 3 ase}}}{K_{32}^{3}}=0.0008 \tag{6.39}$$

Verjetnost, da je med tremi izvlečenimi kartami vsaj en kralj, pa je sledeča:

$$\begin{aligned} P(C) &= P\overbrace{(\text{en kralj})}^{C_1}+P\overbrace{(\text{dva kralja})}^{C_2}+P\overbrace{(\text{trije kralji})}^{C_3}= \\ &= \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{2}}{K_{32}^{3}}+\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{1}}{K_{32}^{3}}+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{0}}{K_{32}^{3}}\approx 0.34 \end{aligned} \tag{6.40}$$

<u>*Primer 8:*</u>

V posodi imamo 5 rdečih, 3 bele in 4 modre kroglice. Na slepo potegnemo 3 kroglice. Kolikšna je verjetnost dogodkov?

a) A = {vsaj ena od izvlečenih kroglic je modra}

b) B = {kvečjemu ena od izvlečenih kroglic je modra}

Najprej izračunajmo število načinov, na katere lahko izvlečemo 3 kroglice izmed 12-ih v posodi. Na podlagi izraza (2.16) sledi:

$$K_{12}^{3}=\binom{12}{3}=32 \tag{6.41}$$

Sedaj pa lahko na osnovi izraza (3.10) izračunamo verjetnost, da bo vsaj ena od izvlečenih kroglic modre barve. Sledi:

$$P(A) = P(\text{ena modra}) + P(\text{dve modri}) + P(\text{tri modre}) =$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{4\,\text{M}}{1\,\text{M}}}^{\substack{\text{od 4 modrih}\\\text{smo potegnili}\\\text{1 modro}}} \cdot \overbrace{\binom{8\,\text{OST}}{2\,\text{OST}}}^{\substack{\text{od 8 ostalih}\\\text{smo potegnili}\\\text{2 ostali}}}}{K_{12}^{3}} + \frac{\overbrace{\binom{4\,\text{M}}{2\,\text{M}}}^{\substack{\text{od 4 modrih}\\\text{smo potegnili}\\\text{2 modri}}} \cdot \overbrace{\binom{8\,\text{OST}}{1\,\text{OST}}}^{\substack{\text{od 8 ostalih}\\\text{smo potegnili}\\\text{1 ostalo}}}}{K_{12}^{3}} + \frac{\overbrace{\binom{4\,\text{M}}{3\,\text{M}}}^{\substack{\text{od 4 modrih}\\\text{smo potegnili}\\\text{3 modre}}} \cdot \overbrace{\binom{8\,\text{OST}}{0\,\text{OST}}}^{\substack{\text{od 8 ostalih}\\\text{smo potegnili}\\\text{0 ostalih}}}}{K_{12}^{3}} \approx 0.745 \tag{6.42}$$

Verjetnost, da bo kvečjemu ena od izvlečenih kroglic modre barve, pa je naslednja:

$$P(B) = P(\text{nič modrih}) + P(\text{ena modra}) =$$

$$= \frac{\binom{4\,\text{M}}{0\,\text{M}} \cdot \binom{8\,\text{OST}}{3\,\text{OST}}}{K_{12}^{3}} + \frac{\binom{4\,\text{M}}{1\,\text{M}} \cdot \binom{8\,\text{OST}}{2\,\text{OST}}}{K_{12}^{3}} \approx 0.764 \tag{6.43}$$

Primer 9:

Iz kupa 32 kart na slepo izberemo eno karto. Kolikšna je verjetnost, da je izvlečena karta kralj ali srce?

Zapišimo najprej dogodke:

K = {izvlečena karta je kralj}

S = {izvlečena karta je srce}

A = {izvlečena karta je kralj ali srce}

Ker imamo opravka s hkratnima združljivima dogodkoma (hkrati kralj in srce), na podlagi izraza (3.19) sledi:

$$P\Big(\overbrace{A}^{\substack{\text{da je}\\\text{kralj}\\\text{ali srce}}}\Big) = P(K \cup S) = P\Big(\overbrace{K}^{\substack{\text{da je}\\\text{kralj}}}\Big) + P\Big(\overbrace{S}^{\substack{\text{da je}\\\text{srce}}}\Big) - P\Big(\overbrace{K \cdot S}^{\substack{\text{da je kralj}\\\text{in hkrati srce,}\\\text{torej srčev kralj}}}\Big) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} \tag{6.44}$$

Torej je verjetnost, da je izvlečena karta srčev kralj, enaka $\frac{11}{32}$.

Primer 10:

Verjetnost, da bo prvi študent rešil nalogo je 0.6, verjetnost, da jo bo rešil drugi študent je $\frac{2}{3}$. Kolikšna je verjetnost, da bo naloga rešena, če jo rešujeta oba študenta ločeno naenkrat?

Dogodka sta naslednja:

A = {nalogo reši prvi študent}

B = {nalogo reši drugi študent}

Ponovno imamo opravka s hkratnima združljivima dogodkoma, torej na podlagi izraza (3.19) sledi:

$$\underbrace{P(A+B)}_{\substack{\text{verj. da bo}\\\text{naloga rešena}}} = \underbrace{P(A)}_{\substack{\text{da jo reši}\\\text{prvi študent}}} + \underbrace{P(B)}_{\substack{\text{da jo reši}\\\text{drugi študent}}} - \underbrace{P(A\cdot B)}_{\substack{P(A)\cdot P(B)\\\text{neodvisna hkratna}\\\text{dogodka (ki se ne}\\\text{izključujeta)}}} = 0.6+\frac{2}{3}-\underbrace{0.6\cdot\frac{2}{3}}_{0.4} = 0.8\overline{66} \qquad (6.45)$$

Če oba študenta rešujeta nalogo ločeno naenkrat, je verjetnost, da bo naloga rešena, enaka približno 0.86.

Primer 11:

Kolikšna je verjetnost, da potegnemo med 32 kartami ali srce ali asa ali figuro nad 10?

Velja naslednje:

$$\underbrace{P(S)}_{\text{srce}} = \frac{8}{32} \;, \quad \underbrace{P(A)}_{\text{as}} = \frac{4}{32} \quad \text{in} \quad \underbrace{P(F)}_{\text{figura}} = \frac{\overbrace{4+4+4+4}^{\text{fant, baba, kralj, as}}}{32} = \frac{16}{32} \qquad (6.46)$$

Velja tudi:

$$\underbrace{P(A \cdot S)}_{\substack{\text{srčev}\\ \text{as}}} = \frac{1}{32} \quad , \quad \underbrace{P(S \cdot F)}_{\substack{\text{srčeva}\\ \text{figura}\\ \text{nad 10}}} = \frac{4}{32} \quad , \quad \underbrace{P(A \cdot F)}_{\text{4 asi}} = \frac{4}{32} \quad \text{in}$$

$$\underbrace{P(S \cdot A \cdot F)}_{\substack{\text{srčev as ter}\\ \text{figura nad 10}}} = \frac{1}{32} \tag{6.47}$$

Če z D označimo verjetnost, da med 32 kartami potegnemo ali srce ali asa ali figuro nad 10, na podlagi izraza (3.21) sledi:

$$P(D) = P(S) + P(A) + P(F) - P(A \cdot S) - P(S \cdot F) - P(A \cdot F) + P(S \cdot A \cdot F) = 0.625 \tag{6.48}$$

Torej je verjetnost 62.5 %, da bomo med 32 kartami potegnili ali srce ali asa ali figuro nad 10.

<u>Primer 12:</u>

Dva strelca streljata proti cilju. Prvi zadeva 70 % strelov, drugi pa 40 % strelov. Kolikšna je verjetnost, da bo cilj zadet, če hkrati ustrelita?

Dogodki so naslednji (A in B sta neodvisna hkratna dogodka):

A = "zadane 1. strelec"

B = "zadane 2. strelec"

C = "tarča je zadeta"

Ponovno gre za primer unije združljivih dogodkov, torej na podlagi izraza (3.19) sledi:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0.7 + 0.4 - 0.7 \cdot 0.4 = 0.82 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Tarča bo torej zadeta z 82 % verjetnostjo, če oba strelca ustrelita hkrati.

Primer 13:

Trije strelci streljajo v tarčo. Prvi zadeva pri 75 % strelov, drugi pri 60 % strelov in tretji pri 50 % strelov. Vsi trije ustrelijo hkrati. Kolikšna je verjetnost, da bo tarča zadeta?

Podano imamo:

A = "zadane 1. strelec" => P(A)=0.75

B = "zadane 2. strelec" => P(B)=0.6

C = "zadane 3. strelec" => P(C)=0.5

D = "tarča je zadeta"

Ker gre za primer več kot dveh združljivih dogodkov, na podlagi izraza (3.21) sledi:

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) - \overbrace{P(A \cdot B)}^{P(A)\cdot P(B)} - \overbrace{P(A \cdot C)}^{P(A)\cdot P(C)} - \overbrace{P(B \cdot C)}^{P(B)\cdot P(C)} + \overbrace{P(A \cdot B \cdot C)}^{P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)} = \tag{6.50}$$
$$= 0.75 + 0.6 + 0.5 - 0.75 \cdot 0.6 - 0.75 \cdot 0.5 - 0.6 \cdot 0.5 + 0.75 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.95$$

Torej je verjetnost, da bo tarča zadeta, če vsi trije strelci ustrelijo hkrati, enaka 0.95.

Primer 14:

Proti tarči streljajo 3 strelci. Verjetnost, da tarčo zadane prvi strelec je 0.4, verjetnost, da jo zadane drugi strelec je 0.5, in verjetnost, da jo zadane tretji strelec, je 0.7. Vsi trije ustrelijo proti tarči hkrati. Kolikšna je verjetnost, da je:

A = {tarča zadeta natanko 2x}

B = {tarča zadeta vsaj 2x}

C = {tarča zadeta kvečjemu 2x}

Izračunaj P(A) = ?, P(B) = ? in P(C) = ?, ter naredi preizkus!

Dogodki so naslednji:

S_1 = {tarčo zadane 1. strelec}, $P(S_1) = 0.4$

S_2 = {tarčo zadane 2. strelec}, $P(S_2) = 0.5$

S_3 = {tarčo zadane 3. strelec}, $P(S_3) = 0.7$

Najprej izračunajmo verjetnost, da bo tarča zadeta natanko dvakrat. Torej, če trije strelci hkrati ustrelijo proti tarči, dva izmed strelcev tarčo zadeneta, medtem, ko jo eden zgreši. To pomeni, da tarčo zadeneta 1. in 2. strelec hkrati ali 1. in 3. strelec hkrati ali 2. in 3. strelec hkrati, kar lahko zapišemo tudi z naslednjim izrazom:

$$A = S_1 \cdot S_2 \cdot \overline{S}_3 + S_1 \cdot \overline{S}_2 \cdot S_3 + \overline{S}_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \tag{6.51}$$

Ker so dogodki med seboj nezdružljivi in neodvisni, na podlagi izraza (3.39) sledi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(S_1 \cdot S_2 \cdot \overline{S}_3 + S_1 \cdot \overline{S}_2 \cdot S_3 + \overline{S}_1 \cdot S_2 \cdot S_3\right) = \\ &= P(S_1 \cdot S_2 \cdot \overline{S}_3) + P(S_1 \cdot \overline{S}_2 \cdot S_3) + P(\overline{S}_1 \cdot S_2 \cdot S_3) = \\ &= P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(\overline{S}_3) + P(S_1) \cdot P(\overline{S}_2) \cdot P(S_3) + P(\overline{S}_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) \end{aligned} \tag{6.52}$$

Torej je verjetnost, da bo tarča zadeta natanko dvakrat, enaka:

$$P(A) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.41 \tag{6.53}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost, da bo tarča zadeta vsaj dvakrat. To pomeni, da nas zanima verjetnost, da bo tarča zadeta natanko dvakrat ali verjetnost, da bo tarča zadeta natanko trikrat, kar lahko zapišemo na sledeč način:

$$P(B) = \underbrace{P(A)}_{\substack{\text{zadeta natanko}\\ \text{dvakrat}}} + \underbrace{P(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)}_{\substack{\text{zadeta natanko}\\ \text{trikrat}}} \tag{6.54}$$

Torej je verjetnost, da bo tarča zadeta vsaj dvakrat, enaka:

$$P(B) = 0.41 + \underbrace{P(S_1)}_{0.4} \cdot \underbrace{P(S_2)}_{0.5} \cdot \underbrace{P(S_3)}_{0.7} = 0.55 \tag{6.55}$$

Izračunajmo še verjetnost, da bo tarča zadeta kvečjemu dvakrat:

$$P(C)=P(\text{zadeta nobenkrat})+P(\text{zadeta enkrat})+P(\underbrace{\text{zadeta dvakrat}}_{A}) \tag{6.56}$$

Zanima nas torej verjetnost, da noben izmed strelcev ne zadane tarče, ali da natanko eden zadane, ali da natanko dva zadeneta. Sledi:

$$\begin{aligned}
&P(C)=P\left(\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2\cdot\overline{S}_3\right)+P\left(S_1\cdot\overline{S}_2\cdot\overline{S}_3+\overline{S}_1\cdot S_2\cdot\overline{S}_3+\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2\cdot S_3\right)+P(A)=\\
&=P\left(\overline{S}_1\right)\cdot P\left(\overline{S}_2\right)\cdot P\left(\overline{S}_3\right)+P\left(S_1\right)\cdot P\left(\overline{S}_2\right)\cdot P\left(\overline{S}_3\right)+P\left(\overline{S}_1\right)\cdot P\left(S_2\right)\cdot P\left(\overline{S}_3\right)+\\
&\quad+P\left(\overline{S}_1\right)\cdot P\left(\overline{S}_2\right)\cdot P\left(S_3\right)+P(A)=\\
&=0.6\cdot 0.5\cdot 0.3+0.4\cdot 0.5\cdot 0.3+0.6\cdot 0.5\cdot 0.3+0.6\cdot 0.5\cdot 0.7+0.41=0.86
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Za izvedbo preizkusa najprej zapišimo naslednje dogodke:

$$\begin{aligned}
&Z_0=\{\text{tarča ni bila zadeta}\} &&\Rightarrow\quad Z_0=\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2\cdot\overline{S}_3\\
&Z_1=\{\text{tarča enkrat zadeta}\} &&\Rightarrow\quad Z_1=S_1\cdot\overline{S}_2\cdot\overline{S}_3+\overline{S}_1\cdot S_2\cdot\overline{S}_3+\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2\cdot S_3\\
&Z_2=\{\text{tarča dvakrat zadeta}\} &&\Rightarrow\quad Z_2=S_1\cdot S_2\cdot\overline{S}_3+S_1\cdot\overline{S}_2\cdot S_3+\overline{S}_1\cdot S_2\cdot S_3\\
&Z_3=\{\text{tarča trikrat zadeta}\} &&\Rightarrow\quad Z_3=S_1\cdot S_2\cdot S_3
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Sledi:

$$\begin{gathered}
Z_0=0.09\ ;\quad Z_1=0.36\ ;\quad Z_2=0.41\ ;\quad Z_3=0.14\\
\Downarrow\\
P(Z_0)+P(Z_1)+P(Z_2)+P(Z_3)=0.09+0.36+0.41+0.14=1\quad\rightarrow\text{OK}
\end{gathered} \tag{6.59}$$

Ker je $A=Z_2$, $B=Z_2+Z_3$ in $C=Z_0+Z_1+Z_2$, sledi:

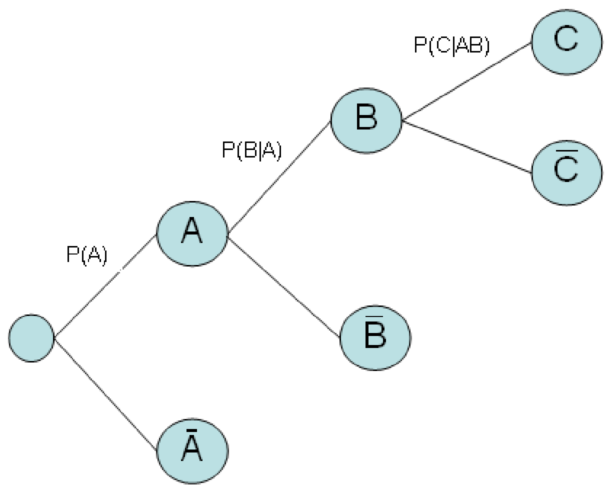
$$\begin{aligned}
&P(A)=P(Z_2)=0.41\\
&P(B)=P(Z_2)+P(Z_3)=0.41+0.14=0.55\\
&P(C)=P(Z_0)+P(Z_1)+P(Z_2)=0.09+0.36+0.41=0.86
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Torej smo potrdili izračune, saj dobimo v preizkusu enake rezultate.

6.2.2 Primeri iz pogojne verjetnosti in verjetnosti produkta dogodkov

Primer 1:

V žari je 5 belih in 7 rdečih krogel. Izvlečenih krogel ne vračamo v žaro. Kolikšna je verjetnost, da potegnemo tretjič belo kroglo, pri dejstvu, da je bila dvakrat bela že izvlečena (glej sliko 6.3)?



Slika 6.3: Primer pogojne verjetnosti I

Dogodki so naslednji:

A = "prva krogla je bela"

B = "druga krogla je bela"

C = "tretja krogla je bela"

Najprej na podlagi izraza (3.10) izračunajmo verjetnost, da smo prvič iz žare 12 krogel izvlekli belo kroglo:

$$P(A) = \frac{5_B}{5_B + 7_R} = \frac{5}{12} \qquad (6.61)$$

Ker izvlečenih krogel ne vračamo, je sedaj skupno v žari le še 11 krogel, to je 7 rdečih in 4 bele. Na podlagi izraza (3.28) izračunajmo še pogojno verjetnost, da smo v drugo potegnili belo kroglo, če je bila pri prvem poskusu bela krogla že izvlečena:

$$P(B \mid A) = \frac{4_B}{4_B + 7_R} = \frac{4}{11} \tag{6.62}$$

Sedaj, ko smo 2 beli krogli že izvlekli, nam v žari ostane še 10 krogel, to je 7 rdečih in 3 bele. Ponovno na podlagi izraza (3.28) sledi:

$$P(C \mid AB) = \frac{3_B}{3_B + 7_R} = \frac{3}{10} \tag{6.63}$$

Torej je verjetnost, da potegnemo tretjič belo kroglo, pri dejstvu, da je bila dvakrat bela že izvlečena, enaka $\frac{3}{10}$.

<u>Primer 2:</u>

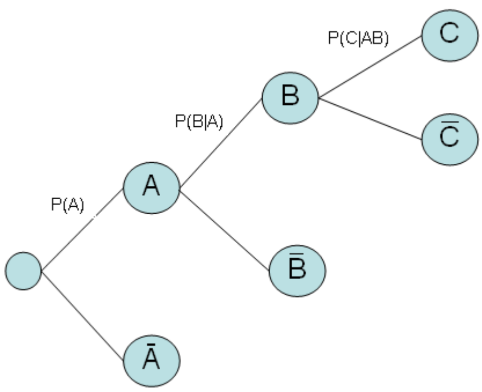
Izračunajte verjetnost, da pri metu kovanca 3 krat zaporedoma vržemo cifro (glej sliko 6.4)?

Dogodki so naslednji:

A = "prvič vržemo cifro"

B = "drugič vržemo cifro"

C = "tretjič vržemo cifro"



Slika 6.4: Primer pogojne verjetnosti II

Ker imamo opravka z neodvisnimi dogodki, na podlagi izraza (3.36) sledi:

$$
\begin{aligned}
&P(A \cap B \cap C) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \\
&= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

Torej je verjetnost 12.5 %, da pri metu kovanca trikrat zaporedoma vržemo cifro.

<u>Primer 3:</u>

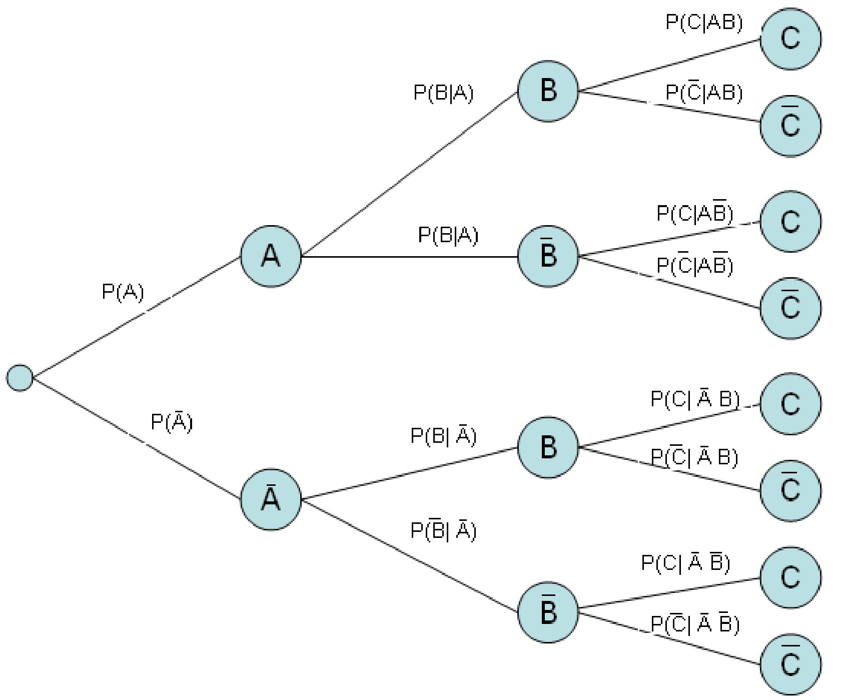
Izračunajte verjetnost, da ne vržemo s kocko 3 krat zaporedoma šestice (glej sliko 6.5).

Dogodki so naslednji:

A = "prvič pade 6" => $\overline{A}$ = "prvič ne pade šest"

B = "drugič pade 6" => $\overline{B}$ = "drugič ne pade 6"

C = "tretjič pade 6" => $\overline{C}$ = "tretjič ne pade 6"



Slika 6.5: Primer pogojne verjetnosti III

Najprej na podlagi izraza (3.10) izračunajmo verjetnost, da pri prvem metu kocke vržemo šestico:

$$P(A)=\frac{1}{6} \tag{6.65}$$

Ker imamo ponovno opravka z neodvisnimi dogodki, na podlagi izraza (3.37) sledi:

$$P(B \mid A)=P(B)=\frac{1}{6} \quad \text{ter} \quad P(C \mid AB)=P(C)=\frac{1}{6} \tag{6.66}$$

Sedaj lahko na podlagi izraza (3.36) izračunamo verjetnost, da trikrat zaporedoma vržemo šestico:

$$P(A \cap B \cap C)=P(A)\cdot P(B \mid A)\cdot P(C \mid AB)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3 \tag{6.67}$$

Ker moramo v dani nalogi poiskati verjetnost, da trikrat zaporedoma ne vržemo šestice, izračunajmo na podlagi izraza (3.10) še verjetnost, da pri prvem metu kocke ne vržemo šestice:

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6} \tag{6.68}$$

Na podlagi izraza (3.37) sledi:

$$P(\overline{B})=P(\overline{B} \mid \overline{A})=\frac{5}{6} \quad \text{ter} \quad P(\overline{C})=P(\overline{C} \mid \overline{A}\overline{B})=\frac{5}{6} \tag{6.69}$$

Sedaj pa lahko na podlagi izraza (3.36) izračunamo še verjetnost, da trikrat zaporedoma ne vržemo šestice:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.57 \tag{6.70}$$

Do tega rezultata bi lahko prišli tudi z drugačnim postopkom. Gotovo velja naslednje:

$$
\begin{aligned}
&P\left(ABC\right)+P\left(AB\overline{C}\right)+P\left(A\overline{B}C\right)+P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}BC\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1\\
&\mathit{sledi}:\\
&P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1-\left[P\left(ABC\right)+P\left(AB\overline{C}\right)+P\left(A\overline{B}C\right)+P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}BC\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)\right]\\
&P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1-\left[\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\right]=1-\frac{1}{6^3}\left(1+15+75\right)=0.5787
\end{aligned}
\tag{6.71}
$$

Primer 4:

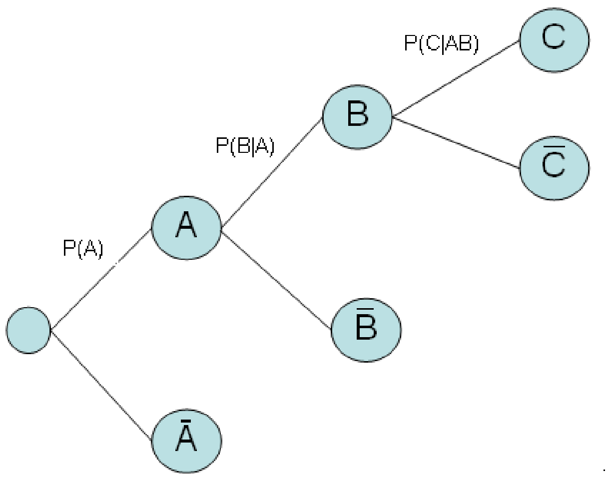
Kolikšna je verjetnost, da potegnemo med 32 kartami zaporedoma 3 kralje, če izvlečenih kart ne vračamo (glej sliko 6.6)?

Dogodki so naslednji:

A = "prvič kralj"

B = "drugič kralj"

C = "tretjič kralj"



Slika 6.6: Primer pogojne verjetnosti IV

Verjetnost, da pri prvem potegu izvlečemo kralja izmed razpoložljivih 32 kart, je na podlagi izraza (3.10) naslednja:

$$P(A)=\frac{4_{KRALJI}}{32} \tag{6.72}$$

Glede na to, da izvlečenih kart ne vračamo, imamo opravka z odvisnimi dogodki. Na podlagi izraza (3.27) tako za verjetnost, da v drugo potegnemo kralja, če smo pri prvem poskusu že izvlekli kralja, sledi:

$$P(B \mid A) = \frac{3_{KRALJI}}{31} \tag{6.73}$$

Verjetnost, da v tretjem poskusu izvlečemo kralja, če smo v prvem in drugem poskusu kralja že izvlekli, pa na podlagi izraza (3.27) sledi:

$$P(C \mid AB) = \frac{2_{KRALJA}}{30} \tag{6.74}$$

Verjetnost produkta treh odvisnih dogodkov pa sedaj lahko izračunamo na podlagi izraza (3.30), pri čemer dobimo:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{1240} \tag{6.75}$$

Torej je verjetnost, da potegnemo med 32 kartami zaporedoma 3 kralje, če izvlečenih kart ne vračamo, enaka $\frac{1}{1240}$.

Kako pa se situacija spremeni, če karte vračamo?

V tem primeru imamo opravka z neodvisnimi dogodki, torej nabor števila kart ostaja nespremenjen. Na podlagi izraza (3.39) tako sledi:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{512} \tag{6.76}$$

Torej je verjetnost, da potegnemo med 32 kartami zaporedoma 3 kralje, če izvlečene karte vračamo, enaka $\frac{1}{512}$.

Primer 5:

V posodi je 5 belih, 10 črnih in 5 rdečih krogel. Na slepo potegnemo eno za drugo 3 krogle. Kolikšna je verjetnost, da so vse 3 krogle bele, če:

a) smo izvlečene krogle vračali v posodo,

b) jih nismo vračali v posodo?

Zapišimo obravnavane dogodke:

B_1 = {prva izvlečena krogla je bela}

B_2 = {druga izvlečena krogla je bela}

B_3 = {tretja izvlečena krogla je bela}

A = {vse krogle so bele}

a) Najprej izračunajmo verjetnost, da so vse 3 izvlečene krogle bele, če izvlečene krogle vračamo v posodo. Ker imamo opravka z neodvisnimi dogodki, na osnovi izraza (3.39) sledi:

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\cdot B_2\cdot B_3\right)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)=\frac{5_B}{20}\cdot\frac{5_B}{20}\cdot\frac{5_B}{20}=\frac{1}{64} \tag{6.77}$$

b) Sedaj pa še izračunajmo verjetnost, da so vse 3 izvlečene krogle bele, če izvlečenih krogel ne vračamo v posodo. Ker imamo opravka z odvisnimi dogodki, na osnovi izraza (3.30) sledi:

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\cdot B_2\cdot B_3\right)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(B_3/B_1\cdot B_2)=\frac{5_B}{20}\cdot\frac{4_B}{19}\cdot\frac{3_B}{18}=\frac{1}{114} \tag{6.78}$$

Izraz (6.78) bi lahko zapisali tudi takole:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{20}{1}}\cdot\frac{\binom{4}{1}}{\binom{19}{1}}\cdot\frac{\binom{3}{1}}{\binom{18}{1}} \tag{6.79}$$

Primer 6:

V žari je 6 belih in 10 rdečih krogel. Kolikšna je verjetnost, da štirikrat zaporedoma potegnemo belo kroglo, če izvlečenih krogel ne vračamo (slika 6.7).

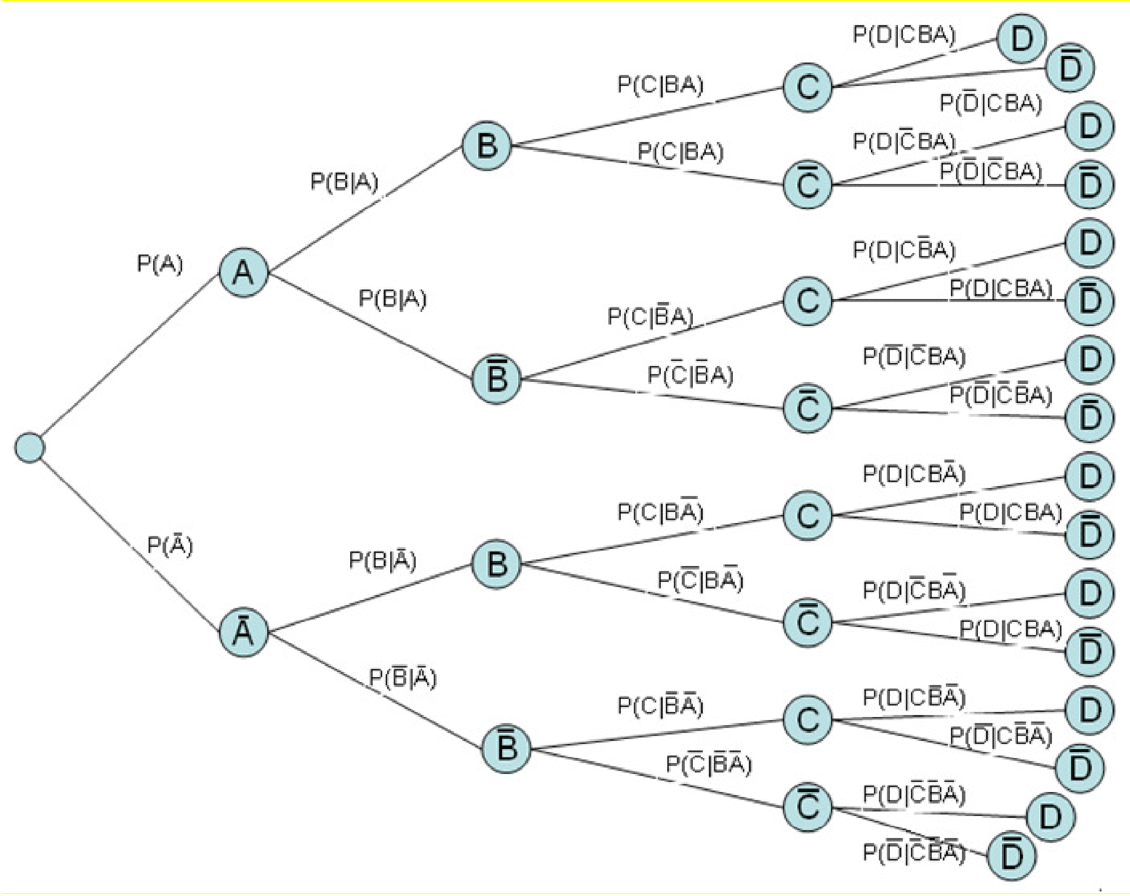
Dogodki so naslednji:

A = "Prvič potegnemo belo kroglo"

B = "Drugič potegnemo belo kroglo"

C = "Tretjič potegnemo belo kroglo"

D = "Četrtič potegnemo belo kroglo"



Slika 6.7: Primer pogojne verjetnosti V

Ker v danem primeru izvlečenih krogel ne vračamo v žaro, imamo opravka z odvisnimi dogodki. Na osnovi izraza (3.30) tako sledi:

$$P(A\cdot B\cdot C\cdot D)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid AB)\cdot P(D\mid ABC)=$$
$$=\frac{6_B}{6_B+10_R}\cdot\frac{5_B}{5_B+10_R}\cdot\frac{4_B}{4_B+10_R}\cdot\frac{3_B}{3_B+10_R}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}=\frac{3}{364}=0.008 \tag{6.80}$$

Torej je verjetnost, da štirikrat zaporedoma potegnemo belo kroglo, če izvlečenih krogel ne vračamo, enaka 0.8 %.

Če bi pa imeli primer, kjer bi izvlečene krogle vračali v žaro, bi imeli opravka z neodvisnimi dogodki. Na osnovi izraza (3.39) bi izračun potekal takole:

$$P(A\cdot B\cdot C\cdot D)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)=$$
$$=\frac{6_B}{6_B+10_R}\cdot\frac{6_B}{6_B+10_R}\cdot\frac{6_B}{6_B+10_R}\cdot\frac{6_B}{6_B+10_R}=\left(\frac{6}{16}\right)^4=\frac{81}{4096}=0.019 \tag{6.81}$$

6.2.3 Primeri zakona totalnih verjetnosti

Primer 1:

Izračunaj verjetnost, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko, pri dejstvu, da je padla vsota 8 pik.

Dogodka sta naslednja:

A = "padlo je 8 pik"

B = "pade vsaj ena trojka"

Pri obravnavanem primeru imamo 36 možnosti meta dveh kock, ki so prikazane v naslednji tabeli:

$$\left\{\begin{matrix}
\overbrace{(1,1)}^{\Sigma 2} & \overbrace{(1,2)}^{\Sigma 3} & \overbrace{(1,3)}^{\Sigma 4} & \overbrace{(1,4)}^{\Sigma 5} & \overbrace{(1,5)}^{\Sigma 6} & \overbrace{(1,6)}^{\Sigma 7}\\
\overbrace{(2,1)}^{\Sigma 3} & \overbrace{(2,2)}^{\Sigma 4} & \overbrace{(2,3)}^{\Sigma 5} & \overbrace{(2,4)}^{\Sigma 6} & \overbrace{(2,5)}^{\Sigma 7} & \overbrace{(2,6)}^{\Sigma 8}\\
\overbrace{(3,1)}^{\Sigma 4} & \overbrace{(3,2)}^{\Sigma 5} & \overbrace{(3,3)}^{\Sigma 6} & \overbrace{(3,4)}^{\Sigma 7} & \overbrace{(3,5)}^{\Sigma 8} & \overbrace{(3,6)}^{\Sigma 9}\\
\overbrace{(4,1)}^{\Sigma 5} & \overbrace{(4,2)}^{\Sigma 6} & \overbrace{(4,3)}^{\Sigma 7} & \overbrace{(4,4)}^{\Sigma 8} & \overbrace{(4,5)}^{\Sigma 9} & \overbrace{(4,6)}^{\Sigma 10}\\
\overbrace{(5,1)}^{\Sigma 6} & \overbrace{(5,2)}^{\Sigma 7} & \overbrace{(5,3)}^{\Sigma 8} & \overbrace{(5,4)}^{\Sigma 9} & \overbrace{(5,5)}^{\Sigma 10} & \overbrace{(5,6)}^{\Sigma 11}\\
\overbrace{(6,1)}^{\Sigma 7} & \overbrace{(6,2)}^{\Sigma 8} & \overbrace{(6,3)}^{\Sigma 9} & \overbrace{(6,4)}^{\Sigma 10} & \overbrace{(6,5)}^{\Sigma 11} & \overbrace{(6,6)}^{\Sigma 12}
\end{matrix}\right\} \tag{6.82}$$

Glede na to, da želimo z dvema kockama doseči, da bo skupno padlo 8 pik, nam iz nabora 36 možnosti preostane naslednjih 5 možnosti (glej tabelo): $\{(2,6),\,(6,2),\,(3,5),\,(5,3),\,(4,4)\}$. Torej je verjetnost, da bo z dvema kockama padlo 8 pik, glede na izraz (3.10), naslednja:

$$P(A)=\frac{5}{36} \tag{6.83}$$

Verjetnost, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko, pri dejstvu, da je padlo 8 pik, pa je glede na izraz (3.27) naslednja ($\{\,(3,5),\,(5,3)\}$):

$$P(B\mid A)=\frac{2_{Z\_TROJKO}}{5}=\frac{2}{5} \tag{6.84}$$

Izračunajmo še totalno verjetnost, da vržemo z dvema kockama vsaj eno trojko. V ta namen najprej izračunamo (glej tabelo):

$$\begin{array}{lll} P\overbrace{\left(\sum 4\right)}^{A_1}=\dfrac{3}{36} & P\overbrace{\left(\sum 5\right)}^{A_2}=\dfrac{4}{36} & P\overbrace{\left(\sum 6\right)}^{A_3}=\dfrac{5}{36} \\ P\overbrace{\left(\sum 7\right)}^{A_4}=\dfrac{6}{36} & P\overbrace{\left(\sum 8\right)}^{A_5}=\dfrac{5}{36} & P\overbrace{\left(\sum 9\right)}^{A_6}=\dfrac{4}{36} \end{array} \tag{6.85}$$

Nato izračunamo verjetnost $P(B\mid A_1)$, torej verjetnost, da pade vsaj ena trojka, če vemo, da je vsota enaka 4 (glej tabelo):

$$P(B\mid A_1)=\frac{2_{Z\_TROJKO}}{3}=\frac{2}{3} \tag{6.86}$$

Podobno izračunamo še ostale pogojne verjetnosti in dobimo:

$$\begin{array}{ll} P(B\mid A_1)=\dfrac{2_{Z\_TROJKO}}{3}=\dfrac{2}{3} & P(B\mid A_2)=\dfrac{2_{Z\_TROJKO}}{4}=\dfrac{1}{2} \\ P(B\mid A_3)=\dfrac{1_{Z\_TROJKO}}{5}=\dfrac{1}{5} & P(B\mid A_4)=\dfrac{2_{Z\_TROJKO}}{6}=\dfrac{1}{3} \\ P(B\mid A_5)=\dfrac{2_{Z\_TROJKO}}{5}=\dfrac{2}{5} & P(B\mid A_6)=\dfrac{2_{Z\_TROJKO}}{4}=\dfrac{1}{2} \end{array} \tag{6.87}$$

Sedaj lahko na podlagi izraza (3.35) izračunamo še totalno verjetnost, da bomo z metom dveh kock vrgli vsaj eno trojko. Sledi:

$$\begin{aligned}
&\overbrace{P(B)}^{\text{da pade vsaj ena trojka}} = P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+P(B/A_3)\cdot P(A_3)+ \\
&+P(B/A_4)\cdot P(A_4)+P(B/A_5)\cdot P(A_5)+P(B/A_6)\cdot P(A_6)= \\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{36}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{36}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{36}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{36}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{36}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{36}=\frac{11}{36}
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Torej je verjetnost 30.6 %, da bomo z metom dveh kock hkrati vrgli vsaj eno trojko.

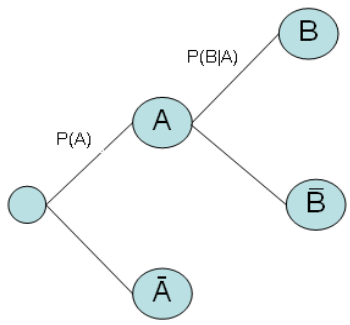
Primer 2:

Kolikšna je verjetnost, da potegnemo med 32 kartami asa, pri dejstvu, da je bila izvlečena črna karta (glej sliko 6.8)? Nato izračunaj še verjetnost, da je potegnjena karta as, ter verjetnost, da gre za črnega asa.

Najprej zapišimo dogodka:

A = {potegnili smo črno karto}

B = {potegnjena karta je as}



Slika 6.8: Primer totalne verjetnosti I

V prvi fazi nas najprej zanima verjetnost, da izmed 32 kart izvlečemo črno karto. Na podlagi izraza (3.10) sledi:

$$P(A)=\frac{16_{\check{C}}}{32}=\frac{1}{2} \tag{6.89}$$

Sedaj lahko izračunamo še pogojno verjetnost, da smo potegnili asa, pri dejstvu, da je bila izvlečena karta črne barve. Na osnovi izraza (3.27) sledi:

$$P(B/A)=\frac{2\text{ črna asa}}{16\text{ črnih}}=\frac{1}{8} \tag{6.90}$$

Totalna verjetnost, da je izvlečena karta as, pa je na osnovi izraza (3.35) naslednja:

$$\underbrace{P(B)}_{\text{da je as}}=P(A)\cdot P(B/A)+\underbrace{P(\bar{A})}_{\substack{\text{da je}\\ \text{rdeča}}}\cdot \underbrace{P(B/\bar{A})}_{\frac{2\text{ rdeča asa}}{16\text{ rdečih}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=\frac{4}{32} \tag{6.91}$$

Verjetnost, da je potegnjena karta črn as, pa je na osnovi izraza (3.28) naslednja:

$$P(\text{črn as})=P(A\cdot B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}=\frac{\overbrace{2}^{\substack{\text{2 črna}\\ \text{asa}}}}{32} \tag{6.92}$$

<u>Primer 3:</u>

Pri Black Jacku izvlečemo dve karti. Kolikšna je verjetnost, da dobimo 21?

Pri prvem poskusu vlečenja karte imamo na razpolago 52 možnih načinov, na katere lahko izvlečemo prvo karto izmed 52 razpoložljivih. Torej velja: $n_1 = 52 = \text{št. načinov za 52 kart}$. Ko pa je prva karta že izvlečena, nam preostane le še množica 51 kart, torej imamo na razpolago le še 51 načinov, na katere lahko izvlečemo drugo karto. Torej velja: $n_2 = 51 = \text{št. načinov za preostalih 51 kart}$.

Na podlagi izraza (2.1) lahko sedaj izračunamo število načinov, da izvlečemo 2 karti izmed razpoložljivih 52:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 52\cdot 51 = 2652 \tag{6.93}$$

Glede na to, da je potrebno v nalogi izračunati verjetnost, da z dvema izvlečenima kartama zadenemo 21, imamo na razpolago 2 možnosti:

- najprej izvlečemo asa in nato eno karto iz množice $\{B_i\} = \{\text{FANT, BABA, KRALJ, DESET}\}$

  ali
- najprej izvlečemo karto iz množice $\{B_i\}$ in nato asa.

Zapišimo obravnavane dogodke:

A = "prvo izvlečemo asa"
B = "nato izvlečemo element iz $\{B_i\}$"
C = "prvo izvlečemo element iz $\{B_i\}$"
D = "nato izvlečemo asa"
E = "dobimo 21"

Glede na izraz (3.10) je verjetnost, da bomo najprej izvlekli asa, oziroma karto iz množice $\{B_i\}$ naslednja:

$$P(A) = \frac{4}{52} \qquad\qquad P(C) = \frac{16}{52} \tag{6.94}$$

Pogojna verjetnost, da bomo v drugo potegnili karto iz množice $\{B_i\}$, če smo v prvem poskusu potegnili asa, je glede na izraz (3.27) naslednja:

$$P(B \mid A) = \frac{16}{51} \tag{6.95}$$

Pogojna verjetnost, da bomo v drugo potegnili asa, če smo v prvem poskusu potegnili karto iz množice $\{B_i\}$, pa je glede na izraz (3.27) naslednja:

$$P(D \mid C) = \frac{4}{51} \tag{6.96}$$

Totalna verjetnost, da z izvlečenima kartama zadenemo 21, se torej na osnovi izraza (3.35) glasi:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A)\cdot P(B \mid A) + P(C)\cdot P(D \mid C) = \frac{4}{52}\cdot\frac{16}{51} + \frac{16}{52}\cdot\frac{4}{51} = \frac{4\cdot 16 + 16\cdot 4}{52\cdot 51} = \\ &= \frac{128}{2652} = \frac{32}{663} = \frac{\text{št. ugodnih načinov, da izberemo 2 karti z } \Sigma = 21}{\text{N} = \text{št. vseh načinov, da izvlečemo 2 karti}} \end{aligned} \tag{6.97}$$

<u>Primer 4:</u>

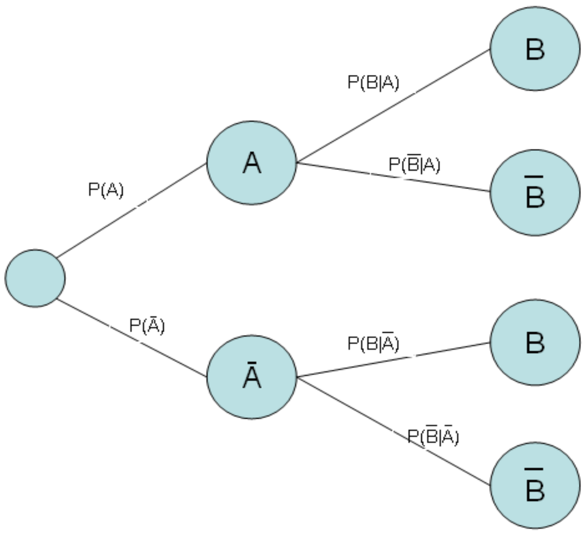
V žari je 5 belih in 6 rdečih krogel. Kolikšna je verjetnost, da potegnemo 2 krat zapovrstjo belo, če prve ne vrnemo v žaro (glej sliko 6.9).

Dogodki so naslednji:

A = "prvič potegnemo belo"

B = "drugič potegnemo belo"

C= $A \cdot B$ (dvakrat zapovrstjo potegnemo belo)



Slika 6.9: Primer totalne verjetnosti II

Verjetnost, da prvič izvlečemo belo kroglo, lahko na podlagi izraza (3.10) izračunamo na naslednji način:

$$P(A)=\frac{5_B}{5_B+6_R}=\frac{5}{11} \tag{6.98}$$

Ker na osnovi izraza (3.6) velja, da je vsota nekega dogodka in njegovega nasprotnega dogodka enaka 1, lahko za ta dotični primer zapišemo naslednje:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{6}{11} \tag{6.99}$$

Glede na to, da imamo opravka z odvisnimi dogodki, saj prve izvlečene krogle ne vračamo, je postopek za izračun pogojne verjetnosti, če smo prvič izvlekli belo kroglo, glede na izraz (3.28) naslednji:

$$P(B\,|\,A)=\frac{4_B}{4_B+6_R}=\frac{4}{10} \quad\Rightarrow\quad P(\overline{B}\,|\,A)=1-P(B\,|\,A)=\frac{6}{10} \tag{6.100}$$

Če pa smo pa prvič izvlekli rdečo kroglo, je postopek za izračun pogojne verjetnosti, glede na izraz (3.28), naslednji:

$$P(B\,|\,\overline{A})=\frac{5_B}{5_B+5_R}=\frac{5}{10} \quad\Rightarrow\quad P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=1-P(B\,|\,\overline{A})=\frac{5}{10} \tag{6.101}$$

Sedaj lahko uporabimo zakon totalnih verjetnosti, opredeljen z izrazom (3.35). Tako tudi dobimo verjetnost, da bo v drugo izvlečena bela krogla (glej sliko 6.9):

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)+P(\overline{A})\cdot P(B\,|\,\overline{A})=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{50}{110}=\frac{5}{11} \tag{6.102}$$

Zanima nas še verjetnost za dogodek $A\cap B$, kar lahko izračunamo po izrazu (3.29):

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=P(B)\cdot P(A\,|\,B)=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}=0.18 \tag{6.103}$$

Torej je verjetnost, da dvakrat zapovrstjo izvlečemo belo kroglo, če prve ne vrnemo v žaro, enaka 18 %. Opravimo še preizkus (glej sliko 6.9):

$$P(A)\cdot P(B\mid A)+P(A)\cdot P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid \overline{A})=$$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{20+30+30+30}{110}=1$$

Kaj pa, če izvlečeno prvo kroglo vrnemo v žaro?

Situacija se razlikuje v tem, da imamo sedaj opravka z neodvisnimi dogodki, saj je nabor krogel v žari ves čas enak. Verjetnost, da prvič izvlečemo belo kroglo, je enaka:

$$P(A)=\frac{5}{11} \tag{6.104}$$

Sprememba se pozna pri izračunu pogojne verjetnosti, saj dejstvo, da smo prvič izvlekli oziroma nismo izvlekli bele krogle, ne vpliva na to, kaj bo izvlečeno v 2. poskusu. Na podlagi izraza (3.37) tako sledi:

$$P(B\mid A)=\frac{5_B}{5_B+6_R}=\frac{5}{11} \quad in \quad P(B\mid \overline{A})=\frac{5_B}{5_B+6_R}=\frac{5}{11} \tag{6.105}$$

Verjetnost za dogodek $A\cap B$, pa lahko izračunamo po izrazu (3.29). Sledi:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}=\frac{25}{121}=0.207 \tag{6.106}$$

Izračunajmo še na podlagi izraza (3.35) verjetnost, da bo v drugo izvlečena bela krogla:

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}=\frac{55}{121}=\left(\frac{5}{11}\right) \tag{6.107}$$

Opazimo lahko, da je $P(B \mid A) = P(B)$. To je logično, saj sta *A* in *B* neodvisna dogodka in velja naslednje:

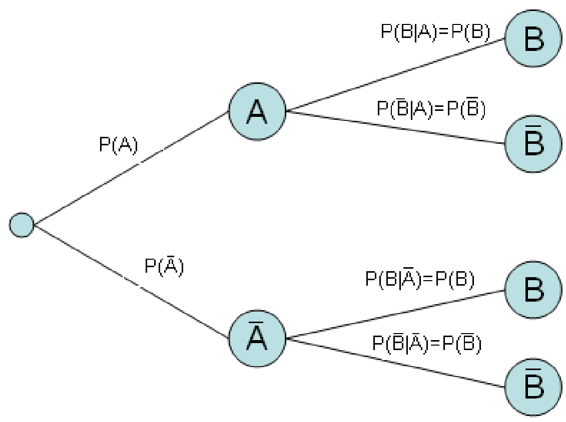
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B) \tag{6.108}$$

Torej dobimo enak izraz, kot je zapisan v (3.36).

<u>*Primer 5:*</u>

Verjetnost, da se rodi fant, je P(F)=0.515. V družini sta dva otroka. Izračunaj verjetnost, da ima družina 2 dečka. Izračunaj verjetnost, da ima družina 2 punci. (glej sliko 6.10).

Najprej zapišimo obravnavana dogodka:
A = "prvič se je rodil fant"
B = "drugič se je rodil fant"



Slika 6.10: Primer totalne verjetnosti III

Glede na to, da imamo opravka z neodvisnimi dogodki, na podlagi izraza (3.37) sledi, da je pogojna verjetnost nekega dogodka enaka prvotni verjetnosti tega dogodka. Torej informacija o dogodku *A* nič ne prispeva k informaciji o dogodku *B* in obratno. Tako lahko tudi na podlagi izraza (3.36) izračunamo presek med dogodkoma *A* in *B*, in dobimo:

$$P(A\cap B)=\overbrace{P(A)}^{P(F)=0.515}\cdot\overbrace{P(B\mid A)}^{P(F)=0.515}=P(F)\cdot P(F)=$$
$$=0.515\cdot 0.515=(0.515)^2=0.265 \tag{6.109}$$

Torej je verjetnost 26.5 %, da ima družina dva dečka.

Na podlagi izraza (3.36) še izračunajmo verjetnost, da ima družina dve deklici:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot\overbrace{P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)}^{P\left(\overline{B}\right)}=\left(1-P\left(F\right)\right)\cdot\left(1-P\left(F\right)\right)=$$
$$=\left(1-0.515\right)\cdot\left(1-0.515\right)=\left(1-0.515\right)^2=0.235 \tag{6.110}$$

Poglejmo, kaj v primeru neodvisnih dogodkov velja za totalno verjetnost, da se drugič v družini rodi deček:

$$P\left(B\right)=P\left(A\right)\cdot\underbrace{P\left(B/A\right)}_{P(B)}+P\left(\overline{A}\right)\cdot\underbrace{P\left(B/\overline{A}\right)}_{P(B)}=$$
$$=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)+P\left(\overline{A}\right)\cdot\left(B\right)=\underbrace{\left[P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\right)\right]}_{1}\cdot P\left(B\right)=P\left(B\right) \tag{6.111}$$

Torej velja:

$$P(B)=P(A)\cdot P(B)+P(\overline{A})\cdot P(B)=P(B)\cdot(P(A)+P(\overline{A}))=P(B) \tag{6.112}$$

Opazimo lahko, da tudi če izhajamo iz izraza za izračun totalne verjetnosti za odvisne dogodke (6.111), dobimo enak rezultat, kot če obravnavamo neodvisne dogodke (6.112).

Če povzamemo vse dobljene rezultate, je verjetnost, da se v družini rodita dva dečka, naslednja:

$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(F\right)\cdot P\left(F\right)=P\left(F\right)^2 \tag{6.113}$$

Verjetnost, da se najprej rodi deček in nato deklica, je naslednja:

$$P\left(A\cdot\overline{B}\right)=P(F)\cdot\left[1-P(F)\right] \tag{6.114}$$

Verjetnost, da se najprej rodi deklica in nato deček, je naslednja:

$$P\left(\overline{A}\cdot B\right)=\left[1-P(F)\right]\cdot P(F) \tag{6.115}$$

Verjetnost, da se v družini rodita obe deklici, pa je naslednja:

$$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=\left[1-P(F)\right]\cdot\left[1-P(F)\right] \tag{6.116}$$

6.2.4 Primeri Bayesovega pravila

Primer 1:

Neko podjetje izdeluje 70 % izdelkov povprečne kvalitete in le 30 % izdelkov visoke kvalitete. Verjetnost, da se izdelek povprečne kvalitete ne pokvari v enem letu, je 0.7. Verjetnost, da se visoko kvaliteten izdelek ne pokvari v enem letu, pa je 0.9. Slučajno izbrani izdelek se v enem letu ni pokvaril. Kolikšna je verjetnost, da je bil visoko kvaliteten?

Najprej zapišimo obravnavane dogodke:

A = izdelek se ne pokvari v roku enega leta

H_1 = izdelek je visoke kvalitete

H_2 = izdelek je povprečne kvalitete

Zapišimo še verjetnosti za nekatere dogodke obravnavanega primera:

$$\begin{aligned} &P(H_1) = 0.3 \\ &P(H_2) = 0.7 \\ &P(A/H_1) = 0.9 \\ &P(A/H_2) = 0.7 \end{aligned} \tag{6.117}$$

Sedaj lahko na podlagi izraza (3.35) izračunamo totalno verjetnost, da se izdelek v roku enega leta ne pokvari:

$$\begin{aligned} &P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = \\ &= 0.3\cdot 0.9 + 0.7\cdot 0.7 = 0.76 \end{aligned} \tag{6.118}$$

Z upoštevanjem izraza (3.43) lahko sedaj uporabimo Bayesovo pravilo in dobimo:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0.3\cdot 0.9}{0.76} = 0.355 \tag{6.119}$$

Torej je verjetnost 35.5 %, da je bil izbrani izdelek, ki se v roku enega leta ni pokvaril, visoke kvalitete.

<u>*Primer 2:*</u>

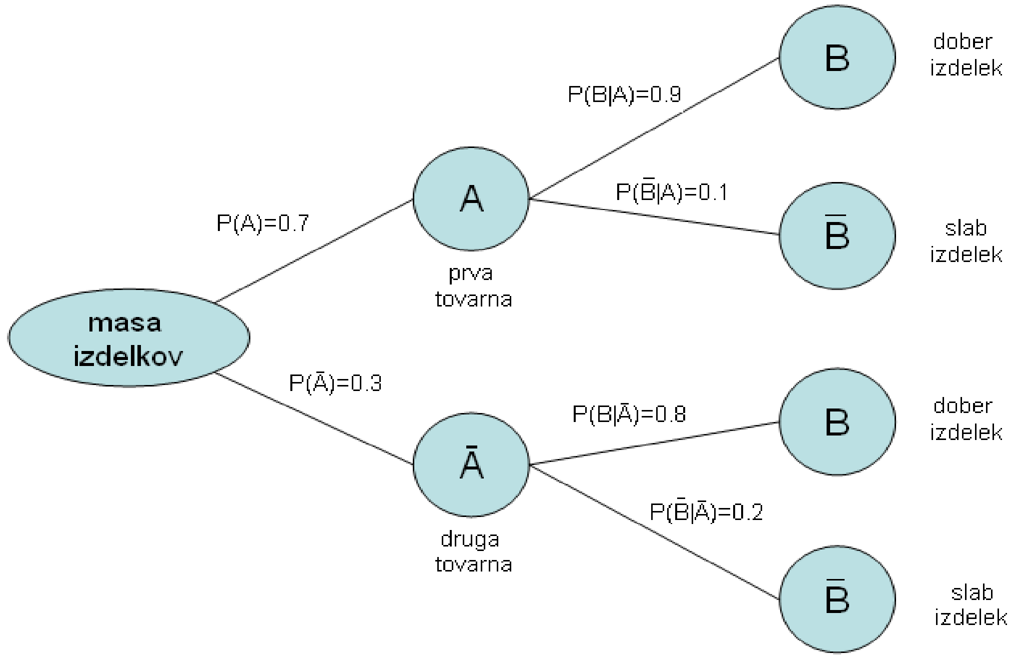
Dve tovarni izdelujeta izdelke istega tipa (slika 6.11). Prva izdela 70 %, druga pa 30 % izdelkov. Med izdelki prve tovarne je 90 % dobrih in 10 % slabih. Med izdelki druge tovarne je 80 % dobrih in 20 % slabih. Definiramo lahko naslednje dogodke::

A = "izdelek je iz 1. tovarne"

$\overline{A}$ = "izdelek je iz 2. tovarne"

B = "izdelek je dober"

$\overline{B}$ = "izdelek je slab"



Slika 6.11: Primer Bayesovega pravila I

Denimo na trgu kupimo izdelek. Zanima nas naslednje:

a.) Verjetnost, da je izdelek dober $\left(P(B)=?\right)$.

b.) Verjetnost, da je izdelek slab $\left(P(\overline{B})=?\right)$.

c.) Verjetnost, da je izdelek iz 1. tovarne, če je dober $\left(P(A \mid B)=?\right)$.

d.) Verjetnost, da je izdelek iz 1. tovarne, če je slab $\left(P(A \mid \overline{B})=?\right)$.

e.) Verjetnost, da je izdelek iz 2. tovarne, če je dober $\left(P(\overline{A} \mid B)=?\right)$.

f.) Verjetnost, da je izdelek iz 2. tovarne, če je slab $\left(P(\overline{A} \mid \overline{B})=?\right)$.

Najprej s pomočjo izraza (3.35) izračunajmo totalno verjetnost, da je izdelek dober:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A)\cdot \mathrm{P(B|A)} + \mathrm{P(\overline{A})}\cdot \mathrm{P(B|\overline{A})} = \\
&= \frac{7}{10}\cdot\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{87}{100}=0.87
\end{aligned}
\tag{6.120}
$$

Izračunajmo še verjetnost, da je izdelek slab:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{87}{100} = \frac{13}{100} \tag{6.121}$$

Uvedimo novi notaciji:

$H_1 = B$ in $H_2 = \overline{B}$

Če upoštevamo Bayesovo pravilo, opredeljeno z izrazom (3.43), dobimo:

$$\begin{aligned} P(\underbrace{H_1}_{B} \mid A) &= \frac{P(\overbrace{H_1}^{B}) \cdot P(A \mid \overbrace{H_1}^{B})}{P(\underbrace{H_1}_{B}) \cdot P(A \mid \underbrace{H_1}_{B}) + P(\underbrace{H_2}_{\overline{B}}) \cdot P(A \mid \underbrace{H_2}_{\overline{B}})} = \\ &= \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B})} \end{aligned} \tag{6.122}$$

Glede na to, da nas v tej nalogi ne zanima verjetnost za dober izdelek pod pogojem, da je iz 1. tovarne, ampak obratno, bomo v izrazu (6.122) zamenjali dogodka *A* in *B* med seboj. Tako dobimo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10}} = \frac{\frac{63}{100}}{\frac{87}{100}} = \frac{63}{87} \tag{6.123}$$

Torej je verjetnost 72.4 %, da je izdelek iz 1. tovarne, če vemo, da je dober.

Podobno sledi za verjetnost, da je izdelek iz 1. tovarne, če vemo, da je slab:

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)}{P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{13}{100}} = \frac{7}{13} \tag{6.124}$$

Verjetnost, da je izdelek iz 2. tovarne, če vemo, da je dober, je naslednja:

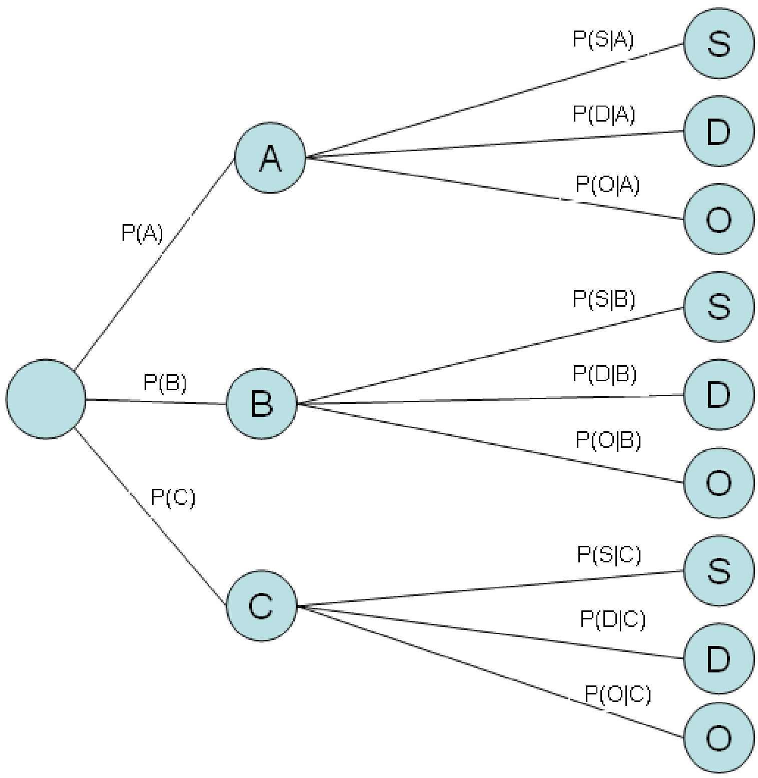
$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}{P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) + P(A) \cdot P(B \mid A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10}} = \frac{24}{87} \tag{6.125}$$

Verjetnost, da je izdelek iz 2. tovarne, če vemo, da je slab, pa je naslednja:

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})}{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) + P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{6}{13} \tag{6.126}$$

Primer 3:

Tri tovarne (A, B in C) izdelujejo žarnice istega tipa (slika 6.12). Prva izdela 10 %, druga 20 % in tretja 70 % vseh žarnic. Pri tem prva tovarna izdela 10 % slabih, 80 % dobrih in 10 % odličnih. Druga tovarna izdela 30 % slabih, 60 % dobrih in 10 % odličnih. Tretja tovarna pa izdela 20 % slabih, 70 % dobrih in 10 % odličnih.



Slika 6.12: Primer Bayesovega pravila II

Obravnavani dogodki so naslednji:

S = "žarnica je slaba"

D = "žarnica je dobra"

O = "žarnica je odlična"

A = "žarnica je iz 1. tovarne"

B = "žarnica je iz 2. tovarne"

C = "žarnica je iz 3. tovarne"

Najprej zapišimo podane verjetnosti, da je poljubna žarnica iz 1., 2. ali 3. tovarne. Sledi:

$$P(A) = 0.1, \quad P(B) = 0.2 \quad \text{in} \quad P(C) = 0.7 \tag{6.127}$$

Zapišimo še podane pogojne verjetnosti vseh možnih kombinacij, ki jih lahko opazimo na sliki 6.12:

$$\begin{array}{lll} P(S|A) = 0.1 & P(D|A) = 0.8 & P(O|A) = 0.1 \\ P(S|B) = 0.3 & P(D|B) = 0.6 & P(O|B) = 0.1 \\ P(S|C) = 0.2 & P(D|C) = 0.7 & P(O|C) = 0.1 \end{array} \tag{6.128}$$

Recimo, da izberemo poljubno žarnico na trgu. Zanima nas naslednje:

- *verjetnost, da je žarnica iz 1. tovarne, če vemo, da je slaba ($P(A|S)=?$)*
- *verjetnost, da je iz 2. tovarne, če vemo, da je dobra ($P(B|D)=?$)*
- *verjetnost, da je iz 3. tovarne, če vemo, da je odlična ($P(C|O)=?$)*

Najprej s pomočjo izraza (3.35) izračunajmo totalno verjetnost, da je žarnica slaba:

$$\begin{aligned} &P(S) = P(A)\cdot P(S|A) + P(B)\cdot P(S|B) + P(C)\cdot P(S|C) = \\ &= 0.1\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.3 + 0.7\cdot 0.2 = \frac{1}{100} + \frac{6}{100} + \frac{14}{100} = \frac{21}{100} = 0.21 \end{aligned} \tag{6.129}$$

Totalna verjetnost, da je žarnica dobra, je naslednja:

$$\begin{aligned} & P(D) = P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C) = \\ & = 0.1\cdot 0.8 + 0.2\cdot 0.6 + 0.7\cdot 0.7 = \frac{8}{100} + \frac{12}{100} + \frac{49}{100} = \frac{69}{100} = 0.69 \end{aligned} \tag{6.130}$$

Totalna verjetnost, da je žarnica odlična, pa je naslednja:

$$\begin{aligned} & P(O) = P(A)\cdot P(O|A) + P(B)\cdot P(O|B) + P(C)\cdot P(O|C) = \\ & = 0.1\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.1 + 0.7\cdot 0.1 = \frac{10}{100} = 0.1 \end{aligned} \tag{6.131}$$

Če sedaj uporabimo Bayesovo pravilo, opredeljeno z izrazom (3.43), dobimo naslednje:

$$\begin{aligned} & P(A \mid S) = \frac{P(A)\cdot P(S \mid A)}{P(A)\cdot P(S \mid A) + P(B)\cdot P(S \mid B) + P(C)\cdot P(S \mid C)} = \\ & = \frac{P(A)\cdot P(S \mid A)}{P(S)} = \frac{0.1\cdot 0.1}{0.21} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{21}{100}} = \frac{1}{21} \end{aligned} \tag{6.132}$$

Torej je verjetnost približno 5 %, da je žarnica iz 1. tovarne, če vemo, da je slaba.

Verjetnost, da je žarnica iz 2. tovarne, če vemo, da je dobra, je naslednja:

$$\begin{aligned} & P(B \mid D) = \frac{P(B)\cdot P(D \mid B)}{P(B)\cdot P(D \mid B) + P(A)\cdot P(D \mid A) + P(C)\cdot P(D \mid C)} = \\ & = \frac{P(B)\cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{0.2\cdot 0.6}{0.69} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{69}{100}} = \frac{12}{69} \end{aligned} \tag{6.133}$$

Verjetnost, da je žarnica iz 3. tovarne, če vemo, da je odlična, pa je naslednja:

$$P(C \mid O) = \frac{P(C)\cdot P(O \mid C)}{P(C)\cdot P(O \mid C) + P(A)\cdot P(O \mid A) + P(B)\cdot P(O \mid B)} = 0.70 \tag{6.134}$$

<u>Primer 4:</u>

Imamo 2 kocki in 2 žari. V prvi žari se nahaja 5 modrih krogel, 7 rdečih in 28 zelenih. V drugi žari pa se nahaja 27 modrih krogel, 7 rdečih in 6 zelenih. Ko vržemo obe kocki, se lahko zgodi naslednje:

A = "pade 2 krat šestica"

B = "ne pade 2 krat šestica"

Če se zgodi A => sežemo v 1. žaro in potegnemo kroglo.

Če se pa zgodi B => sežemo v 2. žaro in potegnemo kroglo.

Dogodki so torej naslednji (glej tudi sliko 6.13):

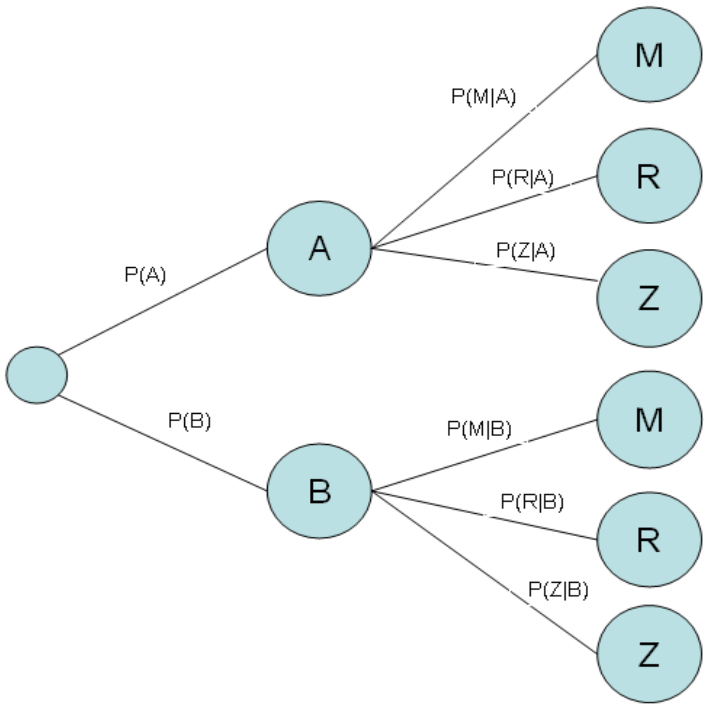
A = "sežemo v 1. žaro in potegnemo kroglo"

B = "sežemo v 2. žaro in potegnemo kroglo "

M = "potegnemo modro"

R = "potegnemo rdečo"

Z = "potegnemo zeleno"



Slika 6.13: Primer Bayesovega pravila III

Izračunajte:

Verjetnost, da smo potegnili iz 1. žare, če je modra. $\Rightarrow$ *P(A|M)=?*

Verjetnost, da smo potegnili iz 1. žare, če je rdeča. $\Rightarrow$ *P(A|R)=?*

Verjetnost, da smo potegnili iz 1. žare, če je zelena. $\Rightarrow$ *P(A|Z)=?*

Verjetnost, da smo potegnili iz 2. žare, če je modra. $\Rightarrow$ *P(B|M)=?*

Verjetnost, da smo potegnili iz 2. žare, če je rdeča. $\Rightarrow$ *P(B|R)=?*

Verjetnost, da smo potegnili iz 2. žare, če je zelena. $\Rightarrow$ *P(B|Z)=?*

Najprej izračunajmo verjetnost, da z metom dveh kock zadenemo dve šestici, kar lahko zapišemo z naslednjim izrazom:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \tag{6.135}$$

Verjetnost, da z metom dveh kock ne zadenemo dveh šestic, pa je naslednja:

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{35}{36} \tag{6.136}$$

Sedaj lahko na podlagi izraza (3.27) izračunamo tudi pogojne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Najprej nas zanima verjetnost, da izvlečemo modro kroglo, če vlečemo iz 1. žare. Glede na to, da se v 1. žari nahaja 5 modrih krogel izmed vseh 40, je rezultat naslednji:

$$P(M \mid A) = \frac{5}{5 + 7 + 28} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \tag{6.137}$$

Pogojna verjetnost, da izvlečemo rdečo kroglo, če vlečemo iz 1. žare, je naslednja:

$$P(R \mid A) = \frac{7}{40} \tag{6.138}$$

Pogojna verjetnost, da izvlečemo zeleno kroglo, če vlečemo iz 1. žare, pa je naslednja:

$$P(Z \mid A) = \frac{28}{40} \tag{6.139}$$

Opazimo lahko, da je seštevek rezultatov, dobljenih v (6.137), (6.138) in (6.139) enak vrednosti 1, torej so dobljeni rezultati pravilni.

Izračunajmo sedaj na podlagi izraza (3.27) pogojne verjetnosti za dogodke, če vlečemo krogle iz 2. žare. Najprej nas zanima verjetnost, da izvlečemo modro kroglo, če vlečemo iz 2. žare. Glede na to, da se v 2. žari nahaja 27 modrih krogel izmed vseh 40, je postopek naslednji:

$$P(M \mid B) = \frac{27}{27+7+6} = \frac{27}{40} \tag{6.140}$$

Pogojna verjetnost, da izvlečemo rdečo kroglo, če vlečemo iz 2. žare, je naslednja:

$$P(R \mid B) = \frac{7}{40} \tag{6.141}$$

Pogojna verjetnost, da izvlečemo zeleno kroglo, če vlečemo iz 2. žare, pa je naslednja:

$$P(Z \mid B) = \frac{6}{40} \tag{6.142}$$

Tudi v tem primeru velja, da je seštevek rezultatov, dobljenih v (6.140), (6.141) in (6.142) enak vrednosti 1, torej so dobljeni rezultati pravilni.

Po pridobitvi delnih rezultatov, lahko sedaj na podlagi izraza (3.35) izračunamo totalne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Verjetnost, da bo izvlečena modra krogla, je naslednja:

$$P(M) = P(A) \cdot P(M \mid A) + P(B) \cdot P(M \mid B) = \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{40} + \frac{35}{36} \cdot \frac{27}{40} = 0.66 \tag{6.143}$$

Verjetnost, da bo izvlečena rdeča krogla, je naslednja:

$$P(R) = P(A)\cdot P(R\,|\,A) + P(B)\cdot P(R\,|\,B) = \frac{1}{36}\cdot\frac{7}{40} + \frac{35}{36}\cdot\frac{7}{40} = 0.175 \qquad (6.144)$$

Verjetnost, da bo izvlečena zelena krogla, pa je naslednja:

$$P(Z) = P(A)\cdot P(Z\,|\,A) + P(B)\cdot P(Z\,|\,B) = \frac{1}{36}\cdot\frac{28}{40} + \frac{35}{36}\cdot\frac{6}{40} = 0.165 \qquad (6.145)$$

Tudi v tem primeru velja naslednja zveza, ki potrjuje pravilnost izračunov:

$$P(M) + P(R) + P(Z) = 0.66 + 0.175 + 0.165 = 1 \qquad (6.146)$$

Če sedaj uporabimo Bayesovo pravilo, opredeljeno z izrazom (3.43), dobimo za verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 1. žare, pod pogojem, da je modre barve, naslednjo vrednost:

$$P(A\,|\,M) = \frac{P(M\,|\,A)\cdot P(A)}{\underbrace{P(M\,|\,A)\cdot P(A) + P(B)\cdot P(M\,|\,B)}_{P(M)}} = \frac{\frac{5}{40}\cdot\frac{1}{36}}{0.66} = 5.26\cdot 10^{-3} \qquad (6.147)$$

Verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 1. žare, pod pogojem, da je rdeče barve, je naslednja:

$$P(A\,|\,R) = \frac{P(R\,|\,A)\cdot P(A)}{P(R)} = 0.028 \qquad (6.148)$$

Verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 1. žare, pod pogojem, da je zelene barve, je naslednja:

$$P(A\,|\,Z) = \frac{P(Z\,|\,A)\cdot P(A)}{P(Z)} = 0.118 \qquad (6.149)$$

Verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 2. žare, pod pogojem, da je modre barve, je naslednja:

$$P(B \mid M) = \frac{P(M \mid B) \cdot P(B)}{P(M)} = 0.995 \tag{6.150}$$

Verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 2. žare, pod pogojem, da je rdeče barve, je naslednja:

$$P(B \mid R) = \frac{P(R \mid B) \cdot P(B)}{P(R)} = 0.972 \tag{6.151}$$

Verjetnost, da smo kroglo potegnili iz 2. žare, pod pogojem, da je zelene barve, pa je naslednja:

$$P(B \mid Z) = \frac{P(Z \mid B) \cdot P(B)}{P(Z)} = 0.882 \tag{6.152}$$

Očitno velja tudi naslednje:

$$\begin{aligned} P(A \mid M) + P(B \mid M) &= 0.0526 + 0.995 = 1 \\ P(A \mid R) + P(B \mid R) &= 0.028 + 0.972 = 1 \\ P(A \mid Z) + P(B \mid Z) &= 0.118 + 0.882 = 1 \end{aligned} \tag{6.153}$$

<u>*Primer 5:*</u>

Imamo 2 posodi s kroglicami. V prvi posodi je 5 belih in 6 modrih kroglic, ter v drugi posodi so 3 bele in 4 modre kroglice. Iz prve posode na slepo izberemo dve kroglici in ju damo v drugo posodo, nato pa odtod na slepo izvlečemo dve kroglici (glej sliko 6.14). Kolikšna je verjetnost, da sta obe izvlečeni kroglici beli, ali modri, ali ena bela in ena modra? Kolikšna je verjetnost, da sta obe izvlečeni kroglici beli pri vleku iz prve posode, če sta bili pri izboru iz druge posode obe modri?

Zapišimo obravnavane dogodke:

$H_1 = \{\text{iz 1. posode smo izvlekli 2 beli kroglici}\}$

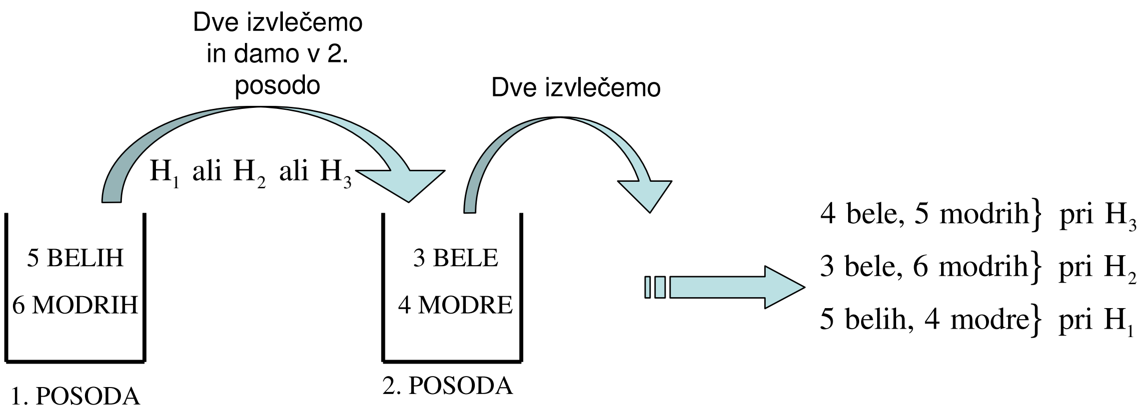
$H_2 = \{\text{iz 1. posode smo izvlekli 2 modri kroglici}\}$

$H_3 = \{\text{iz 1. posode smo izvlekli 1 belo in 1 modro kroglico}\}$

$A = \{\text{iz 2. posode smo izvleki 2 beli kroglici}\}$

$B = \{\text{iz 2. posode smo izvleki 2 modri kroglici}\}$

$C = \{\text{iz 2. posode smo izvleki 1 belo in 1 modro kroglico}\}$



Slika 6.14: Primer Bayesovega pravila IV

Najprej izračunajmo verjetnost, da iz 1. posode izvlečemo 2 beli kroglici izmed vseh enajstih. Na podlagi izraza (3.10) sledi:

$$P(H_1) = \frac{\binom{5_B}{2_B}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{11!}{9!\cdot 2!}} = \frac{5!\cdot 9!}{3!\cdot 11!} = \frac{4\cdot 5}{10\cdot 11} = \frac{2}{11} \tag{6.154}$$

Verjetnost, da iz 1. posode izvlečemo 2 modri kroglici, je naslednja:

$$P(H_2) = \frac{\binom{6_M}{2_M}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{6!}{4!\cdot 2!}}{\frac{11!}{9!\cdot 2!}} = \frac{6!\cdot 9!}{4!\cdot 11!} = \frac{5\cdot 6}{10\cdot 11} = \frac{3}{11} \tag{6.155}$$

Verjetnost, da iz 1. posode izvlečemo 1 belo in 1 modro kroglico, pa je naslednja:

$$P(H_3) = \frac{\binom{5_B}{1_B}\cdot\binom{6_M}{1_M}}{\binom{11}{2}} = \frac{5\cdot 6}{\frac{11!}{9!\cdot 2!}} = \frac{5\cdot 6\cdot 9!\cdot 2!}{11!} = \frac{6}{11} \tag{6.156}$$

Sedaj lahko na podlagi izraza (3.27) izračunamo tudi pogojne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Najprej nas zanima verjetnost, da izvlečemo 2 beli kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode prav tako izvlekli 2 beli kroglici. Pri tem v 2. posodi upoštevamo skupno 9 kroglic, saj smo 2 kroglici prenesli iz 1. v 2. posodo. Sledi:

$$P(A/H_1) = \frac{\binom{5_B}{2_B}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{5!}{3!\cdot\cancel{2!}}}{\frac{9!}{7!\cdot\cancel{2!}}} = \frac{5!\cdot 7!}{3!\cdot 9!} = \frac{4\cdot 5}{8\cdot 9} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \tag{6.157}$$

Verjetnost, da izvlečemo 2 beli kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode izvlekli 2 modri kroglici, je naslednja:

$$P(A/H_2) = \frac{\binom{3_B}{2_B}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{3!}{\cancel{2!}}}{\frac{9!}{7!\cdot\cancel{2!}}} = \frac{3!\cdot 7!}{9!} = \frac{2\cdot 3}{8\cdot 9} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36} \tag{6.158}$$

Verjetnost, da izvlečemo 2 beli kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode izvlekli 1 belo in 1 modro kroglico pa je naslednja:

$$P(A/H_3) = \frac{\binom{4_B}{2_B}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot\cancel{2!}}}{\frac{9!}{7!\cdot\cancel{2!}}} = \frac{4!\cdot 7!}{2!\cdot 9!} = \frac{3\cdot 4}{8\cdot 9} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \tag{6.159}$$

Podobno velja tudi za pogojne verjetnosti, če smo iz 2. posode izvlekli 2 modri kroglici. Najprej nas zanima verjetnost, da izvlečemo 2 modri kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode izvlekli 2 beli kroglici. Sledi:

$$P(B/H_1)=\frac{\binom{4_M}{2_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{4!\cdot 7!}{2!\cdot 9!}=\frac{3\cdot 4}{8\cdot 9}=\frac{1}{6}=\frac{6}{36} \tag{6.160}$$

Verjetnost, da izvlečemo 2 modri kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode prav tako izvlekli 2 modri kroglici, je naslednja:

$$P(B/H_2)=\frac{\binom{6_M}{2_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{\frac{6!}{4!\cdot 2!}}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{6!\cdot 7!}{4!\cdot 9!}=\frac{5\cdot 6}{8\cdot 9}=\frac{15}{36} \tag{6.161}$$

Verjetnost, da izvlečemo 2 modri kroglici iz 2. posode, če smo iz 1. posode izvlekli 1 belo in 1 modro kroglico, pa je naslednja:

$$P(B/H_3)=\frac{\binom{5_M}{2_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{5!\cdot 7!}{3!\cdot 9!}=\frac{4\cdot 5}{8\cdot 9}=\frac{5}{18}=\frac{10}{36} \tag{6.162}$$

Podobno velja tudi za pogojne verjetnosti, če smo iz 2. posode izvlekli 1 belo in 1 modro kroglico. Sledi:

$$P(C/H_1)=\frac{\binom{5_B}{1_B}\cdot\binom{4_M}{1_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{5\cdot 4}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{5\cdot 4\cdot 2!\cdot 7!}{9!}=\frac{4\cdot 5\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$$

$$P(C/H_2)=\frac{\binom{3_B}{1_B}\cdot\binom{6_M}{1_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{3\cdot 6}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{3\cdot 6\cdot 2\cdot 7!}{9!}=\frac{3\cdot 6\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{4}{8}=\frac{18}{36} \tag{6.163}$$

$$P(C/H_3)=\frac{\binom{4_B}{1_B}\cdot\binom{5_M}{1_M}}{\binom{9}{2}}=\frac{5\cdot 4}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}=\frac{5\cdot 4\cdot 2\cdot 7!}{9!}=\frac{4\cdot 5\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$$

Po izračunu pogojnih verjetnosti lahko sedaj na podlagi izraza (3.35) izračunamo totalne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Verjetnost, da bomo iz 2. posode izvlekli 2 beli kroglici, je naslednja:

$$\begin{aligned}&P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=\\&=\frac{10}{55}\cdot\frac{10}{36}+\frac{3}{11}\cdot\frac{3}{36}+\frac{6}{11}\cdot\frac{6}{36}=0.1641\end{aligned} \tag{6.164}$$

Verjetnost, da bomo iz 2. posode izvlekli 2 modri kroglici, je naslednja:

$$\begin{aligned}&P(B)=P(H_1)\cdot P(B/H_1)+P(H_2)\cdot P(B/H_2)+P(H_3)\cdot P(B/H_3)=\\&=\frac{10}{55}\cdot\frac{6}{36}+\frac{3}{11}\cdot\frac{15}{36}+\frac{6}{11}\cdot\frac{10}{36}=0.295\end{aligned} \tag{6.165}$$

Verjetnost, da bomo iz 2. posode izvlekli 1 belo in 1 modro kroglico, pa je naslednja:

$$\begin{aligned}&P(C)=P(H_1)\cdot P(C/H_1)+P(H_2)\cdot P(C/H_2)+P(H_3)\cdot P(C/H_3)=\\&=\frac{10}{55}\cdot\frac{20}{36}+\frac{3}{11}\cdot\frac{18}{36}+\frac{6}{11}\cdot\frac{20}{36}=0.5404\end{aligned} \tag{6.166}$$

Sledi:

$$P(A)+P(B)+P(C)=0.1641+0.295+0.5404=0.9995 \tag{6.167}$$

Glede na to, da je seštevek rezultatov v izrazih (6.164), (6.165) in (6.166) enak vrednosti 1, smo s tem potrdili dobljene izračune.

Če sedaj uporabimo še Bayesovo pravilo, opredeljeno v izrazu (3.43), dobimo naslednje:

$$P(H_1/B)=\frac{P(H_1)\cdot P(B/H_1)}{P(B)}=\frac{\frac{10}{55}\cdot\frac{6}{36}}{0.295}=0.102 \tag{6.168}$$

Torej je 10.2 % verjetnost, da sta obe izvlečeni kroglici beli pri vleku iz prve posode, če sta bili pri izboru iz druge posode obe modri.

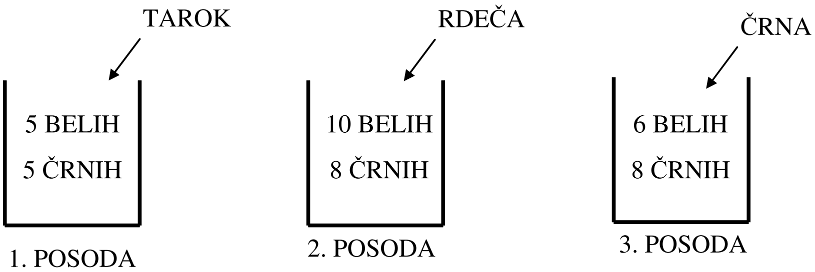
<u>Primer 6:</u>

Imamo karte za tarok (54 kart: 22 tarokov, 16 rdečih in 16 črnih), ter 3 posode s kroglami. V prvi posodi je 5 belih in 5 črnih, v drugi posodi je 10 belih in 8 črnih, v tretji posodi pa 6 belih in 8 črnih. Dvofazni poskus poteka takole:

1. *FAZA: Iz kupa kart potegnemo eno karto.*
2. *FAZA: Iz ene od posod izberemo eno kroglo.*

Naj velja pravilo (slika 6.15):

- *Če iz šopa kart potegnemo tarok, bomo kroglo vzeli iz prve posode.*
- *Če iz šopa kart potegnemo rdečo karto, bomo kroglo vzeli iz druge posode.*
- *Če iz šopa kart potegnemo črno karto, pa bomo kroglo vzeli iz tretje posode.*



Slika 6.15: Primer Bayesovega pravila Va

Dogodki so naslednji:

$H_1 = \{\text{izvlečena karta je tarok}\}$ TAROK $\rightarrow$ 1. POSODA

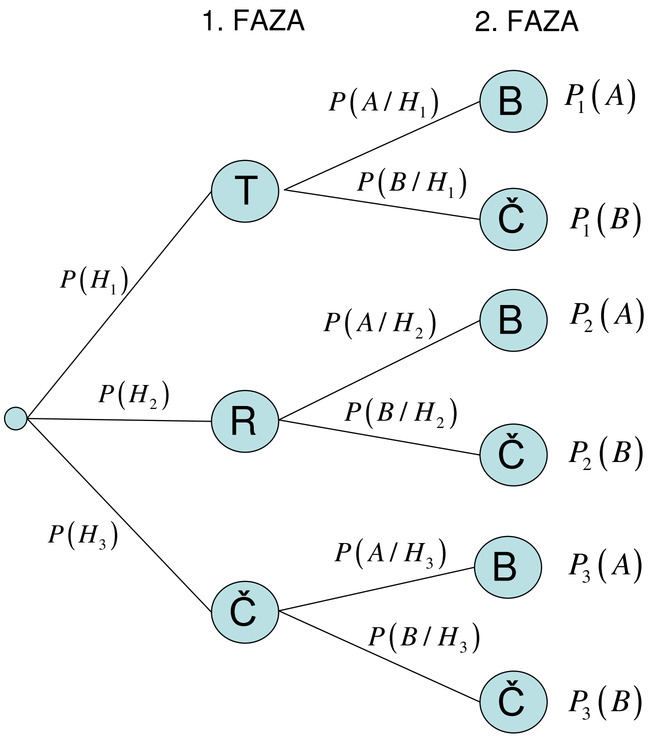
$H_2 = \{\text{izvlečena karta je rdeča}\}$ RDEČA $\rightarrow$ 2. POSODA

$H_3 = \{\text{izvlečena karta je črna}\}$ ČRNA $\rightarrow$ 3. POSODA

$A = \{\text{izvlečena krogla je bela}\}$

$B = \{\text{izvlečena krogla je črna}\}$

$$54 \text{ kart}\} \begin{array}{l} \nearrow 22 \text{ tarokov} \\ \rightarrow 16 \text{ rdečih} \\ \searrow 16 \text{ črnih} \end{array}$$



Slika 6.16: Primer Bayesovega pravila Vb

Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

a) da je izbrana krogla bela $(P(A) = ?)$*;*

b) da je izbrana krogla črna $(P(B) = ?)$*;*

c) da je krogla je iz prve posode, če smo potegnili belo kroglo $(P(H_1/A) = ?)$*;*

d) da je krogla iz prve posode, če smo potegnili črno kroglo $(P(H_1/B) = ?)$*.*

Najprej izračunajmo verjetnost, da je izvlečena karta tarok. Na osnovi izraza (3.10) sledi:

$$P(H_1) = \frac{22_T}{54} = \frac{11}{27} \tag{6.169}$$

Verjetnost, da je izvlečena karta rdeče barve, je naslednja:

$$P(H_2) = \frac{16_R}{54} = \frac{8}{27} \tag{6.170}$$

Verjetnost, da je izvlečena karta črne barve, pa je naslednja:

$$P(H_3) = \frac{16_Č}{54} = \frac{8}{27} \tag{6.171}$$

Sedaj lahko na osnovi izraza (3.27) izračunamo tudi pogojne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Najprej nas zanima verjetnost, da izvlečemo belo kroglo iz 1. posode pod pogojem, da je bila predhodno izvlečena karta tarok. Sledi:

$$\left. P(A/H_1) = \frac{5_B}{5_B + 5_Č} = \frac{1}{2} \right\} \text{V prvo posodo bomo šli le, če je bil tarok} \tag{6.172}$$

Verjetnost, da izvlečemo belo kroglo iz 2. posode, če je predhodno bila izvlečena karta rdeče barve, je naslednja:

$$\left. P(A/H_2) = \frac{10_B}{10_B + 8_Č} = \frac{5}{9} \right\} \text{V drugo posodo bomo šli le, če je bila rdeča karta} \tag{6.173}$$

Verjetnost, da izvlečemo belo kroglo iz 3. posode, če je predhodno bila izvlečena karta črne barve, pa je naslednja:

$$\left. P(A/H_3) = \frac{6_B}{6_B + 8_Č} = \frac{3}{7} \right\} \text{V tretjo posodo bomo šli le, če je bila črna karta} \tag{6.174}$$

Podobno velja tudi za pogojne verjetnosti, da bo izvlečena krogla črne barve. Za verjetnost, da izvlečemo črno kroglo iz 1. posode, če je predhodno bila izvlečena karta tarok, sledi:

$$P(B/H_1)=\frac{5_{\check{C}}}{5_{\check{C}}+5_B}=\frac{1}{2} \tag{6.175}$$

Verjetnost, da izvlečemo črno kroglo iz 2. posode, če je predhodno bila izvlečena karta rdeče barve, je naslednja:

$$P(B/H_2)=\frac{8_{\check{C}}}{8_{\check{C}}+10_B}=\frac{4}{9} \tag{6.176}$$

Verjetnost, da izvlečemo črno kroglo iz 3. posode, če je predhodno bila izvlečena karta črne barve, pa je naslednja:

$$P(B/H_3)=\frac{8_{\check{C}}}{8_{\check{C}}+6_B}=\frac{4}{7} \tag{6.177}$$

Po izpeljavi pogojnih verjetnosti lahko sedaj na podlagi izraza (3.35) izračunamo totalne verjetnosti za vse obravnavane dogodke. Za verjetnost, da bomo izvlekli kroglo bele barve, sledi:

$$\begin{aligned} P(A)&=\underbrace{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}_{P_1(A)}+\underbrace{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}_{P_2(A)}+\underbrace{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}_{P_3(A)}= \\ &=\frac{11}{27}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8}{27}\cdot\frac{5}{9}+\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1685}{3402}=0.495 \end{aligned} \tag{6.178}$$

Verjetnost, da bomo izvlekli kroglo črne barve, pa je naslednja:

$$P(B) = \underbrace{P(H_1)\cdot P(B/H_1)}_{P_1(B)} + \underbrace{P(H_2)\cdot P(B/H_2)}_{P_2(B)} + \underbrace{P(H_3)\cdot P(B/H_3)}_{P_3(B)} = \\ = \frac{11}{27}\cdot\frac{1}{2} + \frac{8}{27}\cdot\frac{4}{9} + \frac{8}{27}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1717}{3402} = 0.505 \tag{6.179}$$

Ker velja $P(A)+P(B)=0.495+0.505=1$, sta dobljena rezultata pravilna.

Če sedaj uporabimo še Bayesovo pravilo, opredeljeno v izrazu (3.43), dobimo naslednje:

$$P(H_1/A) = \frac{\overbrace{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}^{P_1(A)}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}_{P(A)}} = \frac{\frac{11}{27}\cdot\frac{1}{2}}{0.495} = 0.411 \tag{6.180}$$

Torej je 41.1 % verjetnost, da je krogla iz prve posode, če smo potegnili belo kroglo.

Verjetnost, da je krogla iz prve posode, če smo potegnili kroglo črne barve, pa je naslednja:

$$P(H_1/B) = \frac{\overbrace{P(H_1)\cdot P(B/H_1)}^{P_1(B)}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(B/H_i)}_{P(B)}} = \frac{\frac{11}{27}\cdot\frac{1}{2}}{0.505} = 0.4033 \tag{6.181}$$

<u>*Primer 7:*</u>

Na letalo streljajo s tremi topovi. Prvi top zadane z verjetnostjo 0.4, drugi top z verjetnostjo 0.5 in tretji top z verjetnostjo 0.6. Če je letalo enkrat zadeto, se zruši z verjetnostjo 0.3, če je zadeto dvakrat, se zruši z verjetnostjo 0.6, če pa je trikrat zadeto, se gotovo zruši. Kolikšna je verjetnost, da bo letalo sestreljeno, ko bodo vsi trije topi hkrati ustrelili $(P(A)=?)$ *?*

Poznamo informacije o sledečih dogodkih:

$T_1 = \{\text{letalo zadel 1.top}\}$ $\quad P(T_1) = 0.4$

$T_2 = \{\text{letalo zadel 2.top}\}$ $\quad P(T_2) = 0.5$

$T_3 = \{\text{letalo zadel 3.top}\}$ $\quad P(T_3) = 0.6$

Označimo dogodke 1. FAZE:

$H_0 = \{\text{letalo ni bilo zadeto}\}$

$H_1 = \{\text{letalo enkrat zadeto}\}$

$H_2 = \{\text{letalo dvakrat zadeto}\}$

$H_3 = \{\text{letalo trikrat zadeto}\}$

Označimo tudi dogodka 2. FAZE:

$A = \{\text{letalo je bilo sestreljeno}\}$

$B = \{\text{letalo ni bilo sestreljeno}\}$

Na osnovi teksta naloge lahko zapišemo še:

letalo ni zadeto - se ne zruši $\Rightarrow P(A/H_0) = 0$

letalo zadeto 1 krat $\Rightarrow P(A/H_1) = 0.3$

letalo zadeto 2 krat $\Rightarrow P(A/H_2) = 0.6$

letalo zadeto 3 krat $\Rightarrow P(A/H_3) = 1$

Glede na to, da gre za dvo-fazen proces, sledi:

1. FAZA: Število zadetkov v letalo.
2. FAZA: Ali se letalo zruši ali ne.

Najprej izračunajmo verjetnost, da letalo ni bilo zadeto:

$$\begin{aligned} P(H_0) &= P(\overline{T}_1 \cdot \overline{T}_2 \cdot \overline{T}_3) = P(\overline{T}_1) \cdot P(\overline{T}_2) \cdot P(\overline{T}_3) \\ &= 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.12 \end{aligned} \tag{6.182}$$

Verjetnost, da je letalo enkrat zadeto, je naslednja:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P(T_1 \cdot \overline{T}_2 \cdot \overline{T}_3 + \overline{T}_1 \cdot T_2 \cdot \overline{T}_3 + \overline{T}_1 \cdot \overline{T}_2 \cdot T_3) = \\ &= P(T_1) \cdot P(\overline{T}_2) \cdot P(\overline{T}_3) + P(\overline{T}_1) \cdot P(T_2) \cdot P(\overline{T}_3) + P(\overline{T}_1) \cdot P(\overline{T}_2) \cdot P(T_3) = \\ &= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.38 \end{aligned} \tag{6.183}$$

Verjetnost, da je letalo dvakrat zadeto, je naslednja:

$$\begin{aligned}
&P(H_2) = P\left(T_1 \cdot T_2 \cdot \overline{T}_3 + T_1 \cdot \overline{T}_2 \cdot T_3 + \overline{T}_1 \cdot T_2 \cdot T_3\right) = \\
&= P(T_1) \cdot P(T_2) \cdot P\left(\overline{T}_3\right) + P(T_1) \cdot P\left(\overline{T}_2\right) \cdot P(T_3) + P\left(\overline{T}_1\right) \cdot P(T_2) \cdot P(T_3) = \\
&= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.38
\end{aligned} \tag{6.184}$$

Verjetnost, da je letalo trikrat zadeto, pa je naslednja:

$$\begin{aligned}
&P(H_3) = P(T_1 \cdot T_2 \cdot T_3) = P(T_1) \cdot P(T_2) \cdot P(T_3) \\
&= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.12
\end{aligned} \tag{6.185}$$

Sledi:

$$P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0.12 + 0.38 + 0.38 + 0.12 = 1 \tag{6.186}$$

Ker je seštevek rezultatov v izrazih (6.182), (6.183), (6.184) in (6.185) enak vrednosti 1, smo potrdili dobljene izračune.

Sedaj lahko na osnovi izraza (3.35) izračunamo še totalno verjetnost, da bo letalo sestreljeno, ko bodo vsi trije topi hkrati ustrelili. Sledi:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(H_0) \cdot P(A / H_0) + P(H_1) \cdot P(A / H_1) + \\
&\quad + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3) = \\
&= 0.12 \cdot 0 + 0.38 \cdot 0.3 + 0.38 \cdot 0.6 + 0.12 \cdot 1 = 0.462
\end{aligned} \tag{6.187}$$

Izračunajmo še naslednje. Če je bilo letalo sestreljeno, kolikšna je verjetnost, da je bilo zadeto natanko enkrat, ali natanko dvakrat, ali natanko trikrat?

Pri tem izračunu bomo uporabili Bayesovo pravilo, opredeljeno z izrazom (3.43). Najprej nas zanima verjetnost, da je bilo letalo zadeto natanko enkrat, če je bilo sestreljeno. Sledi:

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)\cdot P(H_1)}{\underbrace{\sum_{i=0}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}_{P(A)}}=\frac{0.3\cdot 0.38}{0.462}=0.246 \tag{6.188}$$

Verjetnost, da je bilo letalo zadeto natanko dvakrat, če je bilo sestreljeno, je naslednja:

$$P(H_2/A)=\frac{P(A/H_2)\cdot P(H_2)}{P(A)}=\frac{0.6\cdot 0.38}{0.462}=0.493 \tag{6.189}$$

Verjetnost, da je bilo letalo zadeto natanko trikrat, če je bilo sestreljeno, pa je naslednja:

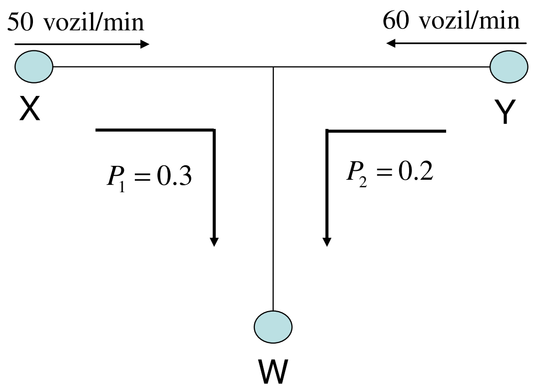
$$P(H_3/A)=\frac{P(A/H_3)\cdot P(H_3)}{P(A)}=\frac{1\cdot 0.12}{0.462}=0.2597 \tag{6.190}$$

Če naredimo še preizkus:

$$\begin{aligned} P(H_0/A)=0 \;\Rightarrow\; & P(H_0/A)+P(H_1/A)+P(H_2/A)+P(H_3/A)= \\ & =0+0.246+0.493+0.2597=0.998\sim 1 \end{aligned} \tag{6.191}$$

Torej smo potrdili dobljene izračune, saj so rezultati skladni. To pomeni, če je bilo sestreljeno, je bilo gotovo zadeto ali enkrat, ali dvakrat, ali pa trikrat.

<u>Primer 8:</u> *Gostota prometa iz kraja X v kraj Y je 50 vozil/min, iz kraja Y v kraj X pa 60 vozil/min. Med krajema X in Y je odcep proti kraju W. Vozila iz smeri X zavijajo proti W z verjetnostjo 0.3, vozila iz Y pa zavijajo proti W z verjetnostjo 0.2. Kolikšna je verjetnost, da je vozilo v kraj W prišlo iz smeri Y (slika 6.17)?*



Slika 6.17: Primer Bayesovega pravila VI

Dogodki so naslednji:

$H_1 = \{\text{vozilo prihaja iz X}\}$

$H_2 = \{\text{vozilo prihaja iz Y}\}$

$A = \{\text{vozilo je zavilo v W}\}$

Zanima nas torej naslednje:

$P(H_2 / A) = ?$

Najprej izračunajmo verjetnost prihodov vozil iz kraja X na osnovi izraza (3.10):

$$P(H_1) = \frac{50_X}{50_X + 60_Y} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11} \tag{6.192}$$

Verjetnost prihodov vozil iz kraja Y pa je naslednja:

$$P(H_2) = \frac{60_Y}{50_X + 60_Y} = \frac{60}{110} = \frac{6}{11} \tag{6.193}$$

Na osnovi podatkov naloge lahko zapišemo naslednje:

$P(A / H_1) = P_1 = 0.3$

$P(A / H_2) = P_2 = 0.2$

Če uporabimo izraz (3.35) za izračun totalne verjetnosti, dobimo za obravnavan primer naslednje:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = \\ &= \frac{5}{11}\cdot 0.3 + \frac{6}{11}\cdot 0.2 = 0.245 \end{aligned} \tag{6.194}$$

Na osnovi izraza (3.43) pa lahko izračunamo še verjetnost, da je vozilo v kraj W prišlo iz smeri Y. Sledi:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{2} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}_{P(A)}} = \frac{\frac{6}{11}\cdot 0.2}{0.245} = 0.4\overline{4} \tag{6.195}$$

<u>Primer 9:</u>

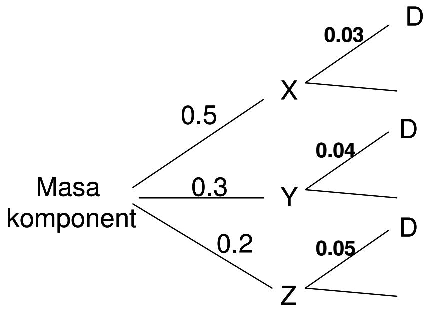
Tovarna za proizvodnjo določene komponente uporablja 3 stroje X, Y in Z. Predpostavimo, da:

- *stroj X proizvede 50 % komponent, od katerih je 3 % defektnih,*
- *stroj Y proizvede 30 % komponent, od katerih je 4 % defektnih,*
- *stroj Z proizvede 20 % komponent, od katerih je 5 % defektnih.*

Izračunajte verjetnost, da je naključno izbran izdelek (komponenta) defekten. Izračunajte verjetnost, da je bil izdelek narejen na strojih X, Y oz. Z, če je defekten.

Najprej narišimo skico obravnavanega problema (glej sliko 6.18).

X = 'komponenta je narejena na stroju X'
Y = 'komponenta je narejena na stroju Y'
Z = 'komponenta je narejena na stroju Z'
D = 'komponenta je defektna'



Slika 6.18: Primer Bayesovega pravila VII

Na osnovi izraza (3.35) izračunajmo totalno verjetnost, da je naključno izbran izdelek defekten:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(X)\cdot P(D\,|\,X) + P(Y)\cdot P(D\,|\,Y) + P(Z)\cdot P(D\,|\,Z) = \\ &= 0.5\cdot 0.03 + 0.3\cdot 0.04 + 0.2\cdot 0.05 = 0.037 \end{aligned} \tag{6.196}$$

Če sedaj uporabimo Bayesovo pravilo, opredeljeno z izrazom (3.43), je verjetnost, da je bil izdelek narejen na stroju *X*, če je defekten, naslednja:

$$P(X\,|\,D) = \frac{P(X)\cdot P(D\,|\,X)}{P(D)} = \frac{0.5\cdot 0.03}{0.037} = 0.4054 \tag{6.197}$$

Za verjetnost, da je bil izdelek narejen na stroju *Y*, če je defekten, sledi:

$$P(Y\,|\,D) = \frac{P(Y)P(D\,|\,Y)}{P(D)} = \frac{0.3\cdot 0.04}{0.037} = 0.3243 \tag{6.198}$$

Verjetnost, da je bil izdelek narejen na stroju *Z*, če je defekten, pa je naslednja:

$$P(Z\,|\,D) = \frac{P(Z)P(D\,|\,Z)}{P(D)} = \frac{0.2\cdot 0.05}{0.037} = 0.2702 \tag{6.199}$$

Preizkus pravilnosti rezultatov (če vemo, da je defekten, je gotovo prišel bodisi iz stroja X, Y, ali Z):

$$P(X \mid D) + P(Y \mid D) + P(Z \mid D) = 0.4057 + 0.3243 + 0.2702 \simeq 1$$

6.3 Primeri iz teorije verjetnosti

Primere, ki jih bomo reševali v tem poglavju, lahko razdelimo na naslednje kategorije:

- diskretne naključne spremenljivke,
- številske karakteristike za diskretne porazdelitve,
- zvezne naključne spremenljivke in številske karakteristike za zvezne porazdelitve,
- pričakovanje funkcij naključnih spremenljivk,
- transformacijska metoda,
- združeno porazdeljene naključne spremenljivke,
- mejne in pogojne porazdelitve,
- pričakovanje za združene porazdelitve več naključnih spremenljivk.

6.3.1 Diskretne naključne spremenljivke

Primer 1:

Slučajna spremenljivka X naj bo število pik pri metu igralne kocke. Zapiši njeno zalogo vrednosti in verjetnostno shemo.

Najprej zapišimo zalogo vrednosti slučajne spremenljivke *X*, ki je naslednja:

$$Z_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{6.200}$$

Zapišimo še verjetnosti, da slučajna spremenljivka *X* zavzame vrednosti, zapisane v zalogi vrednosti:

$$P(1)=\frac{1}{6}, \quad P(2)=\frac{1}{6}, \quad P(3)=\frac{1}{6}, \quad P(4)=\frac{1}{6}, \quad P(5)=\frac{1}{6}, \quad P(6)=\frac{1}{6} \tag{6.201}$$

Verjetnostna shema je torej na osnovi izraza (3.44) naslednja:

$$X:\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{6.202}$$

<u>Primer 2</u>:

V posodi imamo 3 bele in 7 črnih krogel. Iz posode potegnemo eno kroglo in je ne vrnemo. Če je le-ta črna, nehamo, če pa je bela, nadaljujemo toliko časa, dokler ni črna. Zapiši verjetnostno shemo, če slučajna spremenljivka X predstavlja število izvlečenih krogel.

Najprej zapišimo verjetnosti za slučajno spremenljivko *X*. V primeru, ko je prva izvlečena krogla črne barve, je verjetnost naslednja:

$$P(\text{ena izvlečena})=\frac{7_{Č}}{10} \;\Big\}\; \text{črna izvlečena že v 1. potezi} \tag{6.203}$$

Torej je verjetnost 70 %, da bomo igro po prvem poskusu zaključili, saj smo potegnili črno kroglo. V primeru, ko pa najprej izvlečemo kroglo bele barve in nato še kroglo črne barve, je verjetnost naslednja:

$$P(\text{dve izvlečeni})=\frac{3_B}{10}\cdot\frac{7_Č}{9}=\frac{7}{30} \tag{6.204}$$

Izračunajmo še verjetnost za slučajno spremenljivko *X*, če v prvih dveh poskusih izvlečemo belo kroglo, ter v tretjem poskusu črno kroglo. Sledi:

$$P(\text{tri izvlečene})=\frac{3_B}{10}\cdot\frac{2_B}{9}\cdot\frac{7_Č}{8}=\frac{7}{120} \tag{6.205}$$

Glede na to, da se v posodi nahajajo tri bele krogle, izračunajmo še verjetnost za slučajno spremenljivko *X*, če v prvih treh poskusih izvlečemo belo kroglo, ter v četrtem poskusu črno kroglo. Sledi:

$$P(\text{štiri izvlečene}) = \frac{3_B}{10}\cdot\frac{2_B}{9}\cdot\frac{1_B}{8}\cdot\frac{7_{\check{C}}}{7} = \frac{1}{120} \quad \rightarrow \text{Tu je igra gotovo končana} \tag{6.206}$$

Verjetnostna shema je torej na osnovi izraza (3.44) naslednja:

$$X : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{7}{10} & \dfrac{7}{30} & \dfrac{7}{120} & \dfrac{1}{120} \end{bmatrix} \tag{6.207}$$

Naredimo preizkus pravilnosti rezultatov:

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{30}+\frac{7}{120}+\frac{1}{120}=\frac{84+28+7+1}{120}=1$$

<u>*Primer 3*</u>*:*

Kovanec mečemo trikrat. Naj diskretna slučajna spremenljivka X predstavlja število izidov, ko pade hrbet H. *Poiščite verjetnosti za posamezne izide spremenljivke X, ter narišite funkcijo porazdelitve verjetnosti.*

Po trojnem metu kovanca je prostor možnih izidov naslednji:

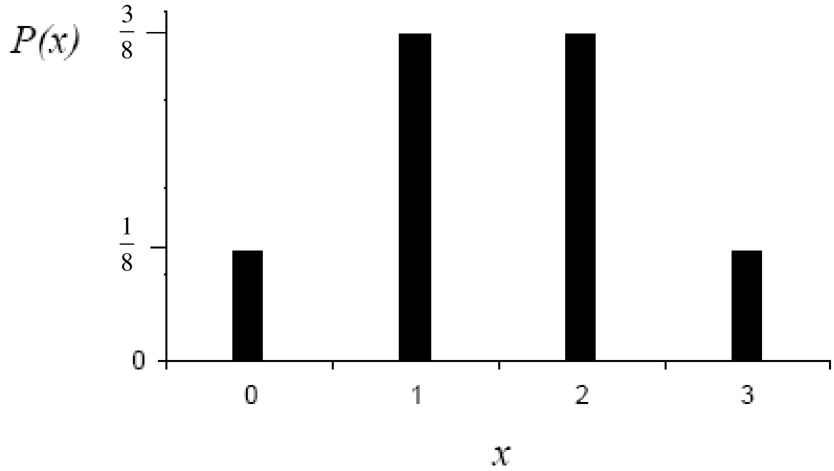
$$\text{Prostor izidov } = \begin{Bmatrix} \text{HHH}(3),\ \text{HH}\overbrace{\text{G}}^{\text{glava}}(2),\ \text{HGH}(2),\ \text{GHH}(2), \\ \text{HGG}(1),\ \text{GHG}(1),\ \text{GGH}(1),\ \text{GGG}(0) \end{Bmatrix} \tag{6.208}$$

kjer smo s številkami v oklepaju označili, kolikokrat je padel hrbet H.

Izračunajmo verjetnosti za posamezne izide spremenljivke *X*. Sledi:

$$
\begin{aligned}
&P(0) = P[X = 0] = P\left[\{\mathrm{GGG}\}\right] = \frac{1}{8} \\
&P(1) = P[X = 1] = P\left[\{\mathrm{HGG}\},\{\mathrm{GHG}\},\{\mathrm{GGH}\}\right] = \frac{3}{8} \\
&P(2) = P[X = 2] = P\left[\{\mathrm{HHG}\},\{\mathrm{HGH}\},\{\mathrm{GHH}\}\right] = \frac{3}{8} \\
&P(3) = P[X = 3] = P\left[\{\mathrm{HHH}\}\right] = \frac{1}{8} \\
&P(x) = P[X = x] = P[\phi] = 0 \quad \Rightarrow \text{ za ostale } x
\end{aligned}
\tag{6.209}
$$

Na osnovi izračunanih izrazov v (6.209) lahko sedaj narišemo funkcijo porazdelitve verjetnosti, kar prikazuje Slika 6.19.



Slika 6.19: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri trojnem metu kovanca

<u>*Primer 4:*</u>

Dano imamo diskretno naključno spremenljivko X, za katero velja naslednja verjetnostna shema:

$$
X : \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \tag{6.210}
$$

Za verjetnostno shemo, zapisano v izrazu (6.210), *poiščite kumulativno porazdelitveno funkcijo!*

Na osnovi izraza (3.52) za diskretno kumulativno porazdelitev verjetnosti velja:

$$F(x) = \sum_{x_k \le X} P(x_k) \tag{6.211}$$

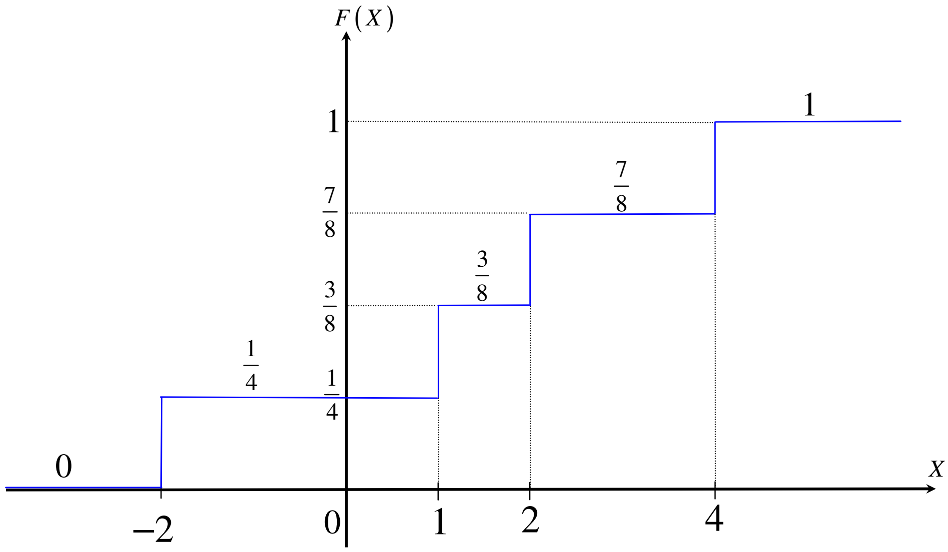
Za podano verjetnostno shemo, zapisano v izrazu (6.210), so torej vrednosti funkcije kumulativne porazdelitve verjetnosti naslednje:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,; & x < -2 \\ \frac{1}{4}\,; & -2 \le x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,; & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\,; & 2 < x \le 4 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,; & x > 4 \end{cases} \tag{6.212}$$

Sledi:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,; & x < -2 \\ \frac{1}{4}\,; & -2 \le x < 1 \\ \frac{3}{8}\,; & 1 < x < 2 \\ \frac{7}{8}\,; & 2 < x \le 4 \\ 1\,; & x > 4 \end{cases} \tag{6.213}$$

Na osnovi izračunanih vrednosti kumulativne porazdelitve verjetnosti v izrazu (6.213) lahko sedaj narišemo kumulativno porazdelitveno funkcijo, kar prikazuje Slika 6.20.



Slika 6.20: Kumulativna funkcija porazdelitve verjetnosti pri dani verjetnostni shemi

<u>*Primer 5:*</u>

V posodi imamo 1 modro in 2 rdeči krogli. Petkrat na slepo potegnemo eno kroglo, pri čemer jo vsakič vrnemo. Zapiši verjetnostno shemo, če je slučajna spremenljivka X število izvlečenih modrih krogel.

Glede na to, da petkrat izvlečemo po eno kroglo, je $n=5$. Pri tem pa zaloga vrednosti slučajne spremenljivke *X* lahko zavzame vrednosti $k=0,1,2,3,4,5$.

Ker sta pri vsakem poskusu vlečenja krogle možna dva izida, tj. M (izvlečemo modro kroglo) ali R (izvlečemo rdečo kroglo), ima slučajna spremenljivka *X* očitno binomsko porazdelitev, kjer petkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Vendar, ker imamo v posodi 1 modro in 2 rdeči krogli, velja naslednje:

$$\begin{aligned} p &= P(\mathrm{M}) = \frac{1}{3} \\ q &= P(\mathrm{R}) = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{6.214}$$

Verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke *X* izračunamo s pomočjo izraza (3.66). Sledi:

$$
\begin{aligned}
&P_5(k)=\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}, k=0,1,2,3,4,5\\
&P_5(0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^5\doteq 0.132\\
&P_5(1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^4}{3^4}=\frac{5\cdot 2^4}{3^5}=0.329\\
&P_5(2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2^3}{3^3}=\frac{5\cdot 2^4}{3^5}=0.329\\
&P_5(3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{2^2}{3^2}=\frac{5\cdot 2^3}{3^5}=0.164\\
&P_5(4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-4}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3^5}=0.0411\\
&P_5(5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-5}=\frac{1}{3^5}=4.115\cdot 10^{-3}
\end{aligned}
\tag{6.215}
$$

Sedaj lahko zapišemo še verjetnostno shemo za naključno spremenljivko X pri petkratni ponovitvi Bernoullijevega poskusa (Slika 6.21).

$$
X:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0.132 & \boxed{0.329 \quad 0.329} & & 0.164 & 0.0411 & \boxed{4.115\cdot 10^{-3}} \end{bmatrix}
$$

Še najbolj verjetno je, da bomo enkrat ali dvakrat potegnili edino modro.

Zelo majhna verjetnost, da bi petkrat potegnili edino modro.

Slika 6.21: Verjetnostna shema za naključno spremenljivko X pri petkratni ponovitvi Bernoullijevega poskusa

<u>*Primer 6:*</u>

Žara vsebuje 3 bele in 9 rdečih krogel. Izračunajte verjetnost, da potegnemo pri šestih vlečenjih dvakrat belo kroglo, pri čemer krogle vračamo v žaro.

Glede na to, da šestkrat izvlečemo po eno kroglo, je $n=6$. Ker nas zanima verjetnost, da pri šestih vlečenjih potegnemo belo kroglo dvakrat, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost le pri $x=2$. Glede na to, da sta pri vsakem poskusu vlečenja krogle možna dva izida, tj. B (izvlečemo belo kroglo) ali R (izvlečemo rdečo kroglo), imamo opravka z binomsko porazdelitvijo, kjer šestkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Vendar, ker imamo v posodi 3 bele in 9 rdečih krogel, velja naslednje:

$$\begin{aligned} p &= P(\mathrm{B}) = \frac{3}{12} = 0.25 = \frac{1}{4} \\ q &= P(\mathrm{R}) = \frac{9}{12} = 0.75 = \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{6.216}$$

Verjetnost, za nastop vrednosti $x = 2$ obravnavane naključne spremenljivke izračunamo s pomočjo izraza (3.66), ki ga lahko zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$P(n, p, x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \tag{6.217}$$

V našem primeru dobimo:

$$\begin{aligned} P(6, \frac{3}{12}, 2) &= \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{6-2} = \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(6-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{15}{16} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{5 \cdot 3^5}{4^6} = 0.2966 \end{aligned} \tag{6.218}$$

Torej je verjetnost 29.6 %, da pri 6 vlečenjih potegnemo belo kroglo dvakrat, pri čemer krogle vračamo v žaro.

Primer 7:

Igralno kocko vržemo petkrat, torej $n = 5$. Kolikšna je verjetnost, da v petih metih natanko dvakrat vržemo šestico?

Glede na to, da nas zanima verjetnost, da pri petih metih igralne kocke (n = 5) natanko dvakrat vržemo šestico, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost le pri $k=2$. Ker je pri vsakem poskusu metanja kocke možnih šest izidov, označimo z *A* verjetnost, da v posameznem poskusu zadenemo šestico. Sledi:

$$\begin{aligned} &A=\{vr\check{z}emo\ \check{s}estico\} \\ &P(A)=p=\frac{1}{6} \\ &P(\overline{A})=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=q \end{aligned} \tag{6.219}$$

Na osnovi izraza (3.66) je verjetnost, da v petih metih igralne kocke natanko dvakrat vržemo šestico naslednja:

$$P_n(k)=P_5(2)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^3}{6^3}=\frac{2\cdot 5^4}{6^5}=0.160 \tag{6.220}$$

<u>*Primer 8:*</u>

Kovanec mečemo desetkrat, torej $n=10$. Glede na to, da sta pri vsakem poskusu metanja kovanca možna dva izida, tj. G (glava) ali H (hrbet), imamo opravka z binomsko porazdelitvijo, kjer desetkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Narišite binomsko porazdelitev.

Kot že vemo, je verjetnost, da v posameznem poskusu pade glava ali hrbet, enaka:

$$p=q=\frac{1}{2} \tag{6.221}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke pri desetkratnem metu kovanca. Pri tem upoštevamo izraz (3.66), pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} &P(n,p,x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}=\binom{10}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-x}= \\ &=\binom{10}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}; \qquad x=0,1,2,\ldots,10 \end{aligned} \tag{6.222}$$

Za izračun verjetnosti za vse $x = 0,1,2,...,10$ iz izraza (6.222) lahko uporabimo tudi katerega izmed računalniških programov, kot je npr. Matlab, Scilab, FreeMat ipd. Le-ti nam poleg hitrega izračunavanja posameznih izrazov omogočajo tudi grafično prikazovanje rezultatov. Program v scilabu bi zgledal takole:

```
// binomska porazdelitev
function [P] = binomska(n,p,x)
P = [];
for i = 1:length(x)
    C = fact(n)/fact(x(i))/fact(n-x(i));
    P = [P;[n p x(i) C*p^x(i)*(1-p)^(n-x(i))]];
end
if length(x) > 1
   plot(P(:,3),P(:,4))
   plot(P(:,3),P(:,4),'ro')
   astr = ['binomska porazdelitev za (n,p,x)=' string(n) ',' string(p) ];
   title(astr)
end
endfunction
```

kjer je funkcija fact določena takole:

```
function x = fact(k)
if k < 1 then
   k = 1
end
x=1;
for j=1:k
    x=x*j
end
endfunction
```

Klic funkcije bi se v našem primeru glasil:

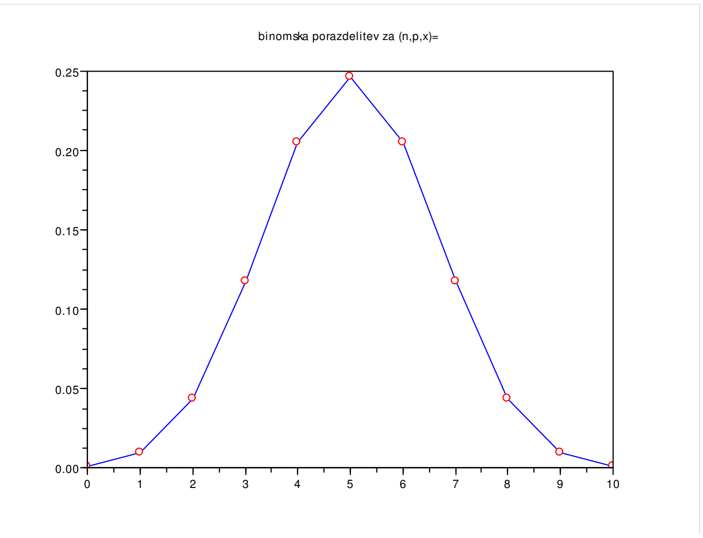
```
x=0:1:10;
[P] = binomska(10,0.5,x);
```

Izpis programa bi bil naslednji:

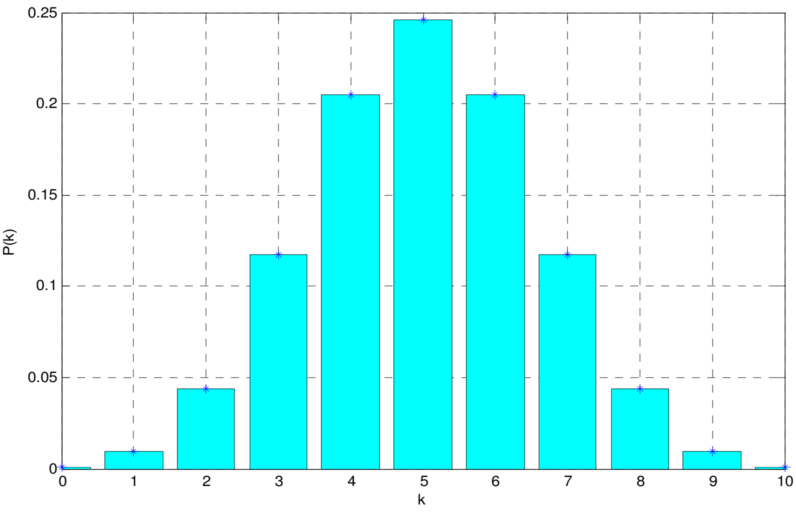
P =

10.	**0.5**	**0.**	**0.0009766**
10.	**0.5**	**1.**	**0.0097656**
10.	**0.5**	**2.**	**0.0439453**
10.	**0.5**	**3.**	**0.1171875**
10.	**0.5**	**4.**	**0.2050781**
10.	**0.5**	**5.**	**0.2460938**
10.	**0.5**	**6.**	**0.2050781**
10.	**0.5**	**7.**	**0.1171875**
10.	**0.5**	**8.**	**0.0439453**
10.	**0.5**	**9.**	**0.0097656**
10.	**0.5**	**10.**	**0.0009766**

kjer zadnji stolp predstavlja izračunane verjetnosti $P(n,p,x)$, $x=0,1,2,...,10$ iz izraza (6.222). Grafični prikaz porazdelitve verjetnosti bi zgledal takole:



kar lahko še nekoliko lepše narišemo (Sliki 6.22).



Slika 6.22: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri desetkratnem metu kovanca

Primer 9:

Uspešnost očesnega kirurga je 85 % vseh operacij. Nariši binomsko porazdelitev, če operira dvajsetkrat, torej je $n = 20$.

Ker sta pri vsakem operativnem posegu možna dva izida, torej, da operacija uspe oz. ne uspe, je verjetnost, da operacija uspe, naslednja:

$$p = 0.85 \tag{6.223}$$

Tako lahko po dvajsetih opravljenih operacijah vrednosti slučajne spremenljivke zavzamejo naslednje izide:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{niti ena ne uspe} \\ 1 & \\ \ldots & \\ n = 20 & \text{vse uspejo} \end{cases} \tag{6.224}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnosti za nastop posameznih vrednosti slučajne spremenljivke X pri dvajsetkratnem poskusu operativnega posega. Pri tem upoštevamo izraz (3.66), pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} P(n,p,x) &= \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \\ &= \binom{20}{x} \cdot 0.85^x \cdot (0.15)^{20-x}; \qquad x = 0,1,2\ldots,20 \end{aligned} \tag{6.225}$$

Tudi tukaj lahko za izračun verjetnosti za vse $x = 0,1,2,\ldots,20$ iz izraza (6.225) uporabimo katerega izmed računalniških programov, kot je npr. Matlab, Scilab, FreeMat ipd.

Klic funkcije bi se tokrat glasil:

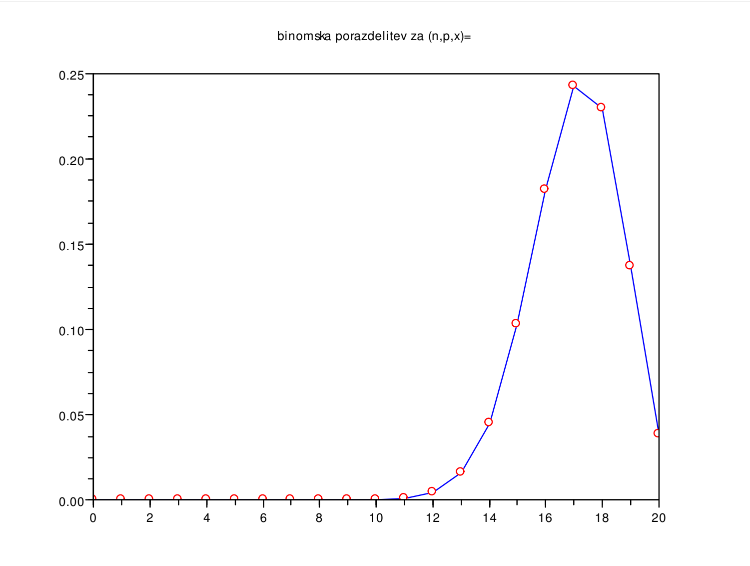
```
x=0:1:20;
[P] = binomska(20,0.85,x);
```

Izpis programa bi bil tokrat naslednji:

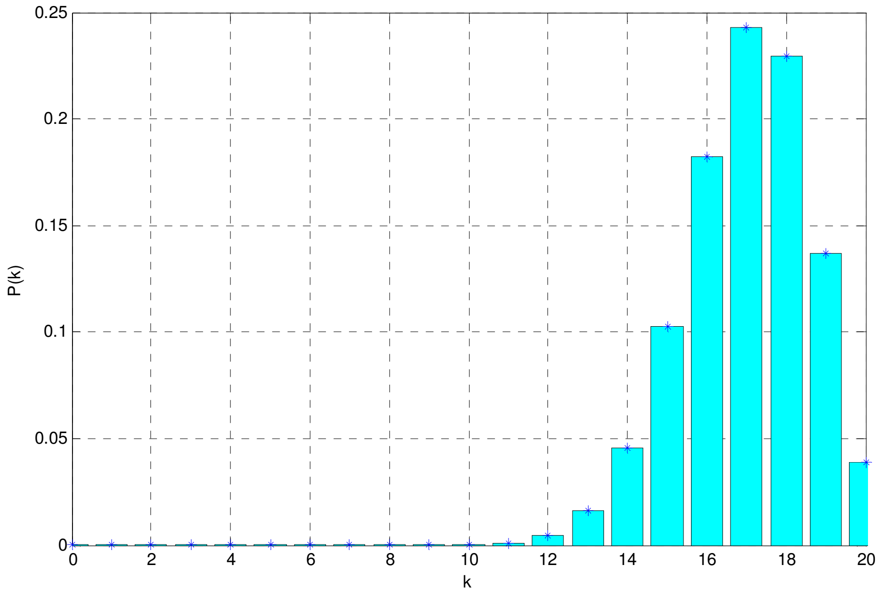
P =

20.	**0.85**	**0.**	**3.325D-17**
20.	**0.85**	**1.**	**3.769D-15**
20.	**0.85**	**2.**	**2.029D-13**
20.	**0.85**	**3.**	**6.898D-12**
20.	**0.85**	**4.**	**1.661D-10**
20.	**0.85**	**5.**	**3.012D-09**
20.	**0.85**	**6.**	**4.268D-08**
20.	**0.85**	**7.**	**0.0000005**
20.	**0.85**	**8.**	**0.0000045**
20.	**0.85**	**9.**	**0.0000336**
20.	**0.85**	**10.**	**0.0002097**
20.	**0.85**	**11.**	**0.0010805**
20.	**0.85**	**12.**	**0.0045922**
20.	**0.85**	**13.**	**0.0160140**
20.	**0.85**	**14.**	**0.0453729**
20.	**0.85**	**15.**	**0.1028452**
20.	**0.85**	**16.**	**0.1821217**
20.	**0.85**	**17.**	**0.2428289**
20.	**0.85**	**18.**	**0.2293384**
20.	**0.85**	**19.**	**0.1367983**
20.	**0.85**	**20.**	**0.0387595**

kjer zadnji stolp predstavlja izračunane verjetnosti $P(n, p, x)$, $x = 0,1,2,...,20$ iz izraza (6.225). Grafični prikaz porazdelitve verjetnosti bi tokrat zgledal takole:



kar lahko še nekoliko lepše narišemo (Sliki 6.23).



Slika 6.23: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri dvajsetkratnem operativnem posegu

<u>*Primer 10:*</u>

Kovanec vržemo osemkrat, torej $n = 8$. *Kolikšna je verjetnost, da pade grb manj kot trikrat (ničkrat, enkrat, dvakrat)?*

Ker sta pri vsakem poskusu metanja kovanca možna dva izida, tj. C (pade cifra) ali G (pade grb), imamo opravka z binomsko porazdelitvijo, kjer osemkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Kot že vemo, je verjetnost, da v posameznem poskusu pade grb, naslednja:

$$p = \frac{1}{2} \tag{6.226}$$

Glede na to, da nas zanima verjetnost, da pri osmih metih kovanca manj kot trikrat pade grb, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost pri $x = \{0, 1, 2\}$. Sledi:

$$P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) \tag{6.227}$$

Na osnovi izraza (3.66) je torej verjetnost, da pri osmih metih kovanca manj kot trikrat pade grb, naslednja (glej tudi izraz (6.227)):

$$P(x<3)=P\left(8,\frac{1}{2},0\right)+P\left(8,\frac{1}{2},1\right)+P\left(8,\frac{1}{2},2\right)=...=\frac{37}{256}=0.145 \tag{6.228}$$

Tudi tovrsten izračun bi lahko izvedli s kakšnim od računalniških programov, npr. s Scilabom. Funkcija bi zgledala takole:

```
function S = sestej_binom(n,p,xs)
S = 0;
for i = 1:length(xs)
   P = binomska(n,p,xs(i));
   S = S + P(4);
end
endfunction
```

njen klic bi bil:

```
xs=0:2;
S = sestej_binom(8,0.5,xs)
```

rezultat pa bi bil:

```
S =
   0.1445312
```

<u>*Primer 11:*</u>

V posodi se nahajata 2 beli in 8 rdečih krogel. Iz posode šestkrat izvlečemo kroglo in jo vsakič vrnemo. Izračunajte verjetnost, da ne izvlečemo bele krogle natančno dvakrat.

Glede na to, da šestkrat vlečemo po eno kroglo, je $n=6$. Ker sta pri vsakem poskusu vlečenja krogle možna dva izida, tj. B (izvlečemo belo kroglo) ali R (izvlečemo rdečo kroglo), ima obravnavana slučajna spremenljivka binomsko porazdelitev, kjer šestkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Vendar, ker imamo v posodi 2 beli in 8 rdečih krogel, je verjetnost, da v posameznem poskusu izvlečemo belo kroglo, naslednja:

$$p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \tag{6.229}$$

Glede na to, da nas zanima verjetnost, da pri šestih poskusih dvakrat ne izvlečemo bele krogle, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost pri $x_A = 0,1,3,4,5,6$. Torej so dovoljeni vsi scenariji, razen tistega, kjer bi bil $x_A = 2$. Sledi:

$$\begin{aligned} P\left(x = x_A\right) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=3) + \\ + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) \end{aligned} \tag{6.230}$$

Ker velja:

$$\sum_{i=0}^{6} P(x=i) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + ... + P(x=6) = 1 \tag{6.231}$$

Sledi:

$$P\left(x = x_A\right) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=3) + ... + P(x=6) = 1 - P(x=2) \tag{6.232}$$

Torej je verjetnost, da pri šestih poskusih dvakrat ne izvlečemo bele krogle, naslednja:

$$P\left(x = x_A\right) = 1 - P(x=2) = 1 - P\left(6, \frac{1}{5}, 2\right) = ... = 0.75424 \tag{6.233}$$

Ta rezultat bi dobili z naslednjim ukazom v Scilabu:

[PXa] = 1-binomska(6,0.2,2);

PXa=PXa(4)

<u>Primer 12:</u>

Kocko vržemo sedemkrat, torej $n = 7$. Kolikšna je verjetnost, da padejo več kot 4 šestice (torej pet, šest, ali sedem šestic)?

Ker je pri vsakem poskusu metanja kocke možnih 6 izidov, je verjetnost, da pri posameznem poskusu pade šestica, naslednja:

$$p = \frac{1}{6} \tag{6.234}$$

Glede na to, da nas zanima verjetnost, da pri sedmih poskusih padejo več kot štiri šestice, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost pri $x = \{5, 6, 7\}$. Na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P(x > 4) &= P(x = 5) + P(x = 6) + P(x = 7) \\ &= P\left(7, \frac{1}{6}, 5\right) + P\left(7, \frac{1}{6}, 6\right) + P\left(7, \frac{1}{6}, 7\right) = 0.002 \end{aligned} \tag{6.235}$$

Ta rezultat bi dobili z naslednjim ukazom v Scilabu:

xs=5:1:7;

S = sestej_binom(7,1/6,xs)

<u>Primer 13:</u>

Kocko vržemo petkrat, torej $n = 5$. Kolikšna je verjetnost, da pade sodo število šestic?

Ker je pri vsakem poskusu metanja kocke možnih 6 izidov, je verjetnost, da pri posameznem poskusu pade šestica, naslednja:

$$p = \frac{1}{6} \tag{6.236}$$

Glede na to, da nas zanima verjetnost, da pri petih poskusih pade sodo število šestic, lahko zaloga vrednosti obravnavane slučajne spremenljivke zavzame vrednost pri $x = \{0, 2, 4\}$. Na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P(x = x_A) &= P(x = 0) + P(x = 2) + P(x = 4) \\ &= P\left(5, \frac{1}{6}, 0\right) + P\left(5, \frac{1}{6}, 2\right) + P\left(5, \frac{1}{6}, 4\right) = 0.566 \end{aligned} \tag{6.237}$$

Ta rezultat bi dobili z naslednjim ukazom v Scilabu:

xs=[0 2 4];

S = sestej_binom(5,1/6,xs)

<u>Primer 14:</u>

Verjetnost, da igralec zadane tarčo s pikadom, je $\frac{1}{3}$*. Denimo vrže proti tarči sedemkrat.*

Poišči verjetnost, da je:

a) tarča zadeta natanko trikrat;

b) tarča zadeta vsaj enkrat (enkrat, dvakrat, trikrat, štirikrat, petkrat, šestkrat, sedemkrat).

Glede na to, da igralec vrže proti tarči sedemkrat, je $n = 7$. Ker sta pri vsakem poskusu metanja pikada možna dva izida, tj. tarča je zadeta ali tarča je zgrešena, ima obravnavana slučajna spremenljivka binomsko porazdelitev, kjer sedemkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Verjetnost, da je tarča zadeta, je enaka:

$$p = \frac{1}{3} \tag{6.238}$$

Verjetnost, da je tarča zgrešena, pa je naslednja:

$$q = \frac{2}{3} \tag{6.239}$$

Najprej nas zanima verjetnost, da je pri petih poskusih tarča zadeta natanko trikrat, torej $k = 3$. Na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P_n(k) = P_7(3) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \\ = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{2^4}{3^4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^4}{3^7} = 0.256 \end{aligned} \tag{6.240}$$

Torej je verjetnost 25.6 %, da strelec v sedmih poskusih zadane tarčo natanko trikrat.

Zanima nas še verjetnost, da je v sedmih poskusih tarča zadeta vsaj enkrat. Sledi:

$$P(\text{vsaj enkrat}) = \sum_{i=1}^{7} P_7(i) = \overbrace{P_7(1)}^{\text{enkrat}} + \overbrace{P_7(2)}^{\text{dvakrat}} + \overbrace{P_7(3)}^{\text{trikrat}} + \overbrace{P_7(4)}^{\text{štirikrat}} + \overbrace{P_7(5)}^{\text{petkrat}} + \overbrace{P_7(6)}^{\text{šestkrat}} + \overbrace{P_7(7)}^{\text{sedemkrat}} \tag{6.241}$$

Ker velja:

$$\sum_{i=0}^{7} P_7(i) = P_7(0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{7} P_7(i)}_{P(\text{vsaj enkrat})} = 1 \tag{6.242}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} P(\text{vsaj enkrat}) &= 1 - P_7(0) = 1 - \binom{7}{0} \cdot p^0 \cdot q^{7-0} = \\ &= 1 - \frac{7!}{7! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 1 - \frac{2^7}{3^7} = 0.9414 \end{aligned} \tag{6.243}$$

Torej je verjetnost 94 %, da strelec v sedmih poskusih zadane tarčo vsaj enkrat.

<u>*Primer 15:*</u>

Pošten kovanec vržemo šestkrat, pri čemer naj bo glava uspešen met. Poiščite verjetnost, da:

- *a) se pojavita natanko 2 glavi;*
- *b) se pojavijo vsaj 4 glave;*
- *c) se pojavi vsaj 1 glava.*

Glede na to, da vržemo kovanec šestkrat, je $n = 6$. Ker sta pri vsakem poskusu možna dva izida, tj. G (padla je glava) ali H (padel je hrbet), ima obravnavana slučajna spremenljivka binomsko porazdelitev, kjer šestkrat ponovimo Bernoullijev poskus. Kot že vemo, je verjetnost za uspel oz. neuspel poskus naslednja:

$$p = q = \frac{1}{2} \tag{6.244}$$

a) Najprej nas zanima verjetnost, da se pri šestih poskusih pojavita natanko dve glavi, torej $k = 2$. Na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P &= P\overbrace{\left(2 \text{ glavi}\right)}^{k=2} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \\ &= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{5 \cdot 6}{2^7} = 0.234 = P_6(2) \end{aligned} \tag{6.245}$$

Torej je verjetnost 23.4 %, da se pri šestih poskusih pojavita natanko dve glavi.

b) Pod točko b) nas zanima verjetnost, da se pri šestih poskusih pojavijo vsaj štiri glave. Sledi:

$$\begin{aligned} &P\left(\text{vsaj 4 glave}\right) = P\left(4 \text{ glave}\right) + P\left(5 \text{ glav}\right) + P\left(6 \text{ glav}\right) = \\ &= P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \\ &= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} = \\ &= \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot \frac{1}{2^6} = \left(\frac{5 \cdot 6}{2} + 6 + 1\right) \cdot \frac{1}{2^6} = 0.343 \end{aligned} \tag{6.246}$$

Torej je verjetnost 34.3 %, da se pri šestih poskusih pojavijo vsaj štiri glave.

c) Zanima nas še verjetnost, da se v šestih poskusih pojavi vsaj ena glava. Velja naslednje:

$$\begin{aligned} &P\left(\text{vsaj 1 glava}\right) = \sum_{i=1}^{6} P_6(i) = P\left(1 \text{ glava}\right) + P\left(2 \text{ glavi}\right) + \ldots + P\left(6 \text{ glav}\right) = \\ &= P_6(1) + P_6(2) + \ldots + P_6(6) \end{aligned} \tag{6.247}$$

Ker velja:

$$\sum_{i=0}^{6} P_6(i) = \underbrace{P_6(0)}_{\text{nobenkrat}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{6} P_6(i)}_{P(\text{vsaj enkrat})} = 1 \tag{6.248}$$

sledi:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{vsaj 1 glava}) = 1 - \underbrace{P_6(0)}_{\text{nobenkrat}} = \\
&= 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = 1 - \frac{1}{2^6} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0.984
\end{aligned}
\qquad (6.249)
$$

Torej je verjetnost 98.4 %, da se pri šestih poskusih pojavi vsaj ena glava.

<u>Primer 16:</u>

Kovanec vržemo šestkrat, pri čemer je glava uspel poskus. Poiščite binomsko porazdelitev za ta Bernoullijev poskus.

Glede na to, da vržemo kovanec šestkrat, je $n = 6$. Kot že vemo, je verjetnost za uspel oz. neuspel poskus naslednja:

$$
p = q = \frac{1}{2} \qquad (6.250)
$$

Verjetnosti za nastop posameznih vrednosti obravnavane naključne spremenljivke izračunamo s pomočjo izraza (3.66). Sledi:

$$
\begin{aligned}
P_6(0) &= \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \\
P_6(1) &= \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{6}{64} \\
P_6(2) &= \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = 15 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{15}{64}
\end{aligned}
\qquad (6.251)
$$

$$P_6(3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}\cdot\frac{1}{64}=\frac{20}{64}$$

$$P_6(4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{2^6}=\frac{15}{64}$$

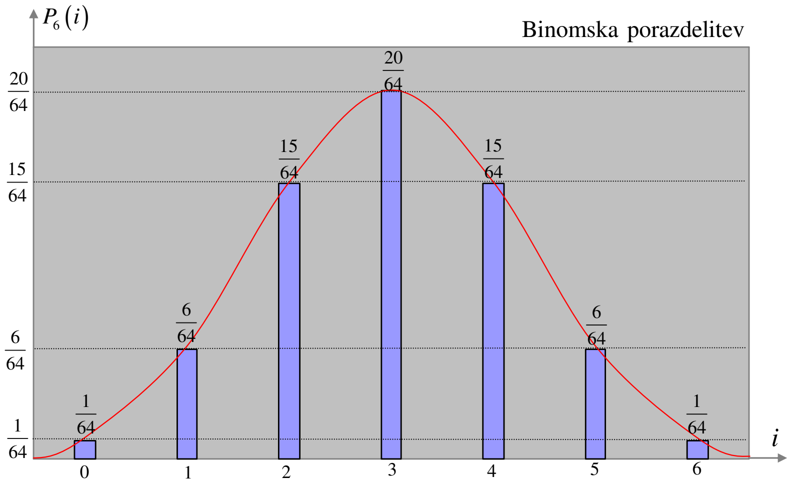
$$P_6(5)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-5}=\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{6}{64}$$

$$P_6(6)=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6}=1\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$$

Dobimo torej:

$$P_6(i)=\left\{\frac{1}{64},\frac{6}{64},\frac{15}{64},\frac{20}{64},\frac{15}{64},\frac{6}{64},\frac{1}{64}\right\}\ ,\qquad i=0,1,\ldots,6 \tag{6.252}$$

Na osnovi izračunanih verjetnosti v izrazih (6.251) oz. (6.252) lahko sedaj narišemo porazdelitveno funkcijo za obravnavan Bernoullijev poskus (Slika 6.24).



Slika 6.24: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri šestkratnem metu kovanca

<u>Primer 17:</u>

Katera od frekvenc ima največjo verjetnost ali katero je najbolj verjetno število dogodka A?

Recimo, da je najbolj verjetno število nekega dogodka *A* število *m*. Sledi:

$$P(n,p,m)=\{največja\ \ verjetnost\ dogodka\ \ A\} \tag{6.253}$$

Potem tudi velja:

$$\begin{aligned} &P(n,p,m-1)\le P(n,p,m)\\ &P(n,p,m+1)\le P(n,p,m) \end{aligned} \tag{6.254}$$

Na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} &\binom{n}{m-1}\cdot p^{m-1}\cdot(1-p)^{n-m+1}\le\binom{n}{m}\cdot p^{m}\cdot(1-p)^{n-m}\\ &\binom{n}{m+1}\cdot p^{m+1}\cdot(1-p)^{n-m-1}\le\binom{n}{m}\cdot p^{m}\cdot(1-p)^{n-m} \end{aligned} \tag{6.255}$$

Izraz (6.255) poenostavimo in dobimo:

$$\begin{aligned} &\binom{n}{m-1}\cdot(1-p)\le\binom{n}{m}\cdot p\\ &\binom{n}{m+1}\cdot p\le\binom{n}{m}\cdot(1-p) \end{aligned} \tag{6.256}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{(n-m+1)!\cdot(m-1)!}\cdot(1-p)\le\frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\cdot p\\ &\frac{n!}{(n-m-1)!\cdot(m+1)!}\cdot p\le\frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\cdot(1-p) \end{aligned} \tag{6.257}$$

Dobimo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-p}{n-m+1} \le p \cdot \dfrac{1}{m} \\[2ex] \dfrac{p}{m+1} \le \dfrac{1-p}{n-m} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} m \cdot (1-p) \le p \cdot (n-m+1) \\[2ex] p \cdot (n-m) \le (1-p) \cdot (m+1) \end{array} \tag{6.258}$$

Sledi:

$$\begin{array}{ll} m \cdot (1-p) \le p \cdot (n-m+1) & \\ p \cdot (n-m) \le (1-p) \cdot (m+1) & \\ \qquad\qquad \Downarrow & \\ \left.\begin{array}{l} m \cdot (1-p+p) \le p \cdot (n+1) \\ \overbrace{p \cdot n - p \cdot m \le m + 1 - p \cdot m - p}^{p \cdot (n+1) - 1 \le m} \end{array}\right\} & \begin{array}{l} m \le p \cdot (n+1) \\ p \cdot (n+1) - 1 \le m \end{array} \end{array} \tag{6.259}$$

Sledi:

$$\underbrace{p \cdot (n+1) - 1}_{p \cdot n + p - 1 = p \cdot n - (1-p) = p \cdot n - q} \le m \le p \cdot (n+1) \tag{6.260}$$

Najbolj verjetna frekvenca je torej sledeča:

$$p \cdot n - q \le m \le p \cdot (n+1) \quad , \qquad q = 1 - p \tag{6.261}$$

<u>Primer 18:</u>

V posodi je 5 belih in 7 rdečih krogel. Kroglo potegnemo 100 krat in jo po vsakem poskusu vrnemo v posodo. Določi najbolj verjetno frekvenco bele krogle.

Glede na to, da kroglo vlečemo stokrat, je $n = 100$. Ker sta pri vsakem poskusu možna dva izida, tj. B (izvlečemo belo kroglo) ali R (izvlečemo rdečo kroglo), imamo opravka z binomsko porazdelitvijo, kjer stokrat ponovimo Bernoullijev poskus. Vendar, ker imamo v posodi 5 belih in 7 rdečih krogel, je verjetnost, da pri posameznem poskusu izvlečemo belo kroglo, naslednja:

$$p = \frac{5}{12} \tag{6.262}$$

Verjetnost, da pri posameznem poskusu izvlečemo rdečo kroglo, pa je naslednja:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \tag{6.263}$$

Sedaj lahko na osnovi izraza (6.261) izračunamo najbolj verjetno frekvenco bele krogle. Sledi:

$$\begin{aligned} &\frac{5}{12} \cdot 100 - \frac{7}{12} \le m \le \frac{5}{12} \cdot (100 + 1) \\ &500 - 7 \le 12 \cdot m \le 505 \\ &493 \le 12 \cdot m \le 505 \\ &41.08 \le m \le 42.08 \quad \Rightarrow \quad m = 42 \end{aligned} \tag{6.264}$$

Torej je pri sto poskusih najverjetnejša frekvenca bele krogle enaka $m = 42$.

<u>*Primer 19:*</u>

Ali je bolj verjetno, da vržemo pri 7 metih kovanca hrbet štirikrat ali da vržemo pri 9 metih hrbet šestkrat?

Pri prvem izračunu bomo upoštevali, da kovanec mečemo sedemkrat, torej $n_1 = 7$. Prav tako bomo upoštevali $x_1 = 4$, saj nas zanima verjetnost, da štirikrat vržemo hrbet pri sedmih poskusih. Verjetnost, da pri posameznem poskusu pade hrbet, pa je kot že znano, naslednja:

$$p = \frac{1}{2} \tag{6.265}$$

Če upoštevamo izraz (3.66), sledi:

$$\begin{aligned} P_1(n_1, p, x_1) &= \binom{n_1}{x_1} \cdot p^{x_1} \cdot (1-p)^{n_1 - x_1} = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-4} = \\ &= \binom{7}{4} \cdot \frac{1}{128} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{1}{128} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{128} = \frac{35}{128} = 0.273 \end{aligned} \tag{6.266}$$

Torej je verjetnost 27.3 %, da bomo v sedmih poskusih vrgli hrbet štirikrat.

Pri drugem izračunu pa bomo upoštevali, da kovanec mečemo devetkrat, torej $n_2 = 9$. Prav tako bomo upoštevali $x_2 = 6$, saj nas zanima verjetnost, da šestkrat vržemo hrbet pri devetih poskusih. Verjetnost, da pri posameznem poskusu pade hrbet, pa je kot že znano, naslednja:

$$p = \frac{1}{2} \tag{6.267}$$

Če upoštevamo izraz (3.66), sledi:

$$\begin{aligned} P_2(n_2, p, x_2) &= \binom{n_2}{x_2} \cdot p^{x_2} \cdot (1-p)^{n_2 - x_2} = \\ &= \binom{9}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 == \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{84}{2^9} = 0.164 \end{aligned} \tag{6.268}$$

Verjetnost je 16.4 %, da bomo v devetih poskusih vrgli hrbet šestkrat. Torej je 1. možnost bolj verjetna.

Primer 20:

V posodi je 7 belih in 9 rdečih krogel. Kroglo izvlečemo 50 krat in jo po vsakem poskusu vrnemo v posodo. Katero število izvlečenih belih krogel je najbolj verjetno?

Glede na to, da kroglo vlečemo 50 krat, je $n = 50$. Verjetnost, da pri posameznem poskusu izvlečemo belo kroglo, je naslednja:

$$p = \frac{7}{16} \tag{6.269}$$

Verjetnost, da pri posameznem poskusu izvlečemo rdečo kroglo, pa je naslednja:

$$q = 1 - p = \frac{9}{16} \tag{6.270}$$

Sedaj lahko na osnovi izraza (6.261) izračunamo najbolj verjetno frekvenco bele krogle. Sledi:

$$\begin{aligned} & n \cdot p - q \leq m \leq p \cdot (n+1) \\ & 50 \cdot \frac{7}{16} - \frac{9}{16} \leq m \leq \frac{7}{16} \cdot 51 \\ & \frac{341}{16} \leq m \leq \frac{357}{16} \quad \Rightarrow \quad 21.31 \leq m \leq 22.31 \quad \Rightarrow \quad m = 22 \end{aligned} \tag{6.271}$$

Torej je po petdesetih poskusih najbolj verjetno število izvlečenih belih krogel enako $m = 22$.

Primer 21:

Kocko vržemo 12 krat, torej $n = 12$.

a.) Kolikšna je verjetnost, da pade sodo število petkrat?

b.) Katero število izmed sodih števil je najbolj verjetno?

c.) Kolikšna je verjetnost najbolj verjetne frekvence sodega števila?

a)

Verjetnost, da pri posameznem poskusu pade sodo število, je naslednja:

$$p = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \tag{6.272}$$

Če upoštevamo izraz (3.66), sledi:

$$P(x=5) = P\left(12, \frac{1}{2}, 5\right) = 0.193 \tag{6.273}$$

Torej je verjetnost 19.3 %, da pade izmed dvanajstih metov sodo število petkrat.

b) Za izračun števila, ki je najbolj verjetno izmed sodih števil, uporabimo izraz (6.261) in dobimo:

$$\begin{gathered} n \cdot p - q \leq m \leq p \cdot (n+1) \\ 12 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \cdot 13 \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{2} \leq m \leq \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{12}{2} = 6 \end{gathered} \tag{6.274}$$

c) Zanima nas še, kolikšna je verjetnost najbolj verjetne frekvence sodega števila. Če upoštevamo izraz (3.66), sledi:

$$P(x=6) = P\left(12, \frac{1}{2}, 6\right) = 0.225 \tag{6.275}$$

Torej je verjetnost najbolj verjetne frekvence sodega števila enaka 22.5 %.

<u>Primer 22:</u>

Verjetnost, da pri nagradni igri zadenemo enega od glavnih dobitkov, je 0.0001. Kolikšna je verjetnost, da bomo z nakupom 100 srečk dobili enega od glavnih dobitkov? Če je p dovolj majhen, ter n ni preveč velik, lahko uporabimo Poissonovo porazdelitev kot približek Bernoullijeve formule. Torej je Poissonova porazdelitev je zelo dobrodošla pri velikem številu poskusov, ko bi z Bernoullijevo lahko imeli težave.

Podano imamo:

$$p = 0.0001 \,, \quad n = 100 \,, \quad k = 1 \tag{6.276}$$

Poissonova porazdelitev se glasi:

$$P(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \,, \quad \text{pri čemer je} \quad \lambda = n \cdot p \tag{6.277}$$

Sledi:

$$P_n(k) \doteq \frac{(n \cdot p)^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \tag{6.278}$$

Torej je verjetnost, da bomo z nakupom 100 srečk dobili enega od glavnih dobitkov, enaka:

$$\begin{aligned} P_{100}(1) &= \frac{(100 \cdot 0.0001)^1 \cdot e^{-100 \cdot 0.0001}}{1!} = \frac{0.01 \cdot e^{-0.01}}{1} = \\ &= 9.9 \cdot 10^{-3} \sim 10 \cdot 10^{-3} \doteq 10^{-2} = 0.01 \end{aligned} \tag{6.279}$$

<u>Primer 23:</u>

Recimo, da imamo podane naslednje podatke:

$$n = 100 \,, \quad p = 0.05 \,, \quad k = 6 \tag{6.280}$$

Izračunajte $P_{100}(6)$ *z Bernoullijevo in Poissonovo formulo!*

Po Bernoullijevi formuli (glej izraz (3.66)), dobimo sledeče:

$$\begin{aligned} P_{100}(6) &= \binom{100}{6} \cdot p^6 \cdot q^{100-6} = \\ &= \left(\frac{100!}{94! \cdot 6!} \right) \cdot (0.05)^6 \cdot (1-0.05)^{94} = \\ &= \left(\frac{95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{6!} \right) \cdot (0.05)^6 \cdot (0.95)^{94} = 0.15001 \end{aligned} \tag{6.281}$$

Po Poissonovi formuli (glej izraz (3.48) oz. (6.277)), pa dobimo sledeč rezultat:

$$P_{100}(6) \doteq \frac{(100\cdot 0.05)^6 \cdot e^{-100\cdot 0.05}}{6!} = 0.14622 \tag{6.282}$$

Primer 24:

Recimo, da sta dva odstotka izdelkov v tovarni defektna. Poišči verjetnost, da so v izboru 100 izdelkov trije izdelki defektni (Uporabi Bernoullijevo in Poissonovo formulo).

Podano imamo:

$$n = 100\ ,\quad p = 0.02\ ,\quad k = 3 \tag{6.283}$$

Sledi:

$$\lambda = n\cdot p = 100\cdot 0.02 = 2 \tag{6.284}$$

Če uporabimo Bernoullijevo formulo, na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P_{100}(3) &= \binom{100}{3}\cdot \underbrace{0.02}_{p}{}^{3}\cdot(1-0.02)^{100-3} = \\ &= \frac{100!}{3!\cdot 97!}\cdot 0.02^3\cdot 0.98^{97} = \frac{98\cdot 99\cdot 100}{6}\cdot 0.02^3\cdot 0.98^{97} = 0.1822 \end{aligned} \tag{6.285}$$

Torej je verjetnost 18.2 %, da so v izboru 100 izdelkov trije izdelki defektni.

Če uporabimo še Poissonovo formulo, na osnovi izraza (3.48) oz. (6.277) sledi:

$$P_{100}(3) \doteq \frac{(100\cdot 0.02)^3 \cdot e^{-100\cdot 0.02}}{3!} = 0.180 \tag{6.286}$$

Torej je po Poissonovi formuli verjetnost 18 %, da so v izboru 100 izdelkov trije izdelki defektni.

Primer 25:

Določen aparat je sestavljen iz 1000 delov. Verjetnost, da v roku enega leta odpove en sestavni del, je enaka 0.001. Kolikšna je verjetnost, da v enem letu odpovejo 3 deli (Uporabi Bernoullijevo in Poissonovo formulo)?

Podano imamo:

$$n = 1000\ , \quad p = 0.001\ , \quad k = 3 \tag{6.287}$$

Če uporabimo Bernoullijevo formulo, na osnovi izraza (3.66) sledi:

$$\begin{aligned} P_{1000}(3) &= \binom{1000}{3} \cdot \underbrace{0.001}_{p}{}^{3} \cdot (1-0.001)^{1000-3} = \\ &= \frac{1000!}{3! \cdot 997!} \cdot 0.001^{3} \cdot 0.999^{997} = \frac{998 \cdot 999 \cdot 1000}{3!} \cdot 0.001^{3} \cdot 0.999^{97} = 0.06128 \end{aligned} \tag{6.288}$$

Torej je verjetnost cca. 6 %, da se v roku enega leta med 1000 sestavnimi deli pokvarijo trije deli.

Če uporabimo še Poissonovo formulo, na osnovi izraza (3.48) oz. (6.277) sledi:

$$P_{1000}(3) \doteq \frac{(1000 \cdot 0.001)^{3} \cdot e^{-1000 \cdot 0.001}}{3!} = \frac{1}{6} \cdot e^{-1} = 0.0613 \tag{6.289}$$

Torej je (po Poissonovi formuli) verjetnost tudi cca. 6 %, da se v roku enega leta med 1000 sestavnimi deli pokvarijo trije deli.

6.3.2 Številske karakteristike za diskretne porazdelitve

Primer 1:

Podjetje potrebuje za prevoz tovora 6 kamionov. Verjetnost, da je kamion brezhiben, je 0.8, da pa je pokvarjen, je verjetnost enaka 0.2. Izračunaj povprečno število brezhibnih kamionov v danem trenutku. Pri tem naključna spremenljivka X predstavlja število brezhibnih kamionov v danem trenutku.

Podano imamo:

$$p = 0.8\ , \quad q = 0.2\ , \quad n = 6 \tag{6.290}$$

Verjetnostno shemo za obravnavan primer lahko na osnovi izraza (3.44) zapišemo takole:

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \ldots & x_6 \\ P_0 & P_1 & P_2 \ldots & P_6 \end{pmatrix}$$

oz. (6.291)

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{pmatrix}$$

Verjetnosti za zasedbo posameznega stanja naključne spremenljivke X so na osnovi izraza (3.66) naslednje:

$$\begin{aligned}
P_0 &= P_6(0) = \binom{6}{0} \cdot (0.8)^0 \cdot (0.2)^{6-0} = 6.4 \cdot 10^{-5} \\
P_1 &= P_6(1) = \binom{6}{1} \cdot (0.8)^1 \cdot (0.2)^{6-1} = 6 \cdot 0.8 \cdot 0.2^5 = 1.536 \cdot 10^{-3} \\
P_2 &= P_6(2) = \binom{6}{2} \cdot (0.8)^2 \cdot (0.2)^{6-2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^4 = 0.01536 \\
P_3 &= P_6(3) = \binom{6}{3} \cdot (0.8)^3 \cdot (0.2)^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0.8^3 \cdot 0.2^3 = 0.0819 \\
P_4 &= P_6(4) = \binom{6}{4} \cdot (0.8)^4 \cdot (0.2)^{6-4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2 = 0.245
\end{aligned} \tag{6.292}$$

$$P_5 = P_6(5) = \binom{6}{5} \cdot (0.8)^5 \cdot (0.2)^{6-5} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^1 = 0.39$$

$$P_6 = P_6(6) = \binom{6}{6} \cdot (0.8)^6 \cdot (0.2)^{6-6} = 0.262$$

Verjetnostna shema, zapisana v izrazu (6.291), tako zavzame naslednje vrednosti:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 0.39 \end{matrix}} & 6 \\ 6.4 \cdot 10^{-5} & 1.53 \cdot 10^{-3} & 0.015 & 0.081 & 0.245 & & 0.262 \end{pmatrix} \tag{6.293}$$

Največja je verjetnost, da
bo 5 brezhibnih kamionov
v danem trenutku.

S pomočjo izraza (3.84) lahko sedaj še izračunamo matematično upanje obravnavane diskretne slučajne spremenljivke X. Sledi:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{6} x_i \cdot P(x_i) = x_0 \cdot P_0 + \ldots + x_6 \cdot P_6 = \\ &= 0 \cdot 6.4 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 1.53 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0.015 + 3 \cdot 0.081 + 4 \cdot 0.245 + 5 \cdot 0.39 + 6 \cdot 0.262 = \\ &= 4.776 \end{aligned} \tag{6.294}$$

Dobljeni rezultat nam pove, da lahko v povprečju pričakujemo 5 brezhibnih kamionov v danem trenutku.

V Scilabu bi lahko izvedli naslednji ukaz:

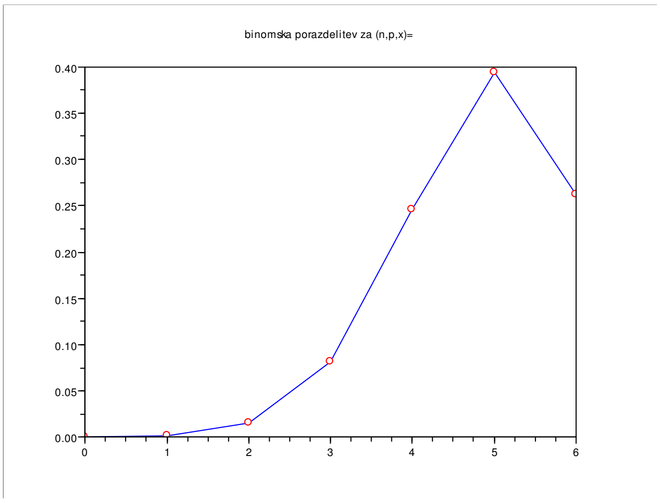
```
x=0:1:6;
[P] = binomska(6,0.8,x)
```

Izpis verjetnosti bi bil naslednji (glej 4. stolp):

```
P =
  6.   0.8   0.   0.000064
  6.   0.8   1.   0.001536
  6.   0.8   2.   0.01536
  6.   0.8   3.   0.08192
```

6. 0.8 4. 0.24576
6. 0.8 5. 0.393216
6. 0.8 6. 0.262144

Funkcija porazdelitve verjetnosti pa je prikazana na naslednji sliki:



<u>Primer 2:</u>

V primeru 16 v poglavju 6.3.1 smo videli, da dobimo verjetnostno shemo, kot je zapisana v izrazu (6.295):

$$X:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{64} & \frac{6}{64} & \frac{15}{64} & \frac{20}{64} & \frac{15}{64} & \frac{6}{64} & \frac{1}{64} \end{bmatrix} \tag{6.295}$$

Poiščite matematično upanje obravnavane naključne spremenljivke X.

Na osnovi izraza (3.84) je matematično upanje obravnavane naključne spremenljivke naslednje:

$$\begin{aligned} &E(X)=\sum_{i=0}^{6} x_i \cdot P(x_i) = x_0 \cdot P(x_0)+\ldots+x_6 \cdot P(x_6)= \\ &=0\cdot\frac{1}{64}+1\cdot\frac{6}{64}+2\cdot\frac{15}{64}+3\cdot\frac{20}{64}+4\cdot\frac{15}{64}+5\cdot\frac{6}{64}+6\cdot\frac{1}{64}=3 \end{aligned} \tag{6.296}$$

Rezultat, dobljen v izrazu (6.296), potrjuje našo intuicijo, da če je kovanec vržen šestkrat, se bo okoli polovice, to je 3 poskuse , zgodil uspešen met (trikrat pade glava, ki je denimo uspešen met).

<u>*Primer 3:*</u>

Obravnavamo met kocke. V primeru, ko pade število 2, 3 ali 5, igralec dobi toliko denarnih enot, kolikor znaša padlo število. V primeru, ko pade število 1, 4 ali 6, pa igralec izgubi toliko denarnih enot, kolikor znaša padlo število. Izračunajte matematično upanje naključne spremenljivke X, ki predstavlja doseženo število denarnih enot.

Verjetnostna shema je za obravnavan primer sledeča:

$$X:\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 & -4 & -6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{6.297}$$

Na osnovi izraza (3.84) je matematično upanje naključne spremenljivke X naslednje:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x_i, i=2,3,5,-1,-4,-6} x_i \cdot P(x_i) = x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_{-6} \cdot P(x_{-6}) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + (-4) \cdot \frac{1}{6} + (-6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+3+5-1-4-6}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned} \tag{6.298}$$

Glede na to, da je rezultat dobljen v izrazu (6.298) negativen, bo igralec v povprečju očitno pri tej igri izgubljal.

<u>*Primer 4:*</u>

Obravnavamo met dveh kock, ki da števili a in b. Naj bo X naključna spremenljivka, ki predstavlja maksimum obeh števil, Y pa naključna spremenljivka, ki predstavlja vsoto obeh števil. Poiščite matematično upanje obeh naključnih spremenljivk.

Velja naslednje:

$$\begin{aligned} X(a,b) &= \max(a,b) \\ Y(a,b) &= a+b \end{aligned} \tag{6.299}$$

Najprej zapišimo zalogo vrednosti obeh obravnavanih naključnih spremenljivk. Sledi:

$$
\begin{aligned}
R_X &= \{1,2,3,4,5,6\} \\
R_Y &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}
\end{aligned}
\tag{6.300}
$$

pri čemer smo si za določitev R_Y pomagali s tabelo možnih izidov pri metu dveh kock:

$$
\begin{Bmatrix}
\underbrace{(1,1)}^{\Sigma 2} & \underbrace{(1,2)}^{\Sigma 3} & \underbrace{(1,3)}^{\Sigma 4} & \underbrace{(1,4)}^{\Sigma 5} & \underbrace{(1,5)}^{\Sigma 6} & \underbrace{(1,6)}^{\Sigma 7} \\
\underbrace{(2,1)}^{\Sigma 3} & \underbrace{(2,2)}^{\Sigma 4} & \underbrace{(2,3)}^{\Sigma 5} & \underbrace{(2,4)}^{\Sigma 6} & \underbrace{(2,5)}^{\Sigma 7} & \underbrace{(2,6)}^{\Sigma 8} \\
\underbrace{(3,1)}^{\Sigma 4} & \underbrace{(3,2)}^{\Sigma 5} & \underbrace{(3,3)}^{\Sigma 6} & \underbrace{(3,4)}^{\Sigma 7} & \underbrace{(3,5)}^{\Sigma 8} & \underbrace{(3,6)}^{\Sigma 9} \\
\underbrace{(4,1)}^{\Sigma 5} & \underbrace{(4,2)}^{\Sigma 6} & \underbrace{(4,3)}^{\Sigma 7} & \underbrace{(4,4)}^{\Sigma 8} & \underbrace{(4,5)}^{\Sigma 9} & \underbrace{(4,6)}^{\Sigma 10} \\
\underbrace{(5,1)}^{\Sigma 6} & \underbrace{(5,2)}^{\Sigma 7} & \underbrace{(5,3)}^{\Sigma 8} & \underbrace{(5,4)}^{\Sigma 9} & \underbrace{(5,5)}^{\Sigma 10} & \underbrace{(5,6)}^{\Sigma 11} \\
\underbrace{(6,1)}^{\Sigma 7} & \underbrace{(6,2)}^{\Sigma 8} & \underbrace{(6,3)}^{\Sigma 9} & \underbrace{(6,4)}^{\Sigma 10} & \underbrace{(6,5)}^{\Sigma 11} & \underbrace{(6,6)}^{\Sigma 12}
\end{Bmatrix}
$$

Na osnovi te tabele tudi lahko zapišemo verjetnostni shemi za obe naključni spremenljivki, pri čemer dobimo:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{X}_{\text{max}} &: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{bmatrix} \\
\underbrace{Y}_{\text{vsota}} &: \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.301}
$$

Na osnovi izraza (3.84) je matematično upanje naključne spremenljivke X naslednje:

$$
\begin{aligned}
&E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(x_i) = x_1 \cdot P(x_1) + \ldots + x_6 \cdot P(x_6) = \\
&= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = 4.47
\end{aligned}
\tag{6.302}
$$

Matematično upanje naključne spremenljivke Y pa je sledeče:

$$E(Y)=\sum_{i=2}^{12} y_i\cdot P(y_i)=y_2\cdot P(y_2)+...+y_{12}\cdot P(y_{12})=$$
$$=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+ \tag{6.303}$$
$$+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

<u>*Primer 5:*</u>

Na bencinski postaji je 10 črpalk. Verjetnost, da je določena črpalka pokvarjena, je enaka 0.3. Na prazno postajo pripeljejo tri vozila in se naključno postavijo pred črpalke. Kolikšna je verjetnost, da se od teh treh vozil kvečjemu eno postavi pred črpalko v okvari. Zapiši verjetnostno shemo ter izračunaj $E(X)$ in $VAR(X)$. *Pri tem naključna spremenljivka X predstavlja število vozil, ki se postavijo pred črpalko v okvari.*

Velja naslednje:

$$p=0.3\ ,\quad q=0.7\ ,\quad n=3 \tag{6.304}$$

Verjetnostno shemo lahko za obravnavan primer zapišemo v naslednji obliki:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \tag{6.305}$$

Verjetnosti za zasedbo posameznega stanja naključne spremenljivke *X* so na osnovi izraza (3.66) naslednje:

$$\begin{aligned} P_0&=P_3(0)=\binom{3}{0}\cdot(0.3)^0\cdot(0.7)^{3-0}=0.343 \\ P_1&=P_3(1)=\binom{3}{1}\cdot(0.3)^1\cdot(0.7)^{3-1}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0.3\cdot(0.7)^2=0.441 \end{aligned} \tag{6.306}$$

$$P_2 = P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^{3-2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot (0.3)^2 \cdot 0.7 = 0.189$$

$$P_3 = P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot (0.3)^3 \cdot (0.7)^{3-3} = (0.3)^3 = 0.027$$

Verjetnostna shema zapisana v izrazu (6.305) tako zavzame naslednje vrednosti:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ X = & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0.343 & \boxed{0.441} & 0.189 & 0.027 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.307}$$

Največja je verjetnost, da se en avto ustavi na pokvarjeni črpalki.

S pomočjo izraza (3.84) lahko sedaj še izračunamo matematično upanje obravnavane diskretne slučajne spremenljivke *X*. Sledi:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot 0.343 + 1 \cdot 0.441 + 2 \cdot 0.189 + 3 \cdot 0.027 = 0.9 \tag{6.308}$$

Torej lahko za približno eno vozilo pričakujemo, da se bo znašlo pred pokvarjeno črpalko.

Na osnovi izraza (3.101) izračunajmo še varianco diskretne slučajne spremenljivke *X*. V ta namen moramo najprej izračunati drugi moment:

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 \cdot P(x_i) = 0^2 \cdot 0.343 + 1^2 \cdot 0.441 + 2^2 \cdot 0.189 + 3^2 \cdot 0.027 = 1.44 \tag{6.309}$$

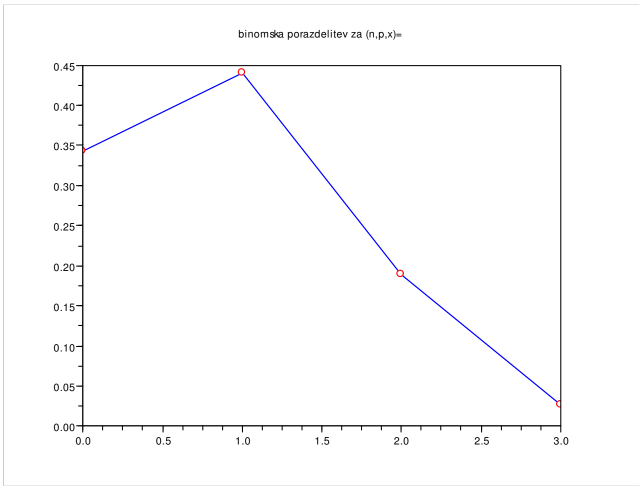
Torej je na osnovi izraza (3.101) varianca za obravnavani primer naslednja:

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1.44 - 0.9^2 = 0.63 \tag{6.310}$$

Do tega rezultata bi v Scilabu prišli z naslednjimi ukazi:

```
x=0:1:3;
[P] = binomska(3,0.3,x)
ex=(P(:,4))'*x'
ex2=(P(:,4))'*(x^2)'
varx = ex2 - ex^2
```

pri čemer funkcija porazdelitve verjetnosti zavzame naslednjo obliko:



Primer 6:

Kovanec vržemo šestkrat. V primeru 16 v poglavju 6.3.1 (glej izraz (6.252)) smo dobili verjetnostno shemo, kot je zapisana v izrazu (6.311):

$$X:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \dfrac{1}{64} & \dfrac{6}{64} & \dfrac{15}{64} & \dfrac{20}{64} & \dfrac{15}{64} & \dfrac{6}{64} & \dfrac{1}{64} \end{bmatrix} \qquad (6.311)$$

Tovrsten primer smo obravnavali tudi v tem poglavju in sicer v primeru 2. Pri tem smo dobili za matematično upanje rezultat $E(X)=3$ (glej izraz (6.296)). Izračunajte varianco in standardni odklon (STD) za spremenljivko X.

Kot že vemo, varianco naključne spremenljivke *X* izračunamo s pomočjo izraza (3.101), pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned}
&VAR(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=0}^{6} x_i^2 \cdot P(x_i) - 3^2 = \\
&= x_0^2 \cdot P(x_0) + x_1^2 \cdot P(x_1) + ... + x_6^2 \cdot P(x_6) - 3^2 = \\
&= 0^2 \cdot \frac{1}{64} + 1^2 \cdot \frac{6}{64} + 2^2 \cdot \frac{15}{64} + 3^2 \cdot \frac{20}{64} + 4^2 \cdot \frac{15}{64} + 5^2 \cdot \frac{6}{64} + 6^2 \cdot \frac{1}{64} - 9 = \\
&= \frac{6 + 60 + 180 + 16 \cdot 15 + 25 \cdot 6 + 36}{64} - 9 = 1.5
\end{aligned} \tag{6.312}$$

Standardni odklon naključne spremenljivke *X* pa izračunamo s pomočjo izraza (3.115). Sledi:

$$STD(X) = \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{1.5} \doteq 1.225 \tag{6.313}$$

Torej, če kovanec vržemo 6 krat, bo matematično upanje $E(X) = 3\text{ glave}$, varianca $VAR(X) = 1.5\text{ glave}$ in standardni odklon $STD(X) = 1.225\text{ glave}$. To z drugimi besedami pomeni, da se pri šestkratnem metu kovanca 3 krat zgodi uspešen poskus (trikrat pade glava), razpršenost naključne spremenljivke *X* okoli njenega povprečja je enaka 1.5 metov kocke, deviacija naključne spremenljivke *X* pa je enaka 1.225 uspešnega meta.

<u>Primer 7:</u>

Pri primeru 4 (glej izraz (6.301)) smo obravnavali verjetnostni shemi, kot sta zapisani v izrazih (6.314) in (6.315):

$$X : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{bmatrix} \tag{6.314}$$

$$Y:\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \tag{6.315}$$

Pri izračunu matematičnega upanja naključnih spremenljivk X in Y, zapisanih v izrazih (6.314) in (6.315), smo dobili naslednji rezultat (glej izraza (6.302) in (6.303)):

$$E(X)=4.47 \ , \quad E(Y)=7 \tag{6.316}$$

Zanima nas, kolikšna je vrednost variance in standardne deviacije obeh naključnih spremenljivk $\left(VAR(X)=?,\ VAR(Y)=?,\ STD(X)=?,\ STD(Y)=?\right)$.

Varianco naključnih spremenljivk izračunamo s pomočjo izraza (3.101). Za varianco naključne spremenljivke *X* tako sledi:

$$\begin{aligned} VAR(X) &= E\left(X^2\right)-E^2(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot P(x_i)-(4.47)^2 = \\ &= 1^2\cdot\frac{1}{36}+2^2\cdot\frac{3}{36}+3^2\cdot\frac{5}{36}+4^2\cdot\frac{7}{36}+5^2\cdot\frac{9}{36}+6^2\cdot\frac{11}{36}-(4.47)^2=1.991 \end{aligned} \tag{6.317}$$

Za varianco naključne spremenljivke *Y* pa sledi:

$$\begin{aligned} VAR(Y) &= E(Y)-E^2(Y)=\sum_{i=2}^{12} y_i^2 \cdot P(y_i)-7^2 = \\ &= 2^2\cdot\frac{1}{36}+3^2\cdot\frac{2}{36}+4^2\cdot\frac{3}{36}+5^2\cdot\frac{4}{36}+6^2\cdot\frac{5}{36}+7^2\cdot\frac{6}{36}+ \\ &\quad +8^2\cdot\frac{5}{36}+9^2\cdot\frac{4}{36}+10^2\cdot\frac{3}{36}+11^2\cdot\frac{2}{36}+12^2\cdot\frac{1}{36}-7^2=5.83 \end{aligned} \tag{6.318}$$

Sedaj lahko na osnovi izraza (3.115) izračunamo še standardno deviacijo obeh naključnih spremenljivk. Za naključno spremenljivko *X* sledi:

$$STD(X)=\delta_X=\sqrt{VAR(X)}=\sqrt{1.991}\doteq 1.41 \tag{6.319}$$

Za naključno spremenljivko *Y* pa sledi:

$$STD(Y) = \delta_Y = \sqrt{VAR(Y)} = \sqrt{5.83} \doteq 2.41 \tag{6.320}$$

<u>*Primer 8:*</u>

Na določeni cesti se v obdobju enega leta v povprečju zgodi ena nesreča s smrtnim izidom. Kolikšna je verjetnost, da se v roku enega leta zgodijo tri nesreče s smrtnim izidom? Pri tem naključna spremenljivka X predstavlja število nesreč s smrtnim izidom.

Naključna spremenljivka *X*, porazdeljena po Poissonovem zakonu, ima v obravnavanem primeru zalogo vrednosti $k > 0$ in naslednjo verjetnostno funkcijo (glej izraz (3.48)):

$$P(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \tag{6.321}$$

Vemo, da je za obravnavan primer matematično upanje $E(X) = \lambda = 1$ (glej sliko 41), saj se v roku enega leta v povprečju zgodi ena nesreča s smrtnim izidom. Zanima nas verjetnost, da se v roku enega leta zgodijo tri nesreče s smrtnim izidom, torej $k = 3$. Če sedaj upoštevamo izraz (6.321) in vrednost za *k*, ki je enaka 3, dobimo:

$$P(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = 0.061 \tag{6.322}$$

Torej je verjetnost 6 %, da se v roku enega leta zgodijo tri nesreče s smrtnim izidom.

<u>*Primer 9:*</u>

V posodi imamo 3 bele in 6 rdečih krogel. Kroglo izvlečemo šestkrat in jo vsakokrat vrnemo v posodo. Naj naključna spremenljivka X predstavlja število izidov, ko izvlečemo kroglo bele barve. Narišite funkcijo verjetnostne porazdelitve in izračunajte matematično *upanje (pričakovanje). Izračunajte tudi varianco in najbolj verjetno frekvenco bele krogle. (Binomska porazdelitev!)*

Označimo z A dogodek, da "izvlečemo kroglo bele barve", z $\overline{A}$ pa dogodek, da "izvlečemo kroglo rdeče barve". Ker sta pri vsakem poskusu vlečenja krogle možna dva izida $\left(A \text{ ali } \overline{A}\right)$, ima naključna spremenljivka X očitno binomsko porazdelitev, kjer šestkrat ponovimo Bernoullijev poskus $(n=6)$. Seveda je verjetnost, da v posameznem poskusu izvlečemo kroglo bele barve, naslednja:

$$P(A) = p = \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3} \tag{6.323}$$

Verjetnost, da v posameznem poskusu izvlečemo kroglo rdeče barve pa je naslednja:

$$P\left(\overline{A}\right) = q = 1 - p = \frac{2}{3} \tag{6.324}$$

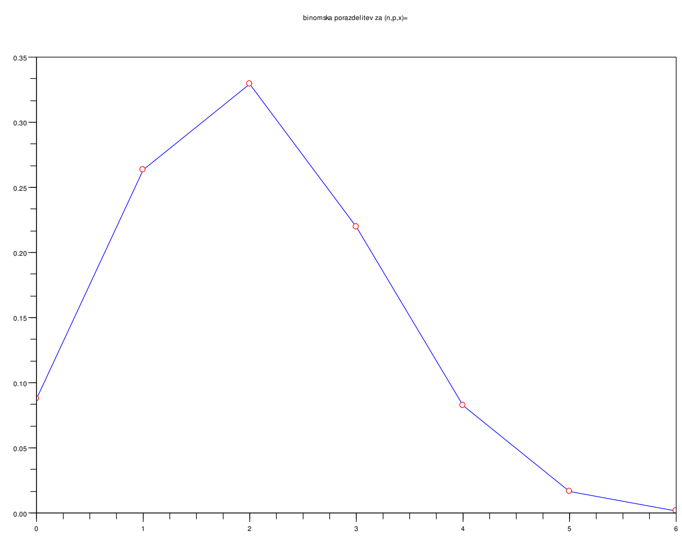
Če upoštevamo izraz za Binomsko diskretno porazdelitev naključne spremenljivke X (glej izraz (3.66)), dobimo naslednje:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= P(X = x) = P(n, p, x) = \binom{n}{x} \cdot (p)^x \cdot (1-p)^{n-x} = \\ &= \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-x} = \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1,\ldots,6 \end{aligned} \tag{6.325}$$

Če upoštevamo dobljen izraz (6.325), lahko sedaj izračunamo verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke X. Sledi:

$$
\begin{aligned}
p_X(0) &= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{6-0} = \frac{6!}{(6-0)!0!}.1.\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{6!}{(6)!}.\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0.0877915 \\
p_X(1) &= \binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} = \frac{6!}{(6-1)!1!}.\frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 6.\frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.2633745 \\
p_X(2) &= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{6-2} = \frac{6!}{(6-2)!2!}.\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{5.6}{2}.\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.3292181 \\
p_X(3) &= \binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{6-3} = \frac{6!}{(6-3)!3!}.\frac{1}{3^3}.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4.5.6}{2.3}.\frac{1}{3^3}.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \\
&= 60.\frac{1}{3^4}.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0.2194787 \qquad (6.326) \\
p_X(4) &= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{6-4} = \frac{6!}{(6-4)!4!}.\frac{1}{3^4}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5.6}{2}.\frac{1}{3^4}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 15.\frac{1}{3^4}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \\
&= 0.0823045 \\
p_X(5) &= \binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{6-5} = \frac{6!}{(6-5)!5!}.\frac{1}{3^5}.\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 6.\frac{1}{3^5}.\frac{2}{3} = 0.0164609 \\
p_X(6) &= \binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^{6-6} = \frac{6!}{(6-6)!6!}.\frac{1}{3^6}.\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.\frac{1}{3^6}.1 = 0.0013717
\end{aligned}
$$

Na osnovi izračunanih verjetnosti v izrazu (6.326) lahko narišemo funkcijo verjetnostne porazdelitve, kar je za obravnavani primer prikazano na Sliki 6.25.



Slika 6.25: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri šestkratnem poskusu vlečenja krogle

Na osnovi izraza (3.84) lahko sedaj izračunamo matematično upanje (prvi moment) diskretne naključne spremenljivke. Sledi:

$$E(x)=\sum_{x=0}^{6} x\cdot p_X(x)=0\cdot 0.0877915+1\cdot 0.2633745+2\cdot 0.3292181+ \\ +3\cdot 0.2194787+4\cdot 0.0823045+5\cdot 0.0164609\ +6\cdot 0.0013717=\ 2 \tag{6.327}$$

Drugi moment pa je sledeč:

$$E(x^2)=\sum_{x=0}^{6} x^2\cdot p_X(x)=0^2\cdot 0.0877915+1^2\cdot 0.2633745+2^2\cdot 0.3292181+ \\ +3^2\cdot 0.2194787+4^2\cdot 0.0823045+5^2\cdot 0.0164609\ +6^2\cdot 0.0013717=5.333333 \tag{6.328}$$

Na osnovi izraza (3.101) izračunajmo še razpršenost naključne spremenljivke okoli njenega povprečja. Sledi:

$$VAR(x)=E(x^2)-E^2(x)=5.33333-2^2=1.33333 \tag{6.329}$$

Zanima nas še, katera je najbolj verjetna frekvenca bele krogle. Na osnovi izraza (6.261) sledi:

$$n\cdot p-(1-p)\leq m\leq p\cdot(n+1)$$

$$\underbrace{6\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}_{\frac{4}{3}}\leq m\leq\underbrace{\frac{1}{3}\cdot(6+1)}_{\frac{7}{3}}\quad\Rightarrow\quad 1.33333\leq m\leq 2.33333\quad\Rightarrow\quad m=2 \tag{6.330}$$

Torej je najbolj verjetna frekvenca bele krogle enaka vrednosti 2. Ta vrednost je razvidna tudi iz Slike 6.25, saj je pri vrednosti $x=2$ dosežen maksimum.

<u>Primer 10:</u>

Pošten kovanec vržemo šestkrat, pri čemer naj bo hrbet uspešen met. Naj bo X naključna spremenljivka, ki predstavlja število izidov, ko se pojavi hrbet. Narišite funkcijo verjetnostne porazdelitve in izračunajte matematično upanje (pričakovanje). Izračunajte tudi varianco.

Z oznako X bomo, glede na navodilo naloge, označevali naključno spremenljivko, ki predstavlja število padlih hrbtov. Ker sta pri vsakem poskusu metanja kovanca možna dva izida (hrbet, glava), ima naključna spremenljivka X očitno binomsko porazdelitev, kjer šestkrat ponovimo Bernoullijev poskus $(n=6)$. Seveda je verjetnost, da je posamezen poskus metanja kovanca uspešen ali neuspešen, naslednja:

$$p = q = \frac{1}{2} \tag{6.331}$$

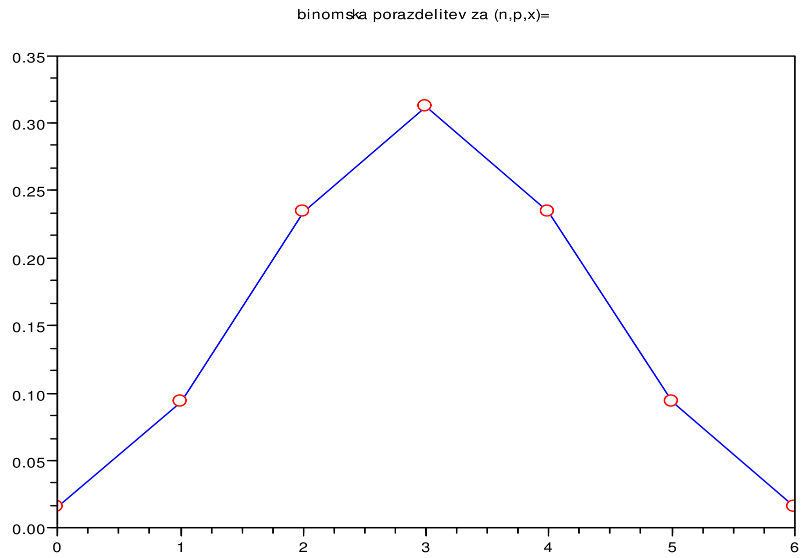
Kot vemo, je matematični zapis za funkcijo verjetnostne porazdelitve naslednji (glej izraz (3.66)):

$$\begin{aligned} p(x) &= P(X = x) = P(n, p, x) = \binom{n}{x} \cdot (p)^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n \\ p(x) &= P(X = x) = P\left(6, \frac{1}{2}, x\right) = \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6, \quad x = 0,1,2,...,6 \end{aligned} \tag{6.332}$$

Če upoštevamo dobljen izraz (6.332), lahko sedaj izračunamo verjetnosti za nastop posameznih vrednosti naključne spremenljivke X. Sledi:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = 0.0156, & x = 0 \\ \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{2^6} = 0.093, & x = 1 \\ \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{2^6} = 0.234, & x = 2 \\ \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.3125, & x = 3 \\ \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{2^6} = 0.234, & x = 4 \\ \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{2^6} = 0.093, & x = 5 \\ \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = 0.0156, & x = 6 \end{cases} \tag{6.333}$$

Na osnovi izračunanih verjetnosti v izrazu (6.333) lahko narišemo funkcijo verjetnostne porazdelitve, kar je za obravnavani primer prikazano na Sliki 6.26.



Slika 6.26: Funkcija porazdelitve verjetnosti pri šestkratnem metu kovanca

Na osnovi izraza (3.84) lahko sedaj izračunamo matematično upanje (prvi moment) diskretne naključne spremenljivke. Sledi:

$$E(x)=\sum_{x=0}^{6} x\cdot p(x)=0\cdot 0.015625+1\cdot 0.093+2\cdot 0.234375+3\cdot 0.3125+ \qquad (6.334)$$

$$+4\cdot 0.234375+5\cdot 0.093+6\cdot 0.015625= \ 3$$

Za izračun variance moramo najprej še izračunati drugi moment. Sledi:

$$E(x^2)=\sum_{x=0}^{6} x^2\cdot p(x)=0^2\cdot 0.015625+1^2\cdot 0.093+2^2\cdot 0.234375+3^2\cdot 0.3125+ \qquad (6.335)$$

$$+4^2\cdot 0.234375+5^2\cdot 0.093+6^2\cdot 0.015625= \ 10.5$$

Tako dobimo:

$$VAR(x)=E(x^2)-E^2(x)=10.5-3^2=1.5 \qquad (6.336)$$

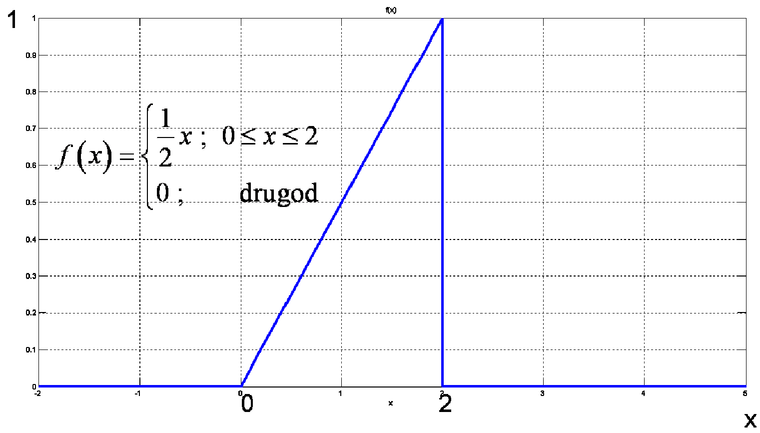
6.3.3 Zvezne naključne spremenljivke in številske karakteristike za zvezne porazdelitve

<u>Primer 1:</u> X je naključna zvezna spremenljivka, za katero velja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \; ; & 0 \le x \le 2 \\ 0 \; ; & \text{drugod} \end{cases} \tag{6.337}$$

Poiščite kumulativno funkcijo F(x)!

Če funkcijo f(x) narišemo, dobimo potek, prikazan na sliki 6.27.



Slika 6.27: Funkcija f(x)

Izris dotične slike 6.27. smo dosegli z zaporedjem naslednjih ukazov v Matlabu:

```
% Izris funkcije f(x) v Matlabu (kumulat_plot.m):
clear;close all;clc;
a=-2, b=2, c=5
n1=20, n2=20, n3=20
x1=linspace(a,0,n1)
x2=linspace(0,b,n2)
x3=linspace(b,c,n3)
fx1=zeros(n1,1)
fx2=0.5*x2
fx3=zeros(n3,1)
x=[x1 x2 x3]
fx=[fx1' fx2 fx3']
plot(x,fx,'LineWidth',3)
grid
xlabel('x')
title('f(x)')
```

Na osnovi izraza (3.70) izračunamo funkcijo *F(x)* na naslednji način:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\;\; x \in \begin{Bmatrix} -\infty < x < 0 \\ 0 < x < 2 \\ 2 < x < \infty \end{Bmatrix} \tag{6.337}$$

torej glede na naravo dane funkcije f(x) le-to opazujemo na naslednjih intervalih:

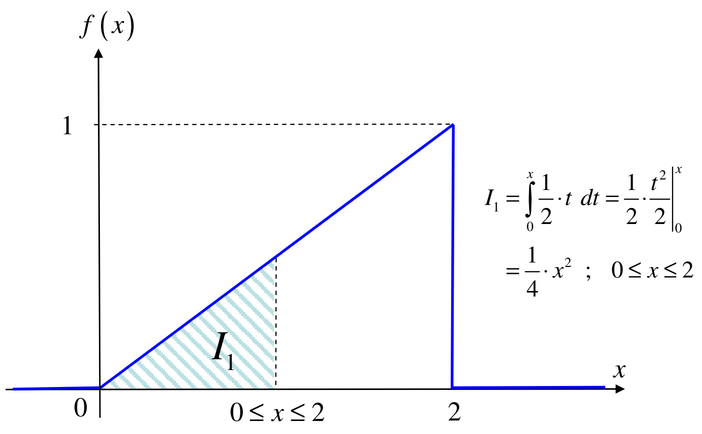
$$x \in \begin{Bmatrix} -\infty < x < 0 \\ 0 < x < 2 \\ 2 < x < \infty \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{Bmatrix}$$

Očitno je funkcija f(x) na intervalih J_1 in J_3 enaka 0. Torej nas za izračun kumulativne funkcije zanima le še interval J_2. Tu pa ločimo dve varianti:

a) Z integracijo, ko se z naraščajočim x pomikamo v desno, še nismo v celoti pokrili celega trikotnika na sliki (6.27),

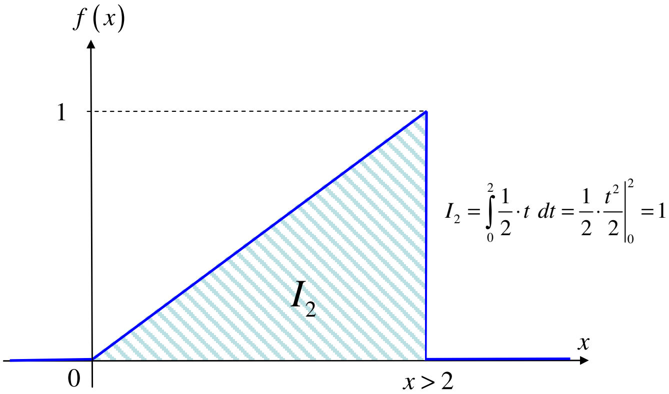
b) Z integracijo, ko se z naraščajočim x pomikamo v desno, smo že v celoti pokrili cel trikotnik na sliki (6.27).

Pri varianti a) nam integracija da rezultat, ki ga prikazuje slika (6.28).



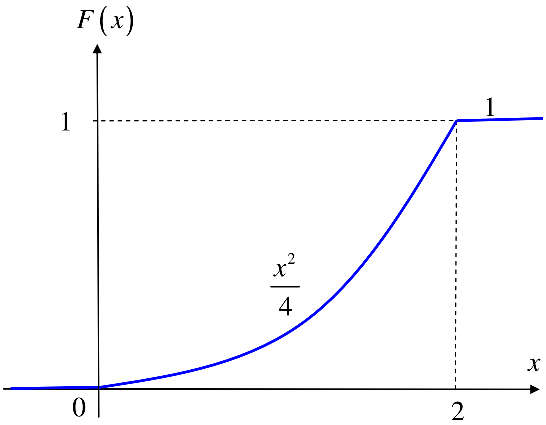
Slika 6.28: Integracija funkcije f(x) za varianto a)

Pri varianti b) nam integracija da rezultat, ki ga prikazuje slika (6.29).



Slika 6.29: Integracija funkcije f(x) za varianto b)

Skupni rezultat za kumulativno funkcijo je prikazan na sliki 6.30.

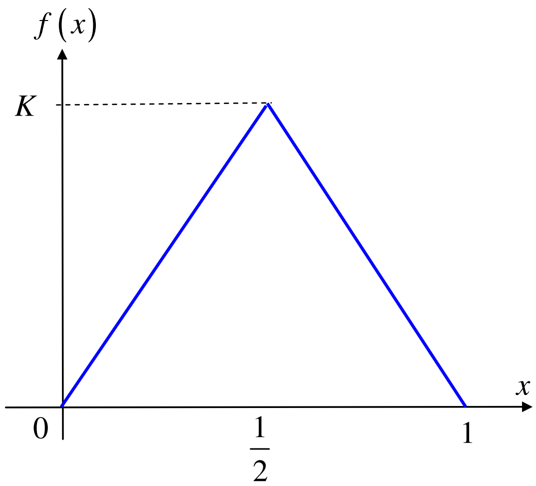


$$F(x) = \begin{cases} 0\,; & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2\,; & 0 \le x \le 2 \\ 1\,; & x > 2 \end{cases}$$

Slika 6.30: Skupni rezultat za kumulativno funkcijo

<u>Primer 2:</u> Spremenljivka X je naključna zvezna spremenljivka, za katero velja:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; & x < 0 \\ 2Kx\,; & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2K(1-x)\,; & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0\,; & x > 1 \end{cases}$$



Poiščite matematično upanje $E(X)$.

Najprej moramo poiskati vrednost parametra K. V ta namen tvorimo izraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{1/2} 2K\, x\, dx + \int_{1/2}^{1} 2K(1-x)\, dx =$$
$$= 2K \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2} + 2K\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{1/2}^{1} =$$
$$= K\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot K\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{K}{4} + 2\cdot K\left(\frac{1}{8}\right) =$$
$$= \frac{2\cdot K}{4} = \frac{K}{2} = 1$$

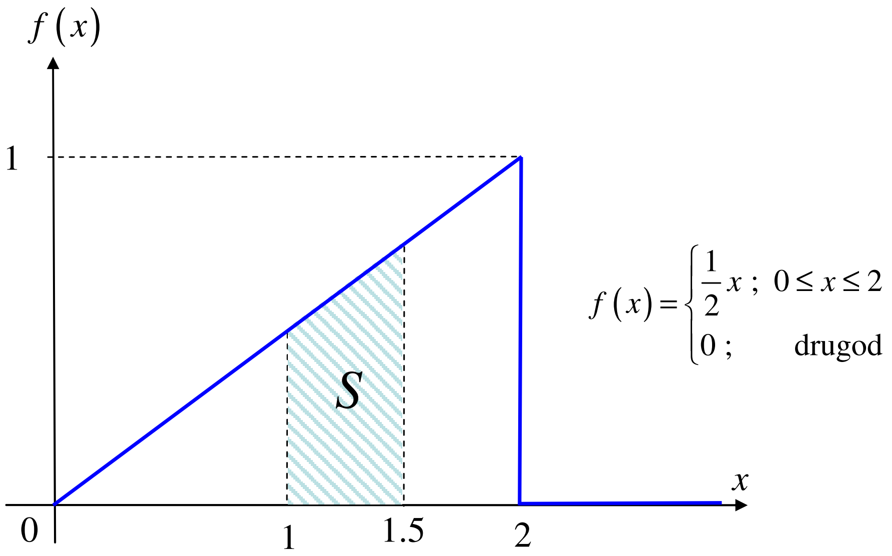
pri čemer smo upoštevali, da velja: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Ker imamo $K = 2$, nam funkcija porazdelitve gostote verjetnosti preide v obliko:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 4x & ; \; 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4(1-x) & ; \; \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad x > 1 \end{cases} \tag{6.338}$$

Matematično upanje dobimo z naslednjim izračunom:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\, dx = \int_{0}^{1/2} x\cdot 4x\, dx + \int_{1/2}^{1} x\cdot 4(1-x)\, dx =$$
$$= 4\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1/2} + 4\cdot\left.\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]\right|_{1/2}^{1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right] =$$
$$= \frac{1}{6} + 4\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\right] = \frac{1}{6} + 4\cdot\left[\frac{3}{8}-\frac{7}{24}\right] = \frac{1}{6} + 4\cdot\left[\frac{9-7}{24}\right] = \frac{1}{6}+\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

Primer 3: *Denimo je X zvezna naključna spremenljivka z naslednjo porazdelitveno funkcijo:*



Poiščite $P(1\le X\le 1.5)$ ter $E(X)$, $VAR(X)$, $STD(X)$. *Napišite tudi program v Matlabu, ki bo z numerično Monte Carlo integracijo numerično izračunal* $P(1\le X\le 1.5)$, $E(X)$ *in* $E(X^2)$.

a) Analitičen izračun rezultatov:

$$P(1\le X\le 1.5)=\text{Površina } S=\int_1^{1.5} f(x)\,dx=$$
$$=\int_1^{1.5}\frac{1}{2}\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^{1.5}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(1.5^2-1^2\right)=0.3125$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}\cdot x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{1}{6}\cdot\left(2^3-0^3\right)=\frac{4}{3} \tag{6.339}$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{1}{8}\cdot\left(2^4-0^4\right)=2$$
$$VAR(X)=E(X^2)-E^2(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$
$$STD(X)=\sqrt{VAR(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) Numeričen izračun rezultatov za $P(1 \le X \le 1.5)$, $E(X)$ *in* $E(X^2)$. Program za posamezne numerične integrale se glasi (seveda za funkcijo vnesemo $\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}$ *in* $\frac{x^3}{2}$ v danih mejah):

```
% numericna integracija z monte carlo (mc_integ.m):
f = input('Vnesi funkcijo, npr. x/2','s');
a = input('Vnesi spodnjo mejo');
b = input('Vnesi zgornjo mejo');
N = input('Vnesi stevilo vzorcev');
sv=(b+a)/2;
stres = sv - a;
I = 0;
for i = 1:N
   x=random('Uniform',sv-stres,sv+stres,1,1); % x se lahko giblje le na defin. obmocju
   I = I + (b-a)*eval(f);
end
I=I/N
disp('Rezultat numericne integracije je:')
I
```

Izpis komandnega okna za izračun $E(X)$ se glasi:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2        x^2/2
Vnesi spodnjo mejo              0
Vnesi zgornjo mejo              2
Vnesi stevilo vzorcev           3000
I =
   1.3427
Rezultat numericne integracije je:
I =
   1.3427
```

Izpis komandnega okna za izračun $P(1 \le X \le 1.5)$ se glasi:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2     x/2
Vnesi spodnjo mejo           1
Vnesi zgornjo mejo           1.5
Vnesi stevilo vzorcev        3000
I =
   0.3126
Rezultat numericne integracije je:
I =
   0.3126
```

Izpis komandnega okna za izračun $E\left(X^2\right)$ se glasi:

Vnesi funkcijo, npr. x/2 x^3/2
Vnesi spodnjo mejo 0
Vnesi zgornjo mejo 2
Vnesi stevilo vzorcev 5000
I =
2.0427
Rezultat numericne integracije je:
I =
2.0427

Torej dobimo približno enake numerične rezultate kot pri analitičnih izračunih. Seveda bi se s številom vzorcev natančnost numeričnih rezultatov povečevala.

<u>Primer 4:</u> Dana je uniformna porazdelitev:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 0 ; & \text{sicer}\end{cases}$$

Poiščite:

a) matematično upanje $E(X)$ in drugi moment $E\left(X^2\right)$,

b) varianco $VAR(X)$, ter

c) kumulativno funkcijo $F(X)$.

a) Izračun matematičnega upanja $E(X)$ in drugega momenta:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx=\int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx=\frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=$$
$$=\frac{1}{(b-a)2} \cdot \left(b^2-a^2\right)= \tag{6.340}$$
$$=\frac{1}{(b-a)2} \cdot (b-a) \cdot (b+a)=\frac{a+b}{2}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{(b-a)3} \cdot \left(b^3 - a^3\right) =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)}$$

b) Izračun variance $VAR(X)$:

$$VAR(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$$VAR(X) = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$VAR(X) = \frac{4b^3 - 4a^3 - (b-a) \cdot 3 \cdot \left(a^2 + 2ab + b^2\right)}{12(b-a)} =$$

$$= \frac{4b^3 - 4a^3 - 3 \cdot \left(a^2 b + 2ab^2 + b^3 - a^3 - 2a^2 b - ab^2\right)}{12(b-a)} =$$

$$= \frac{4b^3 - 4a^3 - 3 \cdot \left(-a^2 b + ab^2 + b^3 - a^3\right)}{12(b-a)} =$$

$$= \frac{4b^3 - 4a^3 + 3a^2 b - 3ab^2 - 3b^3 + 3a^3}{12(b-a)} = \tag{6.341}$$

$$= \frac{b^3 - a^3 + 3a^2 b - 3ab^2}{12(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

pri čemer smo upoštevali relacijo:

$$(b-a)^3 = (b-a) \cdot \left(b^2 - 2ab + a^2\right) =$$

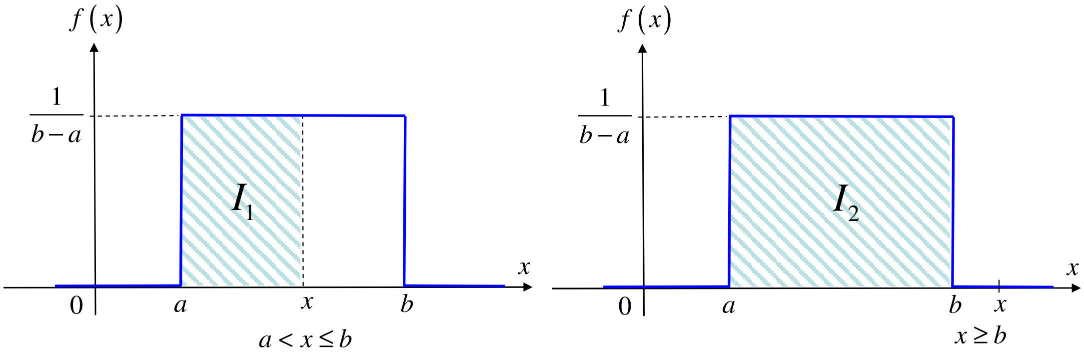
$$= b^3 - 2ab^2 + a^2 b - ab^2 + 2a^2 b - a^3 =$$

$$= b^3 - 3ab^2 + 3a^2 b - a^3 =$$

d) Izračun kumulativne funkcije $F(X)$:

Podobno kot v primeru 1 tega poglavja tudi tu ločimo dve varianti:

- Integracijo, ko se z naraščajočim x pomikamo v desno, pa še nismo v celoti pokrili celega pravokotnika na sliki (6.31),
- Integracijo, ko se z naraščajočim x pomikamo v desno in smo že v celoti pokrili cel pravokotnik na sliki (6.31).



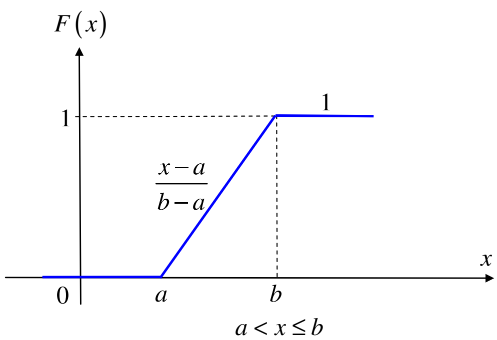
Slika 6.31: Dve varianti integracije funkcije f(x)

Tako dobimo naslednje izraze ter rezultat za kumulativno funkcijo:

$$I_1 = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\cdot t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}\;;\quad a \le x \le b$$

$$I_2 = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\cdot t\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1\;;\quad x > b$$

$$F(x) = \begin{cases} 0\;; & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\;; & a \le x \le b \\ 1\;; & x > b \end{cases} \tag{6.342}$$



<u>*Primer 5:*</u> *Dana je eksponentna porazdelitev:* $f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$, $x > 0$.

Izračunaj $E(X), VAR(X)$ in $F(x)$*!*

Najprej bomo izračunali matematično upanje, pri čemer si bomo pomagali z integracijo po delih (per partes):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx = \frac{1}{\beta} \underbrace{\int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx}_{I}$$

$$x = u \qquad e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx = dv$$

$$dx = du \qquad -\beta \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} = v$$

$$I = u \cdot v - \int v\, du = \left[x \left(-\beta \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \right) \right]\Bigg|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \beta \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx = 0 + \int_{0}^{\infty} \beta \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx =$$

$$= \beta \cdot (-\beta) \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \Bigg|_{0}^{\infty} = -\beta^2 (0 - 1) = \beta^2$$

Za matematično upanje torej dobimo:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \cdot \beta^2 = \beta \qquad (6.343)$$

V nadaljevanju bomo izračunali varianco:

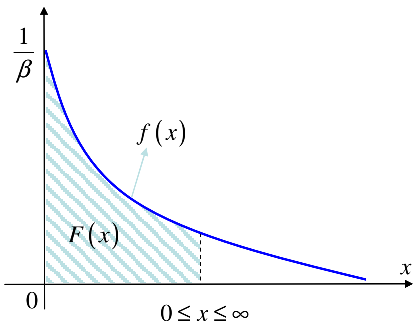
$$VAR(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}_{E(X^2)} - E^2(X) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx - \beta^2$$

Pri izračunu tega izraza je potrebno vložiti kar nekaj napora. Po končani izpeljavi dobimo naslednji rezultat za varianco (glej tabelo na sliki 41):

$$VAR(X) = \beta^2 \qquad (6.344)$$

Izračunajmo še kumulativno funkcijo. V ta namen lahko opazujemo sliko (6.32).



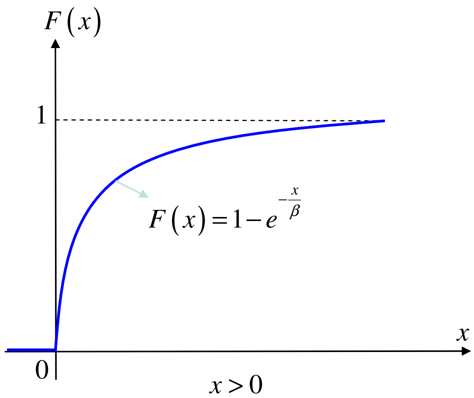
Slika 6.32: Integracije funkcije f(x)

Dobimo naslednji izraz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{t}{\beta}}\,dt\ ;\quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\beta} \cdot (-\beta) \cdot e^{-\frac{t}{\beta}} \Bigg|_0^x = -1 \cdot e^{-\frac{t}{\beta}} \Bigg|_0^x = -1 \cdot \left(e^{-\frac{x}{\beta}} - 1 \right) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}\ ;\ x > 0 \tag{6.345}$$

Potek te funkcije je prikaza na sliki 6.33.



Slika 6.33: Potek funkcije F(x)

<u>Primer 6:</u> Denimo je X naključna spremenljivka, ki ima eksponentno porazdelitev in predstavlja življenjsko delo določene komponente, kjer je $\beta = 120$. *Poiščite verjetnost, da bo komponenta zdržala manj kot 60 dni oz. več kot 240 dni.*

Reševanje te naloge poteka na naslednji način:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \ ; \ x > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{120} \cdot e^{-\frac{x}{120}} \ ; \ x > 0$$

Ker je $x > 0$, gotovo lahko rečemo naslednje:

$$P(0 \le x \le 60) = P(-\infty \le x \le 60)$$

Če upoštevamo relacijo v izrazu (3.50), dobimo:

$$F(b) - F(a) = P(a \le X \le b)$$

$$F(60) - F(0) = P(0 \le X \le 60)$$

$$F(60) = P(0 \le X \le 60)$$

Velja torej za verjetnost, da bo komponenta zdržala manj kot 60 dni (glej tudi izraz (3.345)):

$$P(0 \le x \le 60) = F(60) = 1 - e^{-\frac{60}{120}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.393 \tag{6.346}$$

Torej je cca. 39% verjetnosti, da bo komponenta zdržala manj kot 60 dni. Seveda bi do tega rezultata lahko prišli tudi s pomočjo integracije:

$$\begin{aligned} P(0 \le x \le 60) &= \int_0^{60} f(x)\ dx = \int_0^{60} \frac{1}{120} \cdot e^{-\frac{x}{120}}\ dx = \\ &= \frac{1}{120} \cdot (-120) \cdot e^{-\frac{x}{120}} \Big|_0^{60} = \\ &= -1 \cdot \left(e^{-\frac{60}{120}} - 1 \right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.393 \end{aligned}$$

Izračunajmo še verjetnost, da bo komponenta zdržala več kot 240 dni:

$$\begin{aligned}P(X>240)&=P(240\le x\le\infty)=\int_{240}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{240}^{\infty}\frac{1}{120}\cdot e^{-\frac{x}{120}}\,dx=\\&=\frac{1}{120}\cdot(-120)\cdot e^{-\frac{x}{120}}\Big|_{240}^{\infty}=\\&=-1\cdot\left(0-e^{-2}\right)=0.135\end{aligned}\tag{6.347}$$

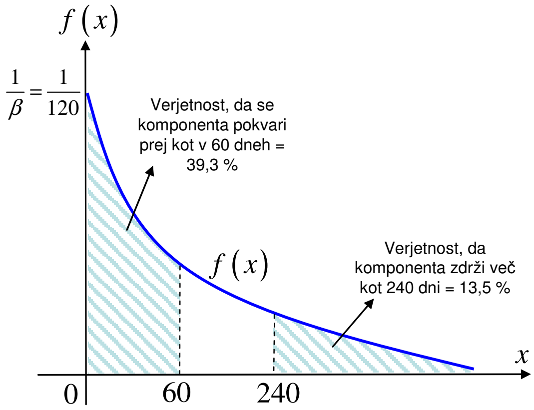
Seveda bi do tega rezultata lahko prišli tudi na naslednji način:

$$\underbrace{P(-\infty\le x\le 240)}_{F(240)}+P(240\le x\le\infty)=1$$

Sledi: (6.348)

$$P(x>240)=1-F(240)=1-\left(1-e^{-\frac{240}{120}}\right)=e^{-2}=0.135$$

Dobljene rezultate lahko ilustriramo na sliki 6.34.



Slika 6.34: Verjetnost (ploščina!),da se komponenta pokvari prej kot v 60 dneh, oz. zdrži več kot 240 dni

Če bi računali verjetnost $P(0\le x\le 60)$ v Matlabu z numerično integracijo (funkcija mc_integ.m), bi dobili naslednji rezultat:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2      exp(-x/120)/120
Vnesi spodnjo mejo            0
Vnesi zgornjo mejo            60
Vnesi stevilo vzorcev         3000
Rezultat numericne integracije je:
I =
   0.3927
```

Če pa bi računali verjetnost $P(240 \le x \le \infty)$ v Matlabu z numerično integracijo (funkcija mc_integ.m), bi dobili naslednji rezultat:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2      exp(-x/120)/120
Vnesi spodnjo mejo            240
Vnesi zgornjo mejo            1000
Vnesi stevilo vzorcev         3000
Rezultat numericne integracije je:
I =
   0.1366
```

kjer je razvidno, da smo dejansko postavili zgornjo mejo na 1000, saj do tu tako in tako zajamemo večino porazdelitve gostote verjetnosti.

<u>Primer 7:</u> Dana je naslednja funkcija zvezne porazdelitve gostote verjetnosti:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{drugod} \end{cases}$$

a) Poiščite vrednost prametra c in narišite $f(x)$.

b) Poiščite kumulativno funkcijo $F(x)$ in jo narišite.

c) Poiščite verjetnost $P(1 \le X \le 2)$.

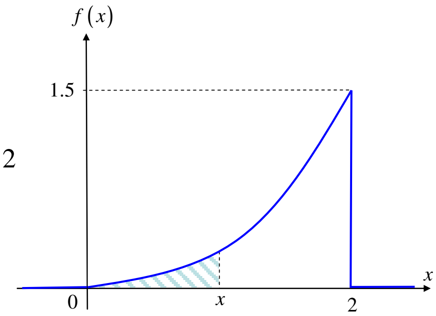
d) Poiščite $E(X)$ in $VAR(X)$.

Izračun za točko a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 cx^2\,dx = c \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{c}{3} \cdot 8 = 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{3}{8}$$

Sledi:

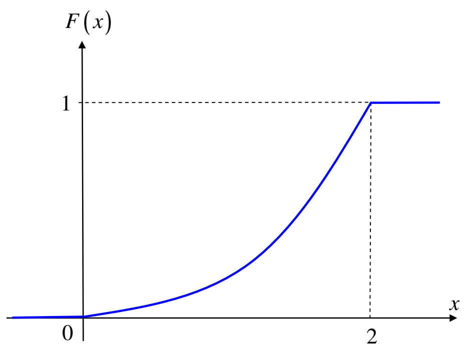
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2 & ; 0 \le x \le 2 \\ 0 & ; \text{drugod} \end{cases} \tag{6.349}$$



Izračun za točko b):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}\int_0^x f(t)\,dt\ ;\ 0\le x\le 2\\ \int_0^2 f(t)\,dt\ ;\quad x>2\end{cases}=\begin{cases}\int_0^x \frac{3}{8}t^2\,dt\ ;\ 0\le x\le 2\\ \int_0^2 \frac{3}{8}t^2\,dt\ ;\quad x>2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}\left.\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{t^3}{\cancel{3}}\right|_0^x\ ;\ 0\le x\le 2\\ \left.\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{t^3}{\cancel{3}}\right|_0^2\ ;\quad x>2\end{cases}=\begin{cases}\frac{x^3}{8}\ ;\ 0\le x\le 2\\ 1\ ;\quad x>2\\ 0\ ;\quad \text{drugod}\end{cases} \tag{6.350}$$

Potek kumulativne funkcije je prikazan na sliki 6.35.



Slika 6.35: Potek kumulativne funkcije

Izračun za točko c):

$$P(1\le x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{8}-\frac{1^3}{8}=\frac{7}{8} \tag{6.351}$$

Izračun na drug način:

$$P(1\le x\le 2)=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\frac{3}{8}x^2\,dx=\left.\frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{2^3-1^3}{8}=\frac{7}{8} \tag{6.352}$$

Izračun za točko d):

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x\;dx=\int_{0}^{2} x\cdot\frac{3}{8}\cdot x^2\;dx=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=\frac{3}{8\cdot 4}\cdot 16=\frac{3}{2}$$

Še izračun 2. *momenta*:

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\;dx=\int_{0}^{2} x^2\cdot\frac{3}{8}\cdot x^2\;dx=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{3}{8}\cdot\frac{32}{5}=\frac{12}{5} \tag{6.353}$$

Sledi:

$$VAR(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{12}{5}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{48-45}{20}=\frac{3}{20} \tag{6.354}$$

<u>*Primer 8:*</u> *Dana je naslednja funkcija zvezne porazdelitve gostote verjetnosti:*

$$f(x)=\begin{cases} cx(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & drugod \end{cases} \tag{6.355}$$

a) poiščite vrednost parametra c in narišite f(x).

b) poiščite kumulativno funkcijo F(x).

c) poiščite verjetnost $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4})$.

d) poiščite E(X) in VAR(X).

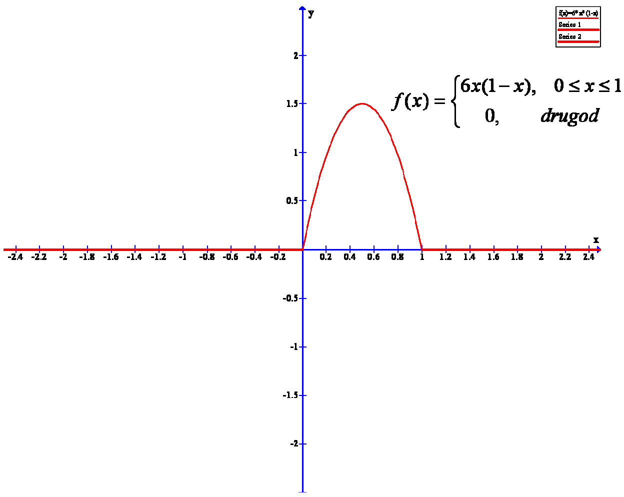
Izračun za a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^1 cx(1-x)dx=c\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=c\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=c\frac{1}{6}=1\quad\Rightarrow\quad c=6 \tag{6.356}$$

Sledi:

$$f(x)=\begin{cases} 6x(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & drugod \end{cases} \tag{6.357}$$

Ta funkcija ima potek, ki ga prikazuje slika 6.36.



Slika 6.36: Potek funkcije f(x)

Izračun za b):

- Pri x < 0 velja:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0, \quad x<0$$

- Pri $0 \le x \le 1$ velja:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} 6t(1-t)dt = 6\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^x =$$

$$=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]=6\left[\frac{3x^2}{6}-\frac{2x^3}{6}\right]=x^2\left(3-2x\right), \quad 0\le x\le 1 \tag{6.358}$$

- Pri $x>1$ velja:

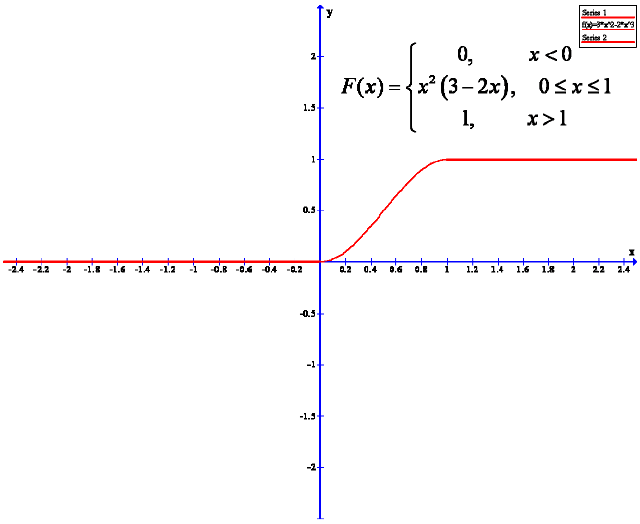
$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} 0dt = \int_{0}^{1} 6t(1-t)dt = 6\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$=6\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=6\left[\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right]=1, \quad x>1$$

Kumulativna funkcija torej je:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2\left(3-2x\right), & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Njen izgled prikazuje slika 6.37.



Slika 6.37: Potek funkcije F(x)

Izračun za c):

1. način:

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4}\right)=P\left(X\le\frac{3}{4}\right)-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\\
&=F\left(\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(3-2\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(3-2\frac{1}{2}\right)=\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{6}{4}\right)-\frac{1}{2}=2\left(\frac{3}{4}\right)^3-\frac{1}{2}=0.34375
\end{aligned}
\tag{6.359}
$$

2. način:

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)dx=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=\\
&=6\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3}-\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right\}\right]=6\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{6}-\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{6}-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{6}\right)\right]=\\
&=6\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{\left(\frac{6}{4}\right)}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)\right]=6\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\right]=6\left[\frac{3^2}{4^3}-\frac{1}{12}\right]=0.3475
\end{aligned}
\tag{6.360}
$$

Izračun za d):

Matematično upanje (1. moment) je:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx=\int_{0}^{1} x.6x(1-x)dx=6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \qquad (6.361)$$

Drugi moment je:

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx=\int_{0}^{1} x^2.6x(1-x)dx=6\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1=6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0.3 \qquad (6.362)$$

Varianca je:

$$VAR(x)=E(x^2)-E^2(x)=0.3-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.3-0.25=0.05 \qquad (6.363)$$

Poglejmo si še, kakšen bi bil izpis komandnega okna v Matlabu pri izračunu verjetnosti $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4})$ s pomočjo funkcije mc_integ.m:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2        6*x*(1-x)
Vnesi spodnjo mejo              0.5
Vnesi zgornjo mejo              0.75
Vnesi stevilo vzorcev           3000
Rezultat numericne integracije je:
I =
   0.3428
```

6.3.4 Pričakovanje funkcij naključnih spremenljivk

<u>*Primer 1:*</u> *Naj bo naključna spremenljivka X uniformno porazdeljena po zakonu: $X\sim U\left(0,1\right)$, ter velja za naključno spremenljivko Y naslednja odvisnost: $Y=e^X$. Poiščite E(Y).*

Na osnovi izraza (3.128) lahko zapišemo:

$$
\begin{aligned}
&E(Y)=E\left(g\left(X\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx=E(e^{X})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{x}\cdot f\left(x\right)dx=\\
&=\int_{0}^{1} e^{x}\cdot\frac{1}{1-0}dx=e^{x}\Big|_{0}^{1}=e-1
\end{aligned}
\tag{6.364}
$$

<u>Primer 2:</u> Naj za naključni spremenljivki X in Y velja:

$$
\begin{aligned}
X\left(\Theta\right)&=\cos\Theta=g\left(\Theta\right)\\
Y\left(\Theta\right)&=\sin\Theta=h\left(\Theta\right)
\end{aligned}
\tag{6.365}
$$

kjer je Θ *uniformno porazdeljena po zakonu:* $\Theta\sim U\left(0,2\pi\right)$. *Poiščite E(X), E(Y),* $E\left(X^{2}\right)$, $E\left(Y^{2}\right)$ *in* $E\left(X\cdot Y\right)$.

Izračuni so naslednji:

$$
\begin{aligned}
&E(X)=E\left(g\left(\Theta\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\Theta\right)\cdot f\left(\Theta\right)d\Theta=E(\cos\Theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\Theta\cdot f\left(\Theta\right)d\Theta=\\
&=\int_{0}^{2\pi}\cos\Theta\cdot\frac{1}{2\pi-0}d\Theta=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\sin\Theta\right)\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-0+0\right)=0
\end{aligned}
\tag{6.366}
$$

$$
\begin{aligned}
&E(Y)=E\left(h\left(\Theta\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\Theta\right)\cdot f\left(\Theta\right)d\Theta=E(\sin\Theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\Theta\cdot f\left(\Theta\right)d\Theta=\\
&=\int_{0}^{2\pi}\sin\Theta\cdot\frac{1}{2\pi-0}d\Theta=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\cos\Theta\right)\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-1\right)=0
\end{aligned}
\tag{6.367}
$$

$$
\begin{aligned}
&E(X^{2})=E(\cos^{2}\Theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos^{2}\Theta\cdot f\left(\Theta\right)d\Theta=\\
&=\int_{0}^{2\pi}\cos^{2}\Theta\cdot\frac{1}{2\pi-0}d\Theta=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\Theta}{2}d\Theta=\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}d\Theta+\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2\Theta}{2}d\Theta\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\pi+\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\cos 2\Theta d\Theta\right]=\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\pi+\frac{1}{4}\int_{0}^{4\pi}\cos\Omega d\Omega\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\pi+\frac{1}{4}\left(-\sin\Omega\right)_{0}^{4\pi}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\pi+0\right]=\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{6.368}
$$

Na podoben način bi dobili:

$$
\begin{aligned}
&E(Y^2) = E(\sin^2\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\Theta \cdot f(\Theta)\, d\Theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\Theta \cdot \frac{1}{2\pi - 0} d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\Theta}{2} d\Theta = ... \\
&E(Y^2) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{6.369}
$$

Izračunajmo še $E(X \cdot Y)$:

$$
\begin{aligned}
&E(X\cdot Y) = E\big(g(\Theta)\cdot h(\Theta)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\Theta)\cdot h(\Theta)\cdot f(\Theta)\, d\Theta = E(\cos\Theta\cdot\sin\Theta) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\Theta\cdot\sin\Theta\cdot f(\Theta)\, d\Theta = \int_0^{2\pi} \cos\Theta\cdot\sin\Theta\cdot\frac{1}{2\pi-0} d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\Theta}{2}\cdot d\Theta = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\Theta\cdot d\Theta = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\sin\Omega\cdot d\Omega = \frac{1}{8\pi}(\cos\Omega)_0^{4\pi} = \frac{1}{8\pi}(1-1) = 0
\end{aligned}
\tag{6.370}
$$

6.3.5 Transformacijska metoda

Primer 1: Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y = a\cdot X + b$. Poiščite $f_Y(y)$, izraženo z $f_X(x)$, pri čemer je $a > 0$.

Na osnovi izraza (3.131) lahko zapišemo:

$$
\begin{aligned}
&f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left[h(y)\right]\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right| \\
&y = a\cdot x + b \;\Rightarrow\; x = \frac{y-b}{a} = h(y) \\
&\frac{d\,h(y)}{dy} = \frac{1}{a}
\end{aligned}
\tag{6.371}
$$

Odtod sledi:

$$
f_Y(y) = \left|\frac{1}{a}\right|\cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{6.372}
$$

Kakšna pride funkcija $f_Y(y)$, če je $f_X(x) = \begin{cases} 1\ ;\ 0 < x < 1 \\ 0\ ;\ \text{drugod} \end{cases}$?

Dobimo naslednji izraz za $f_X(x)$:

$$f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\begin{cases}1\ ;\ 0\le\dfrac{y-b}{a}<1\\ 0\ ;\qquad \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}1\ ;\ 0\le y-b<a\\ 0\ ;\qquad \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}1\ ;\ b\le y<a+b\\ 0\ ;\qquad \text{drugod}\end{cases}\tag{6.373}$$

Odtod sledi:

$$f_Y(y)=\left|\frac{1}{a}\right|\cdot\begin{cases}1\ ;\ b\le y<a+b\\ 0\ ;\qquad \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{|a|}\ ;\ b\le y<a+b\\ 0\ ;\qquad \text{drugod}\end{cases}\tag{6.374}$$

<u>Primer 2:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y=X^2$, pri čemer je $y>0$. Poiščite $f_Y(y)$, izraženo z $f_X(x)$.

Najprej izpeljimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}&y=x^2\ \Rightarrow\ x=h(y)=\pm\sqrt{y}\ \Rightarrow\ x_1=\sqrt{y}\ ,\ x_2=-\sqrt{y}\\&\frac{d\,h(y)}{dy}=\pm\frac{1}{2\sqrt{y}}\end{aligned}\tag{6.375}$$

Na osnovi izraza (3.131) lahko sedaj zapišemo:

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right|\cdot f_X\left[h(y)\right]=\\&=\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|\cdot\underbrace{f_X\left[\pm\sqrt{y}\right]}_{\text{Pravilo: } f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)}=\\&=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]\end{aligned}\tag{6.376}$$

Sledi:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]\ ;\ y>0\\ 0\qquad ;\ y<0\longrightarrow\text{Sicer bi bil x imaginaren.}\end{cases}\tag{6.377}$$

Kakšna pride funkcija $f_Y(y)$, če velja $X\sim N(0,1)$ in je:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{6.378}$$

Dobimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\left|\sqrt{y}\right|} \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}} \right] & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}} \right) & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\pi y}} \cdot \cancel{2} e^{-\frac{y}{2}} & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ y < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.380}$$

<u>Primer 3:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y = e^X$, pri čemer je $f_X(x)$ uniformno porazdeljena na intervalu $(0,1)$. Poiščite $f_Y(y)$, izraženo z $f_X(x)$.

Najprej izpeljimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
& y = e^x \ \Big| \ln \ \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln e = x = h(y) \\
& h(y) = \ln y \\
& \left| \frac{d\,h(y)}{dy} \right| = \left| \frac{1}{y} \right|
\end{aligned} \tag{6.381}$$

Na osnovi izraza (3.131) lahko sedaj zapišemo:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \left| \frac{d\,h(y)}{dy} \right| \cdot f_X\left[h(y)\right] = \left| \frac{1}{y} \right| \cdot f_X\left[\ln y\right] = \\
&= \frac{1}{y} \cdot f_X\left[\ln y\right], \text{ saj } y > 0 \ (\text{sicer } \ln y \text{ nedefiniran})
\end{aligned} \tag{6.382}$$

Ker je naključna spremenljivka X uniformno porazdeljena, velja:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-0} & ;\ 0\le x\le 1\\ 0 & ;\ \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}1\ ;\ 0\le x\le 1\\ 0\ ;\ \text{drugod}\end{cases} \tag{6.383}$$

Dobimo naslednji izraz:

$$f_Y(y)=\frac{1}{y}\cdot f_X[\ln y]\ ,\ y>0=\frac{1}{y}\cdot\begin{cases}1\ ;\ 0\le \ln y<1\\ 0\ ;\quad \text{drugod}\end{cases}\ ,\ y>0 \tag{6.384}$$

Ker velja:

$$0\le \ln y<1\ \rightarrow\ 1\le y\le e \tag{6.385}$$

dobimo:

$$f_Y(y)=\frac{1}{y}\cdot\begin{cases}1\ ;\ 1\le y\le e\\ 0\ ;\quad \text{drugod}\end{cases}\ ,\ y>0=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\ ;\ 1\le y\le e\\ 0\ ;\quad \text{drugod}\end{cases} \tag{6.386}$$

pri čemer je *y > 0.*

<u>Primer 4</u>: V primeru 1 poglavja 6.3.4. smo izpeljali rezultat (6.364). Rešite to nalogo še s pomočjo transformacijske metode. Torej, dano imamo funkcijo $Y=e^X$. Poiščite $f_Y(y)$, če je $f_X(x)$ uniformno porazdeljena na intervalu $(0,1)$. Nato na osnovi funkcije $f_Y(y)$ poiščite matematično upanje $E(Y)$.

Najprej zapišemo naslednje izraze:

$$\begin{aligned}&y=e^x\ \Big|\ \ln\ \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln e=x=h(y)\\&h(y)=\ln y\\&\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right|=\left|\frac{1}{y}\right|\end{aligned} \tag{6.387}$$

Na osnovi izraza (3.131) lahko sedaj zapišemo:

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right|\cdot f_X\left[h(y)\right]=\left|\frac{1}{y}\right|\cdot f_X[\ln y]=\\&=\frac{1}{y}\cdot f_X[\ln y]\ ,\ \text{saj}\ y>0\ (\text{sicer}\ \ln y\ \text{nedefiniran})\end{aligned} \tag{6.388}$$

Če upoštevamo, da velja:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-0} & ; 0\le x\le 1\\ 0 & ; \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}1 ; 0\le x\le 1\\ 0 ; \text{drugod}\end{cases} \tag{6.389}$$

sledi:

$$\begin{gathered}f_Y(y)=\frac{1}{y}\cdot f_X[\ln y],\ y>0=\frac{1}{y}\cdot\begin{cases}1 ; 0\le \ln y<1\\ 0 ; \quad \text{drugod}\end{cases},\ y>0\\ 0\le \ln y<1 \ \rightarrow\ 1\le y\le e\end{gathered} \tag{6.390}$$

Sledi:

$$f_Y(y)=\frac{1}{y}\cdot\begin{cases}1 ; 1\le y\le e\\ 0 ; \quad \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y} ; 1\le y\le e\\ 0 ; \quad \text{drugod}\end{cases} \tag{6.391}$$

Odtod pa sledi za matematično upanje:

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy=\int_{1}^{e} y\cdot\frac{1}{y}dy=e-1 \tag{6.392}$$

Očitno dobimo enak rezultat kot je bil zapisan v izrazu (6.364).

<u>Primer 5</u>: Imamo enak primer kot prejšnji. Torej, dano imamo funkcijo $Y=e^X$. Poiščite $f_Y(y)$, če je $f_X(x)$ uniformno porazdeljena na intervalu $(0,1)$. Pri tem si pri iskanju rešitve pomagajte s kumulativno funkcijo $F_Y(y)$.

Ker je naključna spremenljivka X uniformno porazdeljena, velja:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-0} & ; 0\le x\le 1\\ 0 & ; \text{drugod}\end{cases}=\begin{cases}1 ; 0\le x\le 1\\ 0 ; \text{drugod}\end{cases} \tag{6.393}$$

Za kumulativno funkcijo $F_Y(y)$ lahko zapišemo:

$$\begin{gathered}F_Y(y)=P(X\le x)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y} f_T(t)\cdot dt=\int_{0}^{\ln y} 1\cdot dt=\ln y\\ \textit{kjer velja}: 0\le \ln y<1 \ \rightarrow\ 1\le y\le e\end{gathered} \tag{6.394}$$

Odtod sledi:

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{y},\quad 1\le y\le e \tag{6.395}$$

Primer 6: Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y=\left(1-e^{-X}\right)^2$*, pri čemer je* $f_X(x)$ *eksponentno porazdeljena:*

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{6.396}$$

Poiščite $f_Y(y)$ *s transformacijsko metodo, pri čemer je y definiran na intervalu [0,1].*

Če korenimo funkcijsko odvisnost $Y=\left(1-e^{-X}\right)^2$ in izrazimo X z Y, dobimo:

$$\begin{aligned}
&\pm\sqrt{Y}=\left(1-e^{-X}\right)\\
&e^{-X}=1\pm\sqrt{Y}\\
&\log aritmiramo:\\
&(-X)=\ln\left(1\pm\sqrt{Y}\right)\\
&X=-\ln\left(1\pm\sqrt{Y}\right)\quad oz.\\
&x=-\ln\left(1\pm\sqrt{y}\right)
\end{aligned} \tag{6.397}$$

Odvajamo dobljeni izraz:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dx}{dy}\right|=\left|\frac{d}{dy}\left(-\ln\left(1\pm\sqrt{y}\right)\right)\right|=\left|\frac{1}{1\pm\sqrt{y}}\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\right|=\left|\frac{1}{1\pm\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\right|=\\
&=\left|\frac{1}{2\sqrt{y}\left(1\pm\sqrt{y}\right)}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left|\frac{1}{\left(1\pm\sqrt{y}\right)}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}\left(1\pm\sqrt{y}\right)}
\end{aligned} \tag{6.398}$$

Na osnovi izraza (3.131) lahko sedaj zapišemo:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left|\frac{dx}{dy}\right| \cdot f_X[x] = \frac{1}{2\sqrt{y}\left(1 \pm \sqrt{y}\right)} \cdot \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}\left(1 \pm \sqrt{y}\right)} \cdot \begin{cases} 1 \pm \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & drugod \end{cases} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \tag{6.399}$$

<u>Primer 7:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y = 2 \cdot X + 3$, pri čemer velja $X \sim U(-1,2)$. Izračunajte $f_Y(y)$ s pomočjo postopka transformacije.

Najprej tvorimo naslednje izraze:

$$x = \frac{y-3}{2} = g(y)$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d\,g(y)}{dy}\right| = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \left|\frac{d\,g(y)}{dy}\right| \cdot f_X\left(g(y)\right)$$

Za funkcijo $f_X(x)$ velja:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-(-1)} & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{drugod} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \; ; -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \; ; \quad \text{drugod} \end{cases}$$

Sledi:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{3} \; ; -1 \leq g(y) \leq 2 \\ 0 \; ; \qquad \text{drugod} \end{cases}$$

Tvorimo še:

$$-1 \le g(y) \le 2$$
$$\Downarrow$$
$$-1 \le \frac{y-3}{2} \le 2 \;\Big|\cdot 2$$
$$-2 \le y-3 \le 4 \;\Big|+3$$
$$1 \le y \le 7$$

Dobimo torej:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\cdot\begin{cases} \frac{1}{3} \; ; 1 \le y \le 7 \\ 0 \; ; \quad \text{drugod} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} \; ; 1 \le y \le 7 \\ 0 \; ; \quad \text{drugod} \end{cases}$$

6.3.6 Združeno porazdeljene naključne spremenljivke

<u>Primer1</u>: Naj bodo X, Y in Z neodvisne standardno porazdeljene naključne spremenljivke. Za odvisno naključno spremenljivko W velja:

$$W = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{6.400}$$

Poiščite funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti $f_W(w)$!

Ker so *X, Y in Z neodvisne standardno porazdeljene naključne spremenljivke, lahko zapišemo:*

$$\begin{aligned} & f_{XYZ}(x,y,z) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}} \end{aligned} \tag{6.401}$$

Za kumulativno funkcijo spremenljivke W velja:

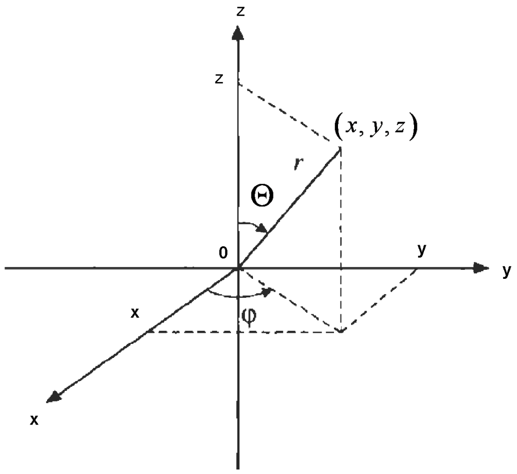
$$\begin{aligned} & F_W(w) = P(W \le w) = P\left(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \le w\right) = P\left(X^2+Y^2+Z^2 \le w^2\right) = \\ & = \iiint_{R_W} f_{XYZ}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{R_W} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot e^{-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}} dxdydz \end{aligned} \tag{6.402}$$

pri čemer velja:

$$R_W = \left\{ (x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq w^2 \right\} \tag{6.403}$$

Če vpeljemo sferične koordinate, dobimo (glej sliko 6.37) [11]:

$$\begin{aligned} &X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \\ &x^2 + y^2 + z^2 = r^2, ter \\ &dx \cdot dy \cdot dz = r^2 \cdot \sin\Theta \cdot dr \cdot d\Theta \cdot d\varphi \end{aligned} \tag{6.404}$$



Slika 6.37.: Sferične koordinate

Izraz (6.402) nam preide v obliko:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{w} e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2 \cdot \sin\Theta \cdot dr \cdot d\Theta \cdot d\varphi = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \left[\int_0^{w} \left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2 \right) dr \right] \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin\Theta \cdot d\Theta \right] \cdot \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \left[-\cos\Theta \right]_0^{\pi} (2\pi) \cdot \left[\int_0^{w} \left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2 \right) dr \right] = \frac{2(2\pi)}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \cdot \left[\int_0^{w} \left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2 \right) dr \right] \end{aligned} \tag{6.405}$$

Gotovo velja:

$$F_W(w) = P\left(R^2 \leq w^2\right) = P(R \leq w) = \int_0^{w} f_R(r) dr \tag{6.406}$$

Če izenačimo integrala v (6.405) in (6.406), očitno vidimo naslednjo relacijo:

$$f_R(r) = \left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2\right) \cdot \frac{2(2\pi)}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2\right) = \sqrt{\frac{4}{2\pi}}\left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(e^{-\frac{(r^2)}{2}} r^2\right)$$

oz. (6.406)

$$f_W(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{(w^2)}{2}} w^2\right) = \frac{dF_W(w)}{dw}$$

kjer je seveda $w > 0$. Torej velja:

$$f_W(w) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{(w^2)}{2}} w^2\right), w > 0 \\ 0, \qquad w < 0 \end{cases} \tag{6.407}$$

<u>Primer2</u>:

X in Y sta naključni spremenljivki, katerih združena porazdelitev je $h(x_i, y_i)$, marginalne porazdelitve pa so označene kot:

$$\left.\begin{matrix} f(x_i) \\ g(y_i) \end{matrix}\right\} \text{marginalne (mejne) porazdelitve}$$

Za dano tabelo na sliki (6.38) poiščite korelacijo med X in Y!

	X \ Y	y_1: -3	y_2: 2	y_3: 4	vsota	
x_1	1	$h(x_1, y_1)$ 0.1	$h(x_1, y_2)$ 0.2	$h(x_1, y_3)$ 0.2	0.5	$f(x_1)$
x_2	3	$h(x_2, y_1)$ 0.3	$h(x_2, y_2)$ 0.1	$h(x_2, y_3)$ 0.1	0.5	$f(x_2)$
	vsota	0.4	0.3	0.3		
		$g(y_1)$	$g(y_2)$	$g(y_3)$		

Slika 6.38.: Zzdružena in mejni porazdelitvi za spremenljivki X in Y.

Najprej bomo poiskali naslednja matematična upanja:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot f(x_i) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) = 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 2$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot g(y_j) = y_1 \cdot g(y_1) + y_2 \cdot g(y_2) + y_3 \cdot g(y_3) =$$
$$= (-3) \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 = -1.2 + 1.8 = 0.6$$

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot h(x_i, y_j) = \\ &= x_1 \cdot y_1 \cdot h(x_1, y_1) + x_1 \cdot y_2 \cdot h(x_1, y_2) + x_1 \cdot y_3 \cdot h(x_1, y_3) + \\ &+ x_2 \cdot y_1 \cdot h(x_2, y_1) + x_2 \cdot y_2 \cdot h(x_2, y_2) + x_2 \cdot y_3 \cdot h(x_2, y_3) = \\ &= 1 \cdot (-3) \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 0.2 + 3 \cdot (-3) \cdot 0.3 + 3 \cdot 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 4 \cdot 0.1 = \\ &= 0\end{aligned} \tag{6.408}$$

Za kovarianco in korelacijski koeficient velja:

$$COV(X,Y) = \overbrace{E(X,Y)}^{\mu_{XY}} - \overbrace{E(X)}^{\mu_X} \cdot \overbrace{E(Y)}^{\mu_Y} = 0 - 2 \cdot 0.6 = -1.2 \tag{6.409}$$
$$\sigma(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\delta_X \cdot \delta_Y}$$

Najprej izračunajmo obe standardni deviaciji:

$$\begin{aligned}\delta_X &= \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \\ &= \sqrt{\sum_i x_i^2 \cdot f(x_i) - 2^2} = \\ &= \sqrt{1^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.5 - 4} = 1 \\ \delta_Y &= \sqrt{VAR(Y)} = \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} = \\ &= \sqrt{\sum_j y_j^2 \cdot g(y_j) - 0.6^2} = \\ &= \sqrt{(-3)^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.3 - 0.6^2} = 3.039\end{aligned} \tag{6.410}$$

Odtod sledi:

$$\sigma(X,Y) = \frac{-1.2}{1 \cdot 3.039} = -0.394 \;\}\text{Tako sta korelirana X in Y} \tag{6.411}$$

<u>Primer 3</u>:

X in Y sta naključni spremenljivki, katerih združena porazdelitev je prikazana v tabeli na sliki 6.39.

	$X \backslash Y$	y_1: 0	y_2: 1	vsota	
x_1	0	$h(x_1,y_1)$ $\frac{1}{2}$	$h(x_1,y_2)$ 0	$\frac{1}{2}$	$f(x_1)$
x_2	1	$h(x_2,y_1)$ $\frac{1}{4}$	$h(x_2,y_2)$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$f(x_2)$
	vsota	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		
		$g(y_1)$	$g(y_2)$		

Slika 6.39.: Združena in mejni porazdelitvi za spremenljivki X in Y.

Dano imamo še naključno spremenljivko $Z = X + Y$, katere porazdelitev je prikazana v tabeli na sliki 6.40.

z_i	z_1	z_2	z_3
	0	*1*	*2*
$\xi(z_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Slika 6.40.: Porazdelitev za spremenljivko Z.

Pokažite, da velja: $E(Z)=E(X)+E(Y)$ ter $VAR(Z)\neq VAR(X)+VAR(Y)$*!*

Najprej izračunajmo:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= E(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i \cdot f(x_i) = 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\
\mu_Y &= E(Y)=\sum_{i=1}^{2} y_i \cdot g(y_i) = 0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \\
\mu_Z &= E(Z)=\sum_{i=1}^{2} z_i \cdot \xi(z_i) = 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\
& E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\
& \text{Očitno velja: } E(Z)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{4}
\end{aligned}
\tag{6.412}
$$

Nato izračunajmo:

$$VAR(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \cdot f(x_i) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$VAR(Y) = E\left(Y^2\right) - E^2(Y) = \sum_{i=0}^{2} y_i^2 \cdot g(y_i) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0^2 \cdot \frac{3}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \qquad (6.413)$$

$$VAR(Z) = E\left(Z^2\right) - E^2(Z) = \sum_{i=0}^{2} z_i^2 \cdot \xi(z_i) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{20}{16} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

Dobimo:

$$VAR(X) + VAR(Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} \qquad (6.414)$$

Očitno velja: $VAR(Z) \neq VAR(X) + VAR(Y)$

6.3.7 Mejne in pogojne porazdelitve

<u>Primer 1:</u> Mešana porazdelitev gostote verjetnosti dveh naključnih spremenljivk je dana z izrazom:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K(x+y)\ ;\ 0 < x < 2\ ,\ 0 < y < 2 \\ 0\ ; \qquad \text{sicer} \end{cases} \qquad (6.415)$$

Poiščite vrednost parametra K ter marginalni (mejni) porazdelitvi. Ali sta spremenljivki X in Y neodvisni?

Najprej bomo poiskali vrednost parametra K. V ta namen tvorimo izraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy = \int_{0}^{2}\int_{0}^{2} K(x+y)\ dx\ dy =$$

$$= K \cdot \int_{0}^{2} \left[\left(\frac{x^2}{2} + y \cdot x \right)\Bigg|_0^2 \right] dy = \qquad (6.416)$$

$$= K \cdot \int_{0}^{2} \left[\frac{2^2}{2} + y \cdot 2 - 0 - 0 \right] dy$$

Dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy = K\cdot\int_{0}^{2}[2+2y]\ dy = K\cdot\left[2y+2\cdot\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^2 =$$
$$= K\cdot\left[2\cdot 2+2^2-0-0\right]=$$
$$= 8K = 1 \quad \Rightarrow K=\frac{1}{8} \tag{6.417}$$

kjer smo upoštevali, da gotovo velja: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy = 1$. Mešana porazdelitev gostote verjetnosti ima torej obliko:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y)\ ;\ 0<x<2\ ,\ 0<y<2\\ 0\ ; \qquad\qquad \text{sicer}\end{cases} \tag{6.418}$$

V nadaljevanju najprej izračunajmo marginalno porazdelitev za spremenljivko X:

$$\left.\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dy = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\ dy = \\ &= \frac{1}{8}\left(x\cdot y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \\ &= \frac{1}{8}[2x+2] = \frac{x+1}{4}\end{aligned}\right\}\text{pri } 0\le x\le 2 \tag{6.419}$$

Sledi:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{4}\ ;\ 0\le x\le 2\\ 0\ ; \quad \text{sicer}\end{cases} \tag{6.420}$$

Nato izračunajmo še marginalno porazdelitev za spremenljivko Y:

$$\left.\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)\,dx = \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x\cdot y\right)\Bigg|_0^2 = \\ &= \frac{1}{8}[2+2y] = \frac{y+1}{4} \end{aligned}\right\} \text{pri } 0 \le y \le 2 \qquad (6.421)$$

Sledi:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{4} \ ; \ 0 \le y \le 2 \\ 0 \ ; \qquad \text{sicer} \end{cases} \qquad (6.422)$$

Tvorimo naslednji produkt funkcij:

$$\left. f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{x+1}{4}\cdot\frac{y+1}{4} = \frac{(x+1)\cdot(y+1)}{16} \right\} \text{pri } 0 \le x \le 2 \text{ in } 0 \le y \le 2 \qquad (6.423)$$

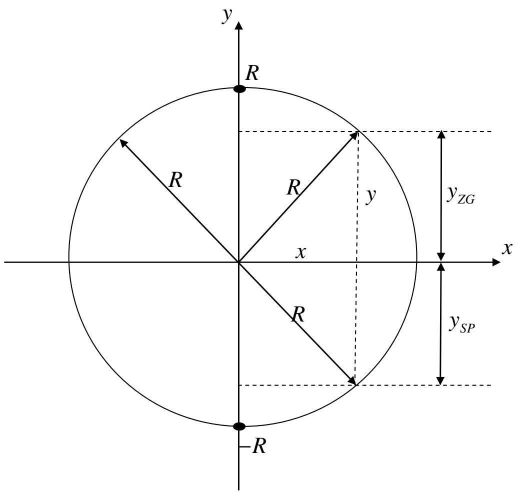
Očitno velja:

$$\left. f_{XY}(x,y) \ne f_X(x)\cdot f_Y(y) \ \right\} \text{X IN Y NISTA NEODVISNI SPREMENLJIVKI} \qquad (6.424)$$

<u>Primer 2</u>: Denimo naključno izberemo eno točko znotraj kroga z radijem R (glej sliko). Potem lahko za X,Y koordinati zapišemo naslednjo mešano porazdelitev gostote verjetnosti:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K \ ; \ x^2 + y^2 \le R^2 \ \rightarrow \text{znotraj kroga} \\ 0 \ ; \ x^2 + y^2 > R^2 \ \rightarrow \text{zunaj kroga} \end{cases} \qquad (6.425)$$

Poiščite parameter K in marginalni porazdelitvi.



Slika 6.40.: Ilustracija naključnih spremenljivk X in Y v krogu.

Gotovo velja naslednje:

$$R^2 = x^2 + y^2 \tag{6.426}$$

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{R^2 - x^2} \\ y_{ZG} &= +\sqrt{R^2 - x^2} \\ y_{SP} &= -\sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned} \tag{6.427}$$

Najprej določimo vrednost parametra K:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\; dx\; dy = K \cdot \overbrace{\iint_{x^2+y^2 \le R^2} dx\; dy}^{S_{\text{kroga}}} = K \cdot \pi \cdot R^2 = 1 \\ &K = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \end{aligned} \tag{6.428}$$

V nadaljevanju najprej izračunajmo marginalno porazdelitev za spremenljivko X:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\; dy = \int_{y_{SP}}^{y_{ZG}} K \cdot dy = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy = \\ &= \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x^2}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}{\pi \cdot R^2} \end{aligned} \tag{6.429}$$

Sledi:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot\sqrt{R^2-x^2}}{\pi\cdot R^2} & ;\ |x|\le R\\ 0 & ;\ |x|>R\end{cases} \tag{6.430}$$

Na osnovi simetrije lahko sklepamo, da velja tudi [11]:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot\sqrt{R^2-y^2}}{\pi\cdot R^2} & ;\ |y|\le R\\ 0 & ;\ |y|>R\end{cases} \tag{6.431}$$

<u>Primer 3</u>: Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}K\cdot e^{-(ax+by)} & ;\ x>0,\ y>0\\ 0 & ;\quad \text{sicer}\end{cases} \tag{6.432}$$

Ali sta naključni spremenljivki X in Y neodvisni?

Najprej izračunajmo parameter K:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} K\cdot e^{-(ax+by)}dx\right)dy=\\ &= K\cdot\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot e^{-by}dx\right)dy=\\ &= K\cdot\int_0^{\infty} e^{-by}\left[-\frac{1}{a}\cdot e^{-ax}\right]\Bigg|_0^{\infty} dy=\\ &= K\cdot\int_0^{\infty} e^{-by}\left(\frac{1}{a}\right)dy=\\ &= \frac{K}{a}\left(-\frac{1}{b}\right)\cdot e^{-by}\Bigg|_0^{\infty}=\\ &= \frac{K}{ab}=1\end{aligned} \tag{6.433}$$

Sledi:

$$K = a \cdot b \tag{6.434}$$

Funkciji marginalne gostote verjetnosti za spremenljivki X in Y sta naslednji:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^{\infty} ab \cdot e^{-(ax+by)} dy = ab \cdot e^{-ax} \left(-\frac{1}{b}\right) \cdot e^{-by} \Big|_0^{\infty} = a \cdot e^{-ax} \ ; \ x > 0 \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_0^{\infty} ab \cdot e^{-(ax+by)} dx = ab \cdot e^{-by} \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = b \cdot e^{-by} \ ; \ y > 0 \end{aligned} \tag{6.435}$$

Ker velja:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = a \cdot e^{-ax} \cdot b \cdot e^{-by} = ab \cdot e^{-(ax+by)} = f_{XY}(x,y) \ ; \ x > 0, y > 0 \tag{6.436}$$

sta spremenljivki X in Y neodvisni.

<u>Primer 4</u>: Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} K \cdot e^{-(ax+by+cz)} & ; \ x,y,z > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} \tag{6.437}$$

Poiščite: K, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{XY}(x,y)$. Ali so spremenljivke X, Y in Z med seboj neodvisne?

Najprej izračunajmo parameter K:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K \cdot e^{-ax} \cdot e^{-by} \cdot e^{-cz}\, dx\, dy\, dz = \\ &= K \cdot \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[-\frac{1}{a} \cdot e^{-ax}\right]\Bigg|_0^{\infty} e^{-by} \cdot e^{-cz}\, dy\, dz = \\ &= \frac{K}{a} \cdot \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-by} \cdot e^{-cz}\, dy\, dz \end{aligned} \tag{6.437}$$

Sledi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \frac{K}{a}\cdot\int_{0}^{\infty}\left[-\frac{1}{b}\cdot e^{-by}\right]\Bigg|_{0}^{\infty}\cdot e^{-cz}\ dz =$$
$$= \frac{K}{ab}\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-cz}\ dz =$$
$$= \frac{K}{ab}\cdot\left[-\frac{1}{c}\cdot e^{-cz}\right]\Bigg|_{0}^{\infty} = \tag{6.438}$$
$$= \frac{K}{abc} = 1$$
$$K = abc$$

Nato izračunajmo funkcijo $f_{XY}(x,y)$:

$$f_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\ dz = \int_{-\infty}^{\infty} abc\cdot e^{-(ax+by+cz)}\ dz =$$
$$= abc\cdot e^{-(ax+by)}\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot e^{-cz}\Big|_{0}^{\infty} = \tag{6.439}$$
$$= ab\cdot e^{-(ax+by)}\ ;\ x, y > 0$$

Nato izračunajmo na osnovi izraza (6.439) še funkcijo $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} ab\cdot e^{-(ax+by)}\ dy =$$
$$= ab\cdot e^{-ax}\left(-\frac{1}{b}\right)e^{-by}\Big|_{0}^{\infty} = \tag{6.440}$$
$$= a\cdot e^{-ax}\ ;\ x > 0$$

Seveda bi $f_X(x)$ lahko izračunali tudi na drug način:

$$f_X(x) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\ dy\ dz = \ldots = a\cdot e^{-ax}\ ;\ x > 0\ \Big\}\text{Dobimo isto!} \tag{6.441}$$

Izračunajmo na osnovi izraza (6.439) še funkcijo $f_Y(y)$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} ab\cdot e^{-(ax+by)}\ dx = \\ &= ab\cdot e^{-by}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \\ &= b\cdot e^{-by}\ ;\ y>0 \end{aligned} \tag{6.442}$$

Tudi $f_Y(y)$ bi lahko izračunali še na drug način:

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\ dx\ dz = ... = b\cdot e^{-by}\ ;\ y>0\ \Big\}\text{Dobimo isto!} \tag{6.443}$$

Izračunajmo še funkcijo $f_Z(z)$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\ dx\ dy = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} abc\cdot e^{-ax}\cdot e^{-by}\cdot e^{-cz}\ dx\right) dy = \\ &= abc\cdot e^{-cz}\int_0^{\infty}\left[-\frac{1}{a}\cdot e^{-ax}\right]\Bigg|_0^{\infty} e^{-by}\ dy = \\ &= bc\cdot e^{-cz}\int_0^{\infty} e^{-by}\ dy = \\ &= bc\cdot e^{-cz}\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)\cdot e^{-by}\Big|_0^{\infty} = \\ &= c\cdot e^{-cz}\ ;\ z>0 \end{aligned} \tag{6.444}$$

Ker velja:

$$\begin{aligned} & f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z) = a\cdot e^{-ax}\cdot b\cdot e^{-by}\cdot c\cdot e^{-cz} \\ & in \\ & f_{XYZ}(x,y,z) = abc\cdot e^{-(ax+by+cz)}\ ;\ x,y,z>0 \end{aligned} \tag{6.445}$$

očitno velja enakost:

$$f_{XYZ}(x,y,z)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z) \tag{6.446}$$

ter so *X, Y in Z neodvisne naključne spremenljivke.*

<u>Primer 5</u>: *Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:*

$$f(x,y)=\begin{cases} c\left(x+y^2\right) \; ; \; 0\le x\le 1 \; ; \; 0\le y\le 1 \\ 0 \quad ; \quad \text{drugod} \end{cases} \tag{6.447}$$

a) *Poiščite* $P\left(0\le x\le \frac{1}{4} \; ; \; 0\le y\le \frac{1}{4}\right)$.
b) *Poiščite mejni funkciji* $f_X(x)$ in $f_Y(y)$.
c) *Preverite neodvisnost spremenljivk X in Y.*

a) Najprej izračunajmo parameter c:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 c\left(x+y^2\right)dx\,dy = \\ &= c\cdot\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_0^1 dy = \\ &= c\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy = \\ &= c\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = c\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=1 \;\Rightarrow\; c=\frac{6}{5} \end{aligned} \tag{6.448}$$

Nato izračunajmo verjetnost $P\left(0\le x\le \frac{1}{4} \; ; \; 0\le y\le \frac{1}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} P\left(0\le x\le \frac{1}{4} \; ; \; 0\le y\le \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{1/4}\int_0^{1/4}\frac{6}{5}\left(x+y^2\right)dx\,dy = \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_0^{1/4} dy = \\ &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\frac{1}{32}+\frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{32}y+\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^{1/4} = \\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3\cdot 12}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2^5\cdot 2^2}+\frac{1}{2^6\cdot 2\cdot 3\cdot 2}\right) \end{aligned} \tag{6.449}$$

Dobimo:

$$P\left(0 \le x \le \frac{1}{4}\ ;\ 0 \le y \le \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3 \cdot 2^8}\right) = \frac{6}{5 \cdot 2^7}\left(1 + \frac{1}{6}\right) = \\ = \frac{\cancel{6}}{5 \cdot 2^7} \cdot \frac{7}{\cancel{6}} = \frac{7}{5 \cdot 2^7} = 0.0109 \tag{6.450}$$

b) Sedaj poiščimo mejni funkciji $f_X\left(x\right)$ in $f_Y\left(y\right)$. Dobimo:

$$\text{b) } f_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)\, dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(x + y^2\right)\, dy = \frac{6}{5}\left(xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \\ = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}\ ;\ \ 0 \le x \le 1$$

$$f_Y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)\, dx = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(x + y^2\right)\, dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2} + y^2 x\right)\Bigg|_0^1 = \\ = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right) = \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}\ ;\ \ 0 \le y \le 1 \tag{6.451}$$

Ker velja:

$$f_X\left(x\right) \cdot f_Y\left(y\right) = \left(\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}\right)\ ; 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \\ f_{XY}\left(x, y\right) = \frac{6}{5}\left(x + y^2\right)\ ; 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \tag{6.452}$$

sledi: $f_{XY}\left(x, y\right) \ne f_X\left(x\right) \cdot f_Y\left(y\right)$. Torej sta X in Y vzajemno odvisni med seboj.

<u>Primer 6</u>: Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:

$$f_{XY}\left(x, y\right) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & ;\ x > 0,\ y > 0 \\ 0 & ;\quad \text{sicer} \end{cases} \tag{6.453}$$

Poiščite funkciji pogojne porazdelitve gostote verjetnosti $f_{X|Y}\left(x|y\right)$ *in* $f_{Y|X}\left(y|x\right)$.

Najprej izračunajmo funkciji marginalne gostote verjetnosti za spremenljivki X in Y:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy = e^{-x}(-1)\cdot e^{-y}\Big|_0^{\infty} = e^{-x}\ ;\ x>0 \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dx = e^{-y}(-1)\cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} = e^{-y}\ ;\ y>0
\end{aligned}
\tag{6.454}
$$

Nato izračunajmo funkcijo $f_{X|Y}(x|y)$:

$$
f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-(y)}} = e^{-(x)}\ \text{pri}\ x>0
\tag{6.455}
$$

Nazadnje izračunajmo še funkcijo $f_{Y|X}(y|x)$:

$$
f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-(x)}} = e^{-(y)}\ \text{pri}\ \mathrm{y}>0
\tag{6.456}
$$

<u>Primer 7</u>*: Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:*

$$
f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-(y)} & ;\ 0<x\le y \\ 0 & ;\quad \text{sicer} \end{cases}
\tag{6.457}
$$

Poiščite funkcijo pogojne porazdelitve gostote verjetnosti $f_{Y|X}(y|x)$.

Najprej izračunajmo funkcijo marginalne gostote verjetnosti za spremenljivko X:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_x^{\infty} e^{-(y)}dy, \qquad x\le y<\infty \\
f_X(x) &= \left[-e^{-(y)}\right]\Big|_x^{\infty} = \left[e^{-x}\right], \qquad x\le y<\infty
\end{aligned}
\tag{6.458}
$$

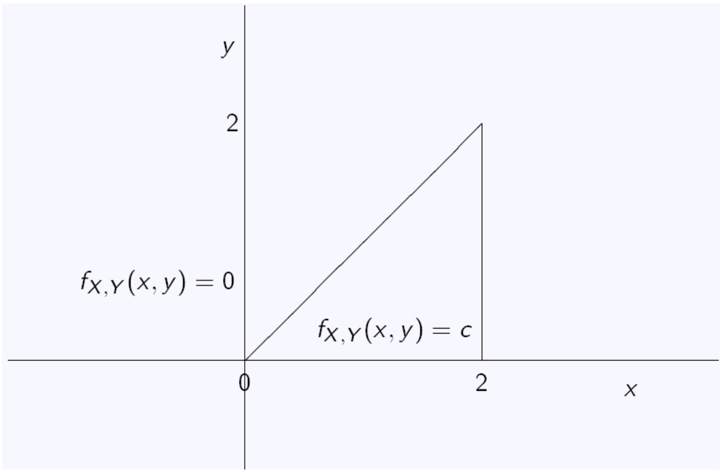
Sledi:

$$f_{Y|X}\left(y|x\right) = \frac{f_{XY}\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)} = \frac{e^{-(y)}}{e^{-(x)}} = e^{x-y} \text{ pri } x \le y < \infty \tag{6.459}$$

6.3.8 Pričakovanje za združene porazdelitve več naključnih spremenljivk

Primer: Naključni spremenljivki X in Y imata uniformno združeno porazdelitev na trikotniku A z ogljišči (0,0), (2,0) in (2,2) (glej sliko 6.41.), pri čemer velja:

$$f_{XY}(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{\textit{če}}\ (x,y) \in A \\ 0, & \text{\textit{sicer}} \end{cases} \tag{6.460}$$



Slika 6.41: Definicijsko območje za $f_{XY}(x,y)$

a) Poiščite konstanto c,

b) Izračunajte $P(X>1, Y>1)$,

c) Poiščite $f_X(x)$ *in* $f_Y(y)$.

d) Poiščite $E(X), E(Y)$.

e) Poiščite korelacijski koeficient $\rho(X,Y)$.

a) Najprej izračunajmo konstanto c:

$$\begin{aligned}
\text{a)}\ & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy\right)dx = \int_{(x,y)\in A}\left(\int f(x,y)\ dy\right)dx = \\
&= \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{x} f(x,y)\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{x} c\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{2}(c\cdot y)_0^x\,dx = \\
&= \int_{x=0}^{2}(c\cdot x)\,dx = \left(c\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = 2c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{6.461}$$

b) Nato izračunajmo $P\left(X>1,Y>1\right)$. Ker velja:

$$
\begin{aligned}
&1 \le x \le 2 \\
&1 \le y \le x
\end{aligned}
\qquad (6.462)
$$

sledi:

$$
\begin{aligned}
P\left(X>1,Y>1\right) &= \int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=1}^{x} f\left(x,y\right)\,dy\right)dx = \int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=1}^{x}\frac{1}{2}\,dy\right)dx = \int_{x=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\cdot y\right)_{1}^{x} dx = \\
&= \int_{x=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x-1\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}-2-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
\qquad (6.463)
$$

c) Sedaj bomo poiskali $f_X\left(x\right)$ in $f_Y\left(y\right)$. Tvorimo:

$$
\begin{aligned}
&f_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x,y\right)\,dy = \int_{0}^{x}\frac{1}{2}dy, \quad 0 \le x \le 2 \\
&f_X\left(x\right) = \frac{1}{2}\cdot x, \quad 0 \le x \le 2 \\
&f_Y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x,y\right)\,dx = \int_{y}^{2}\frac{1}{2}dx, \quad 0 \le y \le 2 \\
&f_Y\left(y\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(2-y\right), \quad 0 \le y \le 2
\end{aligned}
\qquad (6.464)
$$

d) Sedaj bomo poiskali matematični upanji $E\left(X\right),E\left(Y\right)$. V ta namen tvorimo:

$$
\begin{aligned}
&E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X\left(x\right)dx = \int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{2}dx = \left(\frac{x^3}{6}\right)_{0}^{2} = \frac{4}{3} \\
&E\left(Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y\left(y\right)dy = \int_{0}^{2} y\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)_{0}^{2} = \left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{6}\right) = \\
&= \left(2-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
\qquad (6.465)
$$

e) Nazadnje poiščimo še korelacijski koeficient $\rho(X,Y)$. Vemo, da velja:

$$\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)\cdot VAR(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\left\{E\left(X^2\right)-E^2(X)\right\}\left\{E\left(Y^2\right)-E^2(Y)\right\}}} \tag{6.466}$$

Če hočemo izračunati $\rho(X,Y)$, moramo očitno prej izračunati še $E\left(X^2\right),E\left(Y^2\right),E(XY)$. Sledi:

$$\begin{aligned}
&E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\left(\frac{x^4}{8}\right)_0^2=2\\
&E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^2 y^2\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\\
&=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{8}\right)_0^2=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{8}\right)=\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{6.467}$$

Izračunajmo še $E(XY)$:

$$\begin{aligned}
&E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot y\cdot f(x,y)\;dy\right)dx=\int_{(x,y)\in A}\left(\int x\cdot y\cdot f(x,y)\;dy\right)dx=\\
&=\int_0^2\left(\int_0^x x\cdot y\cdot\frac{1}{2}dy\right)dx=\int_0^2\frac{x}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^x dx=\int_0^2\frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^2=\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{16}{4}\right)=1
\end{aligned} \tag{6.468}$$

Za korelacijski koeficient $\rho(X,Y)$ torej velja:

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\left\{E\left(X^2\right)-E^2(X)\right\}\left\{E\left(Y^2\right)-E^2(Y)\right\}}}=\frac{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{\left\{2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}\left\{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}}} \tag{6.469}$$

Dobimo:

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{1}{9}}{\sqrt{\left\{2-\left(\frac{16}{9}\right)\right\}\left\{\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{9}\right)\right\}}}=\frac{\frac{1}{9}}{\sqrt{\left\{\frac{2}{9}\right\}\left\{\frac{2}{9}\right\}}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2} \tag{6.470}$$

6.4 Primeri iz maksimalne podobnosti

V tovrstnih primerih bomo vselej generirali določeno funkcijo največjega verjetja, odvisno od določenega parametra a, torej $L(a)$. Obravnavali bomo le primere z enim neznanim parametrom, ki ga želimo poiskati v postopku iskanja maksimuma funkcije $\ln L(a)$. Pri vseh primerih moramo seveda nenehno imeti pred očmi, da parameter a predstavlja tisti pravi (neznani) parameter, ki ga iščemo, $\hat{a}$ pa predstavlja (bolj ali manj točno) oceno tega parametra.

6.4.1 Primer iz maksimalne podobnosti za binomsko porazdelitev

<u>*Primer 1:*</u> *Dan imamo naključni vzorec n meritev $(x_1,...,x_n)$, za katere vemo, da je generiran na osnovi binomske porazdelitve. Ocenite vrednost verjetnosti p s pomočjo metode maksimalne podobnosti, pri čemer je parameter m (število uspešnih poskusov) poznan. Velja tudi pogoj za neodvisnost dogodkov $x_i \cap x_j = 0$.*

Verjetnostno funkcijo Binomske diskretne porazdelitve za naključno spremenljivko X zapišemo z naslednjim izrazom (glej tudi izraz (3.66)):

$$P(X)=\binom{m}{x}\cdot p^x\cdot\underbrace{(1-p)}_{q}{}^{m-x}, \qquad x=0,1,2,...,n \tag{6.471}$$

Temeljna predpostavka za funkcijo maksimalne podobnosti, ki smo jo zapisali na podlagi dejstva, da so dogodki oz. meritve med seboj statistično neodvisni, je naslednja:

$$L(\hat{p}) = f(x_1, x_2, ..., x_n, p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot ... \cdot f(x_n, p) \tag{6.472}$$

Če upoštevamo izraz (6.471), izraz (6.472) preide v obliko:

$$\begin{aligned}
L(\hat{p}) &= P(x_1, x_2, ..., x_n, p) = P(x_1, p) \cdot P(x_2, p) \cdot ... \cdot P(x_n, p) = \\
&= \binom{m}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{m-x_1} \cdot \binom{m}{x_2} p^{x_2} (1-p)^{m-x_2} \cdot ... \cdot \binom{m}{x_n} p^{x_n} (1-p)^{m-x_n} = \\
&= \binom{m}{x_1} \cdot \binom{m}{x_2} \cdot ... \cdot \binom{m}{x_n} \cdot p^{x_1+x_2+...+x_n} \cdot (1-p)^{m-x_1+m-x_2+...+m-x_n} = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n\cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i} = \\
&= \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i}}_{C} \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n\cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i} \\
&= C \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n\cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned} \tag{6.473}$$

Zaradi lažjega iskanja ekstrema te funkcije dobljeni izraz logaritmiramo in tvorimo $\ln L(\hat{p})$:

$$\begin{aligned}
\ln L(\hat{p}) &= \ln\left(C \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n\cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \\
&= \ln C + \ln p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \ln (1-p)^{n\cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i} = \\
&= \ln C + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln p + \left(n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \ln(1-p)
\end{aligned} \tag{6.474}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (6.474) se potreben pogoj glasi:

$$\frac{d}{dp} \ln L(\hat{p}) = 0 \tag{6.475}$$

Tako dobimo:

$$\frac{d}{dp}\ln L(\hat{p}) = 0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{p} + \left(n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \frac{1}{1-p} \cdot (-1) \tag{6.476}$$

Če izraz (6.476) enačimo z 0, dobimo:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{k_1} \cdot \frac{1}{p} - \underbrace{\left(n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{k_2} \cdot \frac{1}{1-p} = 0 \\
&\frac{k_1}{p} - \frac{k_2}{1-p} = 0 \;\Big|\; \cdot (1-p)\,p \\
&k_1(1-p) - k_2 p = 0 \\
&k_1 - k_1 p - k_2 p = 0 \\
&p = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \\
&p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned} \tag{6.477}$$

Torej za Binomsko porazdelitev velja, da mora biti ocena vrednosti za $\hat{p}$, kjer je n število meritev in poznamo vrednost za parameter m, naslednja:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot m} \tag{6.478}$$

6.4.2 Primera iz maksimalne podobnosti za Poissonovo porazdelitev

<u>Primer 2:</u> Dan imamo naključni vzorec n meritev $(x_1, ..., x_n)$, za katere vemo, da je generiran na osnovi Poissonove porazdelitve. Ocenite vrednost parametra λ s pomočjo metode Maksimalne podobnosti. Upoštevajte pogoj za neodvisnost meritev $x_i \cap x_j = 0$.

Verjetnostno funkcijo Poissonove diskretne porazdelitve za naključno spremenljivko X zapišemo z naslednjim izrazom (glej izraz (3.48)):

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\ ;\ k=0,1,2,... \tag{6.479}$$

Ob upoštevanju pogoja za neodvisnost meritev lahko tvorimo funkcijo $L(\hat{\lambda})$:

$$\begin{aligned}
L(\hat{\lambda}) &= P(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)= \\
&= P(x_1,\lambda)\cdot P(x_2,\lambda)\cdot ...\cdot P(x_n,\lambda)= \\
&= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdot e^{-\lambda}\cdot ...\cdot\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\cdot e^{-\lambda}= \\
&= \frac{\lambda^{x_1+x_2+...+x_n}\cdot e^{-n\cdot\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}= \\
&= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-n\cdot\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}= \\
&= e^{-n\cdot\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot\overbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}}^{C}
\end{aligned} \tag{6.480}$$

Funkcijo $L(\hat{\lambda})$ torej lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$L(\hat{\lambda})=C\cdot e^{-n\cdot\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i} \tag{6.481}$$

Podobno kot pri prejšnjem primeru izraz (6.481) logaritmiramo in tvorimo $\ln L(\hat{\lambda})$:

$$\begin{aligned}
\ln L(\hat{\lambda}) &= \ln\left(C\cdot e^{-n\cdot\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)= \\
&= \ln C+\ln e^{-n\cdot\lambda}+\ln\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}= \\
&= \ln C-n\cdot\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\lambda
\end{aligned} \tag{6.482}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (6.482) se potreben pogoj glasi:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L\left(\hat{\lambda}\right)=0 \tag{6.483}$$

Če izračunamo prvi odvod funkcije, dobimo:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L\left(\hat{\lambda}\right)=0-n+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{1}{\lambda} \tag{6.484}$$

Dobljeni izraz enačimo z 0 in dobimo:

$$\begin{aligned} 0&=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}\\ n&=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}\end{aligned} \tag{6.485}$$

Očitno torej za Poissonovo porazdelitev velja, da je ocena vrednosti parametra $\hat{\lambda}$ ob znanem številu meritev *n* naslednja:

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{6.486}$$

<u>*Primer 3:*</u> *Imamo vzorec 10 celoštevilčnih meritev:* $x_i=\left(7,\ 2,\ 4,\ 5,\ 2,\ 8,\ 3,\ 4,\ 4,\ 8\right)$*, za katere vemo, da so porazdeljene po Poissonovi porazdelitvi (prava vrednost parametra je:* $\lambda=5$*). S pomočjo metode Maksimalne podobnosti ocenite vrednost parametra* λ*.*

Pri tej nalogi bomo upoštevali izraz (6.486), ki smo ga izpeljali za izračun ocene vrednosti parametra $\hat{\lambda}$. Število meritev, ki jih vstavimo v dani izraz, je 10 (*n*=10), pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i}{10}=\frac{1}{10}\cdot\left(x_1+...+x_{10}\right)=\\ &=\frac{1}{10}\cdot\left(7+2+4+5+2+8+3+4+4+8\right)=4.7\end{aligned} \tag{6.487}$$

Ocenjena vrednost parametra $\hat{\lambda}$ je 4.7. Izraz ocenjene verjetnostne funkcije Poissonove diskretne porazdelitve v tem primeru dobi naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} \hat{P}(X=k) &= \frac{\hat{\lambda}^k}{k!}\cdot e^{-\hat{\lambda}} \;;\; k=0,1,2,... \\ \hat{P}(X=k) &= \frac{4.7^k}{k!}\cdot e^{-4.7} \;;\; k=0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.488}$$

Seveda je izraz za pravo porazdelitev enak:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \;;\; k=0,1,2,... \\ P(X=k) &= \frac{5^k}{k!}\cdot e^{-5} \;;\; k=0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.489}$$

Meritve za pravo porazdelitev so bile simulirane s Poissonovim naključnim generatorjem v sklopu programskega paketa v Matlabu RANDRAW.m, ki je dostopen na spletni strani podjetja Mathworks na domeni »File Exchange«.

Pri tem smo tvorili naslednji ukaz:

```
y = randraw('po', [5], [1 10])
y =
    7    2    4    5    2    8    3    4    4    8
```

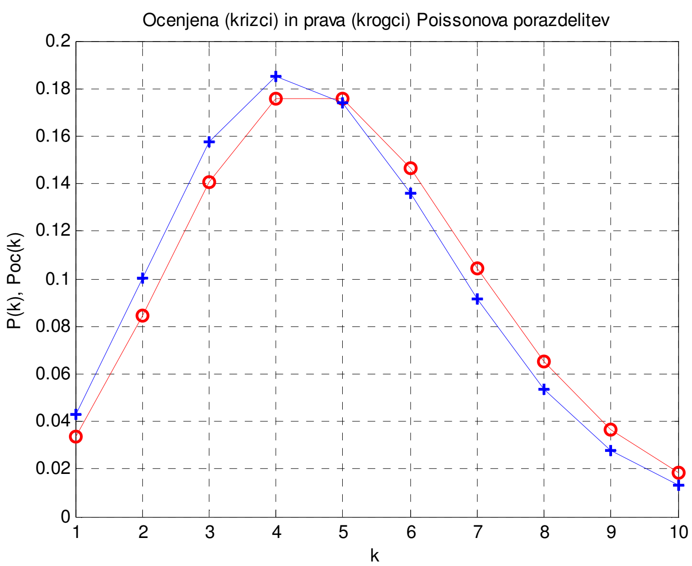
kjer 5 označuje parameter $\lambda = 5$.

Porazdelitev, ki smo jo ocenili, pa lahko generiramo z naslednjimi ukazi programa poisson.m:

```
% Poisson.m
clc
clear
close all
ch = input('Zelis pognati randraw.m (1-DA/0-NE)')
if ch == 1    % klic randraw.m za generacijo meritev
  lamb = input('Vnesi pravi parameter lamb')
  M = input('Vnesi st. meritev');
  x = randraw('po', [lamb], [1 M]) % vrne meritve
  N = M;
else          % ce bi meritve dobili od kje drugje
  x = input('Vnesi vektor meritev')
  lamb = input('pravi parameter lamb=')
  N = length(x);
```

```
end
% Ocena z likelihood:
lamb_oc = sum(x)/N
% Generacija porazdelitev:
for i=1:1:N
   Poc(i) = (lamb_oc^i)*exp(-lamb_oc)/factorial(i);    % ocenjena porazdelitev
   P(i) = (lamb^i)*exp(-lamb)/factorial(i);             % prava porazdelitev
End
P
Poc
plot(1:1:N,P,'ro','LineWidth',2)        % izris prave porazdelitve
hold on
plot(1:1:N,P,'r')
plot(1:1:N,Poc,'b+','LineWidth',2)     % izris ocenjene porazdelitve
plot(1:1:N,Poc,'b')
grid
title('Ocenjena (krizci) in prava (krogci) Poissonova porazdelitev')
xlabel('k')
ylabel('P(k), Poc(k)')
% Tvorjenje vsote I kvadratov absolutnih pogreškov ocene porazdelitve:
e=abs(P-Poc)
I = e*e'
```

Do odstopanja med ocenjenim in pravim parametrom λ je prišlo zaradi tega, da smo imeli na razpolago nekoliko premalo (le 10) meritev. Slika 6.42. prikazuje pravo in ocenjeno porazdelitev za primer 10 meritev, kjer so razvidna določena odstopanja v porazdelitvi.



Slika 6.42: Ocenjena in prava Poissonova porazdelitev za primer 10 meritev

Izpis vrednosti za obe porazdelitvi na sliki 6.42. je naslednji:

```
P =
  Columns 1 through 8
   0.0337    0.0842    0.1404    0.1755    0.1755    0.1462    0.1044    0.0653
  Columns 9 through 10
   0.0363    0.0181

Poc =
  Columns 1 through 8
   0.0427    0.1005    0.1574    0.1849    0.1738    0.1362    0.0914    0.0537
  Columns 9 through 10
   0.0281    0.0132
```

Vsoto I kvadratov absolutnih pogreškov ocene porazdelitve dobimo z izrazom:

$$\begin{aligned} |e(k)| &= \left|P(k) - \hat{P}(k)\right|, k = 1,...,10 \\ I &= \sum_{k=1:10} \left|e^2(k)\right| = 0.0012 \end{aligned} \tag{6.490}$$

V Matlabu za to uporabimo ukaza:

```
e=abs(P-Poc)
e =
  Columns 1 through 8
   0.0091    0.0162    0.0170    0.0095    0.0016    0.0101    0.0130    0.0116
  Columns 9 through 10
   0.0082    0.0049
I = e*e'
I =
   0.0012
```

Denimo bi imeli sedaj na razpolago več meritev, npr. 15. Ukazi v Matlabu bi bili naslednji (izpis komandnega okna):

```
Zelis pognati randraw.m (1-DA/0-NE)1
ch =
    1
Vnesi pravi parameter lamb5
lamb =
    5
Vnesi st. meritev15
x =
  Columns 1 through 14
    7    8    5    3    4    5    1    5    2    5    3    4    6    5
  Column 15
    9
lamb_oc =
   4.8000
```

P =

Columns 1 through 8

0.0337 0.0842 0.1404 0.1755 0.1755 0.1462 0.1044 0.0653

Columns 9 through 15

0.0363 0.0181 0.0082 0.0034 0.0013 0.0005 0.0002

Poc =

Columns 1 through 8

0.0395 0.0948 0.1517 0.1820 0.1747 0.1398 0.0959 0.0575

Columns 9 through 15

0.0307 0.0147 0.0064 0.0026 0.0009 0.0003 0.0001

e =

Columns 1 through 8

0.0058 0.0106 0.0113 0.0066 0.0007 0.0064 0.0086 0.0078

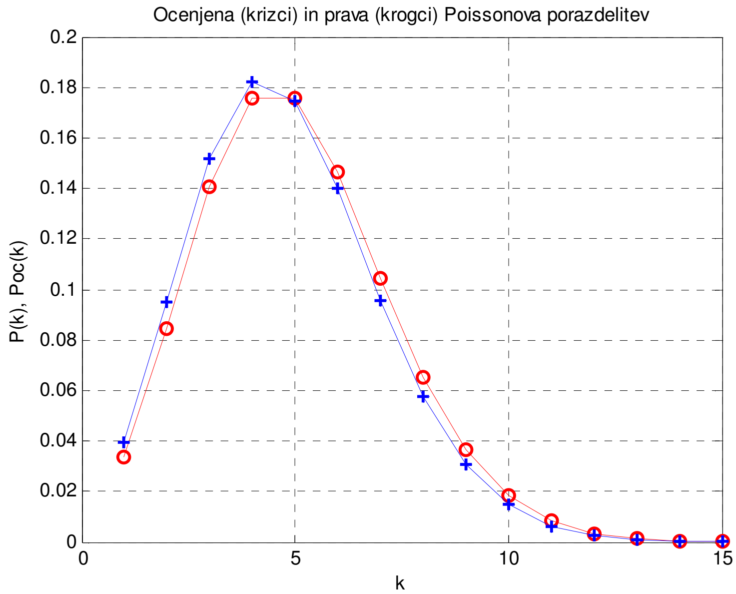
Columns 9 through 15

0.0056 0.0034 0.0018 0.0009 0.0004 0.0001 0.0001

I =

5.3968e-004

Slika 6.43. prikazuje pravo in ocenjeno porazdelitev za primer 15 meritev, kjer so razvidna določena odstopanja v porazdelitvi, a bistveno manjša kot v primeru 10 meritev.



Slika 6.43: Ocenjena in prava Poissonova porazdelitev za primer 15 meritev

To je tudi razumljivo, saj je ocenjeni parameter $\hat{\lambda} = 4.8$ tokrat bliže pravemu parametru $\lambda = 5$ kot pa v prejšnjem primeru. Tudi vrednost vsote I kvadratov absolutnih pogreškov ocene porazdelitve je tokrat občutno manjša kot prej ($\mathrm{I}=5.3968 \cdot 10^{-4}$).

Poglejmo še, kakšna bi bila ocenjena vrednost parametra $\lambda = 5$ v primeru 20 razpoložljivih meritev. Kot se izkaže, dobimo rezultat: $\hat{\lambda} = 4.9$.

6.4.3 Primera iz maksimalne podobnosti za eksponentno porazdelitev

<u>*Primer 4:*</u> *Dan imamo naključni vzorec n meritev $(x_1, ..., x_n)$, za katere vemo, da je generiran na osnovi eksponentne porazdelitve. Ocenite vrednost parametra λ s pomočjo metode Maksimalne podobnosti. Upoštevajte pogoj za neodvisnost meritev $x_i \cap x_j = 0$.*

Naključna spremenljivka se imenuje eksponentna s parametrom λ, če zanjo velja naslednja porazdelitev gostote verjetnosti (glej izraz (3.72)):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{6.491}$$

Ob upoštevanju pogoja za neodvisnost meritev lahko tvorimo funkcijo $L(\hat{\lambda})$:

$$\begin{aligned} L(\hat{\lambda}) &= f(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, \lambda) \cdot f(x_2, \lambda) \cdot ... \cdot f(x_n, \lambda) = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_2} \cdot ... \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_n} = \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n)} = \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \tag{6.492}$$

Na tem mestu izraz logaritmiramo in tvorimo $\ln L(\hat{\lambda})$:

$$\begin{aligned} \ln L(\hat{\lambda}) &= \ln \left(\lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \\ &= \ln \lambda^n + \ln e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \tag{6.493}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} \ln L\left(\hat{\lambda}\right) &= n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln e = \\ &= n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned} \tag{6.494}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (6.494) se potreben pogoj glasi:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L\left(\hat{\lambda}\right) = 0 \tag{6.495}$$

Če izračunamo prvi odvod funkcije in ga enačimo z 0, dobimo:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda} \ln L\left(\hat{\lambda}\right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ &\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned} \tag{6.496}$$

Torej je ocena vrednosti parametra $\hat{\lambda}$ ob znanem številu meritev n za eksponentno porazdelitev naslednja:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{6.497}$$

<u>Primer 5:</u> *Pri analizi pretoka prometa strank v banki so izmerjeni naslednji časi (v minutah) med sosednjimi prihodi desetih strank: 3.2, 2.1, 5.3, 4.2, 1.2, 2.8, 6.4, 1.5, 1.9 in 3.0. Predpostavimo, da je čas med prihodi strank porazdeljen eksponentno. Na osnovi izmerjenih podatkov poiščite oceno za parameter $\hat{\lambda}$ s pomočjo metode Maksimalne podobnosti.*

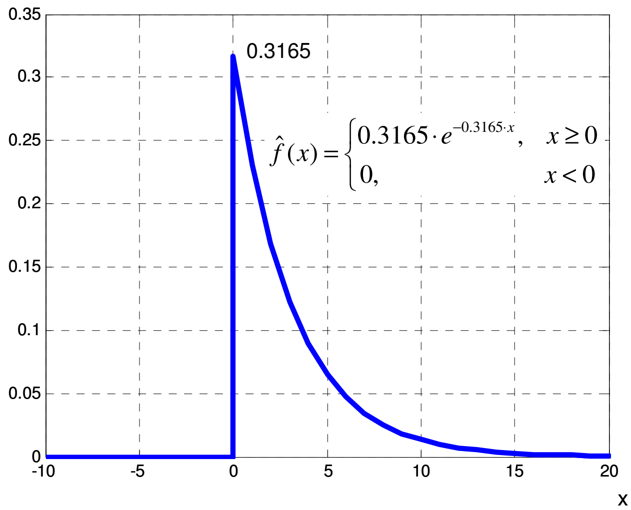
Eksponentna funkcija porazdelitve gostote verjetnosti, po kateri so porazdeljeni časi strank, je podana v izrazu (6.491). Pri tej nalogi bomo upoštevali izraz (6.497), ki smo ga izpeljali za izračun ocene vrednosti parametra $\hat{\lambda}$ pri eksponentni porazdelitvi. Število meritev, ki jih vstavimo v dani izraz, je 10 (n=10).

Dobimo:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{10}{(x_1 + \ldots + x_{10})} =$$
$$= \frac{10}{(3.2+2.1+5.3+4.2+1.2+2.8+6.4+1.5+1.9+3.0)} = \frac{10}{31.6} = 0.3165 \tag{6.498}$$

Ocenjena vrednost parametra $\hat{\lambda}$ je 0.3165. Ocenjena eksponentna funkcija porazdelitve gostote verjetnosti, po kateri so porazdeljeni časi prihodov strank, v tem primeru dobi naslednjo obliko:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0.3165 \cdot e^{-0.3165 \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{6.499}$$



Slika 6.44: Ocenjena eksponentna porazdelitev $\hat{f}(x)$

Sliko 6.44. smo dobili s klicem datoteke plot_exp.m:

```
% plot_exp.m
clear
close all
clc
lamb=0.3165
x1=[-10:1:0];
x2=0:1:20;
```

```
for i=1:length(x2)
   f(i) = lamb*exp(-lamb*x2(i));
end
x = [x1 x2];
f=[zeros(11,1); f']'
plot(x,f,'LineWidth',3)
grid
```

6.4.4 Primera iz maksimalne podobnosti za druge porazdelitve

Primer 6: *Neka populacija ima naslednjo funkcijo porazdelitve gostote verjetnosti:*

$$f(x) = 2\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\cdot x^2\cdot e^{-\gamma\cdot x^2}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{6.500}$$

Nad to populacijo je opravljenih n opazovanj $(x_1,\ldots,x_n)$. *Poiščite oceno za parameter* $\hat{\gamma}$ *s pomočjo metode Maksimalne podobnosti. Upoštevajte pogoj za neodvisnost meritev (opazovanj)* $x_i \cap x_j = 0$.

Ob upoštevanju pogoja za neodvisnost meritev in dane funkcije porazdelitve gostote verjetnosti lahko tvorimo funkcijo $L(\hat{\gamma})$:

$$\begin{aligned}
L(\hat{\gamma}) &= f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\hat{\gamma}) = f(x_1,\hat{\gamma})\cdot f(x_2,\hat{\gamma})\cdot\ldots\cdot f(x_n,\hat{\gamma}) = \\
&= \left(2\cdot\hat{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\gamma}}{\pi}}\cdot x_1^{\,2}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot x_1^{\,2}}\right)\cdot\left(2\cdot\hat{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\gamma}}{\pi}}\cdot x_2^{\,2}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot x_2^{\,2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2\cdot\hat{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\gamma}}{\pi}}\cdot x_n^{\,2}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot x_n^{\,2}}\right) = \\
&= 2^n\cdot\hat{\gamma}^n\cdot\left(\frac{\hat{\gamma}}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = 2^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\cdot\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\hat{\gamma}^n\cdot\hat{\gamma}^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = \\
&= \underbrace{\frac{2^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{\pi^{\frac{n}{2}}}}_{C}\cdot\hat{\gamma}^{\frac{3\cdot n}{2}}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = C\cdot\hat{\gamma}^{\frac{3\cdot n}{2}}\cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2}
\end{aligned} \tag{6.501}$$

Na tem mestu izraz logaritmiramo in tvorimo $\ln L(\hat{\gamma})$:

$$\ln L(\hat{\gamma}) = \ln\left(C \cdot \hat{\gamma}^{\frac{3\cdot n}{2}} \cdot e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) = \ln C + \ln \hat{\gamma}^{\frac{3\cdot n}{2}} + \ln e^{-\hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2} =$$
$$= \ln C + \frac{3\cdot n}{2}\cdot \ln\hat{\gamma} - \hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \ln e = \ln C + \frac{3\cdot n}{2}\cdot\ln\hat{\gamma} - \hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{6.502}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije v izrazu (6.502) se potreben pogoj glasi:

$$\frac{d}{d\hat{\gamma}} \ln L(\hat{\gamma}) = 0 \tag{6.503}$$

Če izračunamo prvi odvod funkcije in ga enačimo z 0, dobimo:

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\hat{\gamma}} \ln L(\hat{\gamma}) = 0 + \frac{3\cdot n}{2}\cdot\frac{1}{\hat{\gamma}} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad \left|\cdot\hat{\gamma}\right. \\ \frac{3\cdot n}{2} = \hat{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{gathered} \tag{6.504}$$

Odtod vidimo, da je ocena vrednosti parametra $\hat{\gamma}$ ob znanem številu meritev n za dano porazdelitev naslednja:

$$\hat{\gamma} = \frac{3\cdot n}{2\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{6.505}$$

<u>Primer 7:</u> *Dan imamo naključni vzorec n meritev $(x_1,\dots,x_n)$, za katere vemo, da je generiran na osnovi naslednje porazdelitve:*

$$f(x) = \begin{cases} (k+1)\,x^k; & 0 \le x \le 1 \\ 0; & sicer \end{cases} \tag{6.506}$$

Ocenite vrednost parametra $\hat{k}$ s pomočjo metode maksimalne podobnosti, pri čemer velja pogoj za neodvisnost dogodkov $x_i \cap x_j = 0$.

Ob upoštevanju pogoja za neodvisnost meritev lahko tvorimo funkcijo $L\left(\hat{k}\right)$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} L\left(\hat{k}\right) &= f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \hat{k}\right) = \\ &= f\left(x_1, \hat{k}\right) \cdot f\left(x_2, \hat{k}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n, \hat{k}\right) = \\ &= \left(\hat{k}+1\right) x_1^{\hat{k}} \cdot \left(\hat{k}+1\right) x_2^{\hat{k}} \ldots \cdot \left(\hat{k}+1\right) x_n^{\hat{k}} \end{aligned} \tag{6.507}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} L\left(\hat{k}\right) &= \left(\hat{k}+1\right)^n \cdot x_1^{\hat{k}} x_2^{\hat{k}} \ldots x_n^{\hat{k}} = \left(\hat{k}+1\right)^n \left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^{\hat{k}} = \\ &= \left(\hat{k}+1\right)^n \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\hat{k}}}_{C} = \left(\hat{k}+1\right)^n C^{\hat{k}} \end{aligned} \tag{6.508}$$

Za logaritem te funkcije pa sledi:

$$\begin{aligned} \ln L\left(\hat{k}\right) &= \ln\left\{\left(\hat{k}+1\right)^n C^{\hat{k}}\right\} = \ln\left\{\left(\hat{k}+1\right)^n\right\} + \ln\left\{C^{\hat{k}}\right\} = \\ &= n \cdot \ln\left(\hat{k}+1\right) + \hat{k} \cdot \ln C \end{aligned} \tag{6.509}$$

Za nastop ekstrema (maksimuma) funkcije se potreben pogoj glasi:

$$\frac{d}{d\hat{k}} \ln L\left(\hat{k}\right) = 0 \tag{6.510}$$

Če izračunamo prvi odvod funkcije, dobimo:

$$\frac{d}{d\hat{k}} \ln L\left(\hat{k}\right) = \frac{n}{\hat{k}+1} + \ln C \tag{6.511}$$

Dobljeni izraz enačimo z 0 in dobimo:

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{\hat{k}+1}+\ln C=0 \\
&n+\left(\hat{k}+1\right)\ln C=0 \\
&\left(\hat{k}+1\right)=-\frac{n}{\ln C} \\
&\hat{k}=-\frac{n}{\ln C}-1=-\frac{n}{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}-1
\end{aligned} \tag{6.512}$$

pri čemer je $0 \le x_i \le 1$.

6.5 Še nekaj različnih primerov iz teorije verjetnosti

<u>Primer 1:</u> Funkcija združene porazdelitve verjetnosti naključnih spremenljivk X, Y ima obliko:

$$p_{XY}\left(x_i, y_j\right)=\begin{cases} k\left(2x_i+y_j\right), & x_i=1,2,\ y_j=1,2 \\ 0, & drugod \end{cases} \tag{6.513}$$

a)Poiščite vrednost konstante k,

b) Poiščite mejni porazdelitveni funkciji,

c) Ali sta X in Y neodvisni?

a) Tvorimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_i}\sum_{y_j} p_{XY}\left(x_i, y_j\right)=\sum_{x_i=1:2}\left(\sum_{y_j=1:2} k\left(2x_i+y_j\right)\right)=k\sum_{x_i=1:2}\left(\sum_{y_j=1:2}\left(2x_i+y_j\right)\right)= \\
&=k\sum_{x_i=1:2}\left(\left(2x_i+y_1\right)+\left(2x_i+y_2\right)\right)=k\sum_{x_i=1:2}\left(4x_i+y_1+y_2\right)= \\
&=k\left\{\left(4x_1+y_1+y_2\right)+\left(4x_2+y_1+y_2\right)\right\}=k\left(4\left(x_1+x_2\right)+2\left(y_1+y_2\right)\right)= \\
&=k\left(4\left(1+2\right)+2\left(1+2\right)\right)=k\left(12+6\right)=1 \\
&k=\frac{1}{18}
\end{aligned} \tag{6.514}$$

b) Poiščimo marginalni funkciji $p_X\left(x_i\right)$ in $p_Y\left(y_j\right)$:

$$p_X\left(x_i\right)=\sum_{y_j} p_{XY}\left(x_i, y_j\right)=\sum_{y_j=1,2} \frac{1}{18}\left(2x_i+y_j\right)=\frac{1}{18}\left\{\left(2x_i+y_1\right)+\left(2x_i+y_2\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{18}\left(4x_i+y_1+y_2\right)=\frac{1}{18}\left(4x_i+1+2\right)=\frac{1}{18}\left(4x_i+3\right), \quad x_i=1,2$$

(6.515)

$$p_Y\left(y_j\right)=\sum_{x_i} p_{XY}\left(x_i, y_j\right)=\sum_{x_i=1,2} \frac{1}{18}\left(2x_i+y_j\right)=\frac{1}{18}\left\{\left(2x_1+y_j\right)+\left(2x_2+y_j\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{18}\left(2y_j+2x_1+2x_2\right)=\frac{1}{9}\left(y_j+x_1+x_2\right)=\frac{1}{9}\left(y_j+1+2\right)=\frac{1}{9}\left(y_j+3\right), \quad y_j=1,2$$

c) Poglejmo, če sta X in Y neodvisni:

$$p_{XY}\left(x_i, y_j\right)=\begin{cases}\frac{1}{18}\left(2x_i+y_j\right), & x_i=1,2,\ y_j=1,2 \\ 0, & drugod\end{cases}$$
$$p_X\left(x_i\right)=\frac{1}{18}\left(4x_i+3\right), \quad x_i=1,2$$
$$p_Y\left(y_j\right)=\frac{1}{9}\left(y_j+3\right), \quad y_j=1,2$$
$$p_{XY}\left(x_i, y_j\right)\neq p_X\left(x_i\right) p_Y\left(y_j\right)$$

(6.516)

Torej X in Y očitno nista neodvisni.

<u>Primer 2</u>: Denimo velja relacija $Z=f\left(X,Y\right)=X+Y$ *. X in Y sta neodvisni Poissonovi spremenljivki s parametroma* λ_1 in λ_2*. Poišči porazdelitev za Z in dokaži, da dobimo zanjo parameter* $\lambda_1+\lambda_2$.

Denimo imamo opravka z nekim dogodkom, ki ga izrazimo na naslednji način:

$$\left(X+Y=n\right)=\bigcup_{i=0}^{n}\left(X=i, Y=n-i\right)=$$
$$=\left(X=0, Y=n\right)U\left(X=1, Y=n-1\right)U\left(X=2, Y=n-2\right)U\ldots\left(X=n, Y=0\right)$$

(6.517)

kjer so dogodki $\left(X=i, Y=n-i\right)$, $i=0,1,\ldots,n$ nezdružljivi. Torej, če vsota $X+Y$ zavzame vrednost n, se to lahko zgodi, da bodisi X zavzame vrednost 0 in Y vrednost n, ali X zavzame vrednost 1 in Y vrednost n-1, itn…, ali X zavzame vrednost n in Y vrednost 0. Tako lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= P(X+Y=n)= \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(X=i, Y=n-i)= \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)\cdot P(Y=n-i)= \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_1^{\,i}\cdot e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{\,n-i}\cdot e^{-\lambda_2}}{(n-i)!}= \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_1^{\,i}\cdot\lambda_2^{\,n-i}}{i!\cdot(n-i)!}= \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}}_{\binom{n}{i}}\cdot\lambda_1^{\,i}\cdot\lambda_2^{\,n-i} \end{aligned} \tag{6.518}$$

Sledi:

$$P(Z=n)=P(X+Y=n)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\lambda_1^{\,i}\cdot\lambda_2^{\,n-i}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^n\}\text{To se da dokazat!}} \tag{6.519}$$

Sledi:

$$P(Z=n)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

Torej je Z očitno tudi Poissonova spremenljivka s parametrom $\lambda_1+\lambda_2$.

<u>Primer 3</u>: Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y=a\cdot X+b$, pri čemer velja $X\in N(\mu,\sigma^2)$. Izračunajte $f_Y(y)$ s pomočjo postopka transformacije, pri čemer je $a>0$.

Najprej tvorimo naslednje izraze:

$$\begin{aligned} &x=\frac{y-b}{a}=g(y) \\ &\left|\frac{dx}{dy}\right|=\left|\frac{d\,g(y)}{dy}\right|=\left|\frac{1}{a}\right| \\ &f_Y(y)=\left|\frac{d\,g(y)}{dy}\right|\cdot f_X(g(y)) \end{aligned} \tag{6.520}$$

Za funkcijo $f_X(x)$ velja:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.521}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} f_Y(y)&=\left|\frac{d\,g(y)}{dy}\right|\cdot f_X(g(y))=\left|\frac{1}{a}\right|\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}= \\ &=\frac{1}{|a|\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-b-\mu\cdot a}{a}\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{|a|\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-b-\mu\cdot a)^2}{a^2\cdot 2\cdot\sigma^2}}= \\ &=\frac{1}{|a|\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-(b+\mu\cdot a))^2}{2(a\cdot\sigma)^2}}=\frac{1}{(a\cdot\sigma)\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-(b+\mu\cdot a))^2}{2(a\cdot\sigma)^2}} \end{aligned} \tag{6.522}$$

Očitno je naključna spremenljivka Y tudi porazdeljena po Gaussovi porazdelitvi: $Y\in N(\mu_Y,\sigma_Y{}^2)$, pri čemer sta srednja vrednost in standardna deviacija enaki:

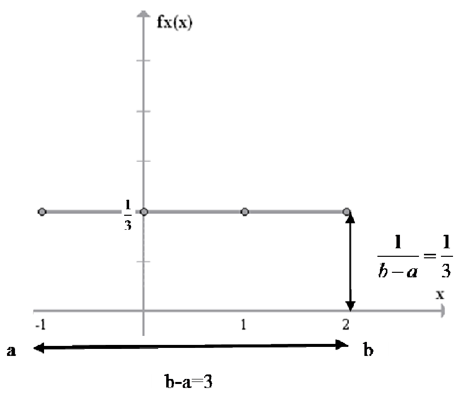
$$\begin{aligned} \mu_Y&=b+\mu\cdot a \\ \sigma_Y&=a\cdot\sigma \end{aligned} \tag{6.523}$$

<u>Primer 4:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y=X^2$, pri čemer velja $X\in U(-1,2)$. Izračunajte $f_Y(y)$ s pomočjo postopka transformacije.

Za funkcijo $f_X(x)=f(x)$ velja:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}; & a\le x\le b\\ 0; & drugje\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}; & -1\le x\le 2\\ 0; & drugje\end{cases}$$



(6.524)

V primeru 2 poglavja 6.3.5. (glej izraz (6.377)) smo izpeljali naslednji izraz:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_{X1}+f_{X2}\right] \tag{6.525}$$

Za $f_X\left(\sqrt{y}\right)$ velja:

$$\begin{aligned}
&f_{X1}=f_X\left(\sqrt{y}\right); \quad -1\le\sqrt{y}\le 2\\
&f_{X1}=f_X\left(\sqrt{y}\right); \quad 0\le\sqrt{y}\le 2, \text{ ker } \textit{koren gotovo večji od } 0\\
&f_{X1}=f_X\left(\sqrt{y}\right); \quad 0\le y\le 4
\end{aligned} \tag{6.526}$$

Za $f_X\left(-\sqrt{y}\right)$ pa velja:

$$\begin{aligned}
&f_{X2}=f_X\left(-\sqrt{y}\right); \quad -1\le-\sqrt{y}\le 2\\
&f_{X2}=f_X\left(-\sqrt{y}\right); \quad 1\ge\sqrt{y}\ge -2\\
&f_{X2}=f_X\left(-\sqrt{y}\right); \quad 1\ge\sqrt{y}\ge 0\\
&f_{X2}=f_X\left(-\sqrt{y}\right); \quad 1\ge y\ge 0
\end{aligned} \tag{6.527}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
&f_{X1}+f_{X2}=\left\{f_X\left(\sqrt{y}\right); \quad 0\le y\le 4\right\}+\left\{f_X\left(-\sqrt{y}\right); \quad 1\ge y\ge 0\right\}=\\
&=\begin{cases} f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right), & 0\le y\le 1\\ f_X\left(\sqrt{y}\right), & 1\le y\le 4\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, & 0<y<1\\ \frac{1}{3}, & 1\le y\le 4\end{cases}=\\
&=\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{3}, & 1\le y\le 4\end{cases}
\end{aligned} \tag{6.528}$$

Dobimo:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\left[f_{X1}+f_{X2}\right]=$$
$$=\frac{1}{\left|2\sqrt{y}\right|}\cdot\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{3}, & 1\le y\le 4\\ \end{cases}\quad=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{3}, & 1\le y\le 4\\ \end{cases}=$$
$$=\cdot\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1\le y\le 4\\ 0, & drugod\end{cases}\tag{6.529}$$

<u>Primer 5:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y=tg(X)$. Poiščite $f_Y\left(y\right)$, izraženo z $f_X\left(x\right)$, pri čemer za spremenljivko X velja: $X\in U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=U(a,b)$. Nato poiščite še kumulativno funkcijo $F_Y\left(y\right)$.

Ker velja: $b-a=\pi$, lahko funkcijo $f_X\left(x\right)$ lahko izrazimo na naslednji način:

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}; & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0; & drugje.\end{cases}\tag{6.530}$$

V nadaljevanju tvorimo naslednje izraze:

$$\begin{aligned}&Y=tg(X)\Rightarrow\qquad X=tg^{-1}(Y)=arctg(Y)\\ &x=tg^{-1}(y)=arctg(y)\\ \\ &f_Y\left(y\right)=f_X\left(x\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|=f_X\left[h\left(y\right)\right]\left|\frac{d\,h\left(y\right)}{dy}\right|\\ &\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left[arctg(y)\right]=\frac{1}{1+y^2}=\left|\frac{dx}{dy}\right|\end{aligned}\tag{6.531}$$

Sledi:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left[h(y)\right]\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right| = \\
&= \frac{1}{1+y^2} f_X\left[h(y)\right]
\end{aligned}
\tag{6.532}
$$

Poglejmo si še definicijsko območje za Y:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\
& -\frac{\pi}{2} \le arctg(y) \le \frac{\pi}{2} \\
& \underbrace{-tg\frac{\pi}{2}}_{-\infty} \le y \le \underbrace{tg\frac{\pi}{2}}_{\infty} \Rightarrow \\
& -\infty \le y \le \infty
\end{aligned}
\tag{6.533}
$$

Dobimo:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{1+y^2}\begin{cases} \frac{1}{\pi}; & -\infty \le y \le \infty \\ 0; & drugje. \end{cases} = \\
&= \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}, \qquad -\infty \le y \le \infty
\end{aligned}
\tag{6.534}
$$

Kumulativno funkcijo dobimo na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_T(t)\,dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi\left(1+t^2\right)}dt = \frac{1}{\pi} arctg(t)\Big|_{-\infty}^{y} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(arctg(y) - arctg(-\infty)\right) = \frac{1}{\pi}\left(arctg(y) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{arctg(y)}{\pi} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{6.535}
$$

<u>Primer 6:</u> Dano imamo neodvisno naključno spremenljivko X in odvisno naključno spremenljivko $Y = aX + b$. Poiščite $f_Y(y)$, izraženo z $f_X(x)$, pri čemer za spremenljivko X velja:

$$
f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x \ge 0 \\ 0; & sicer \end{cases}
\tag{6.536}
$$

V nadaljevanju tvorimo naslednje izraze:

$$Y = aX + b \Rightarrow \; x = \frac{y-b}{a} = h(y)$$
$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left[h(y)\right]\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right| \tag{6.537}$$
$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right| = \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

Sledi:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left[h(y)\right]\left|\frac{d\,h(y)}{dy}\right| = \tag{6.538}$$
$$= \frac{1}{|a|} f_X\left[h(y)\right] = \frac{1}{|a|} f_X\left[\frac{y-b}{a}\right]$$

Poglejmo si še definicijsko območje za Y:

$$x \geq 0$$
$$\frac{y-b}{a} \geq 0 \tag{6.539}$$
$$y \geq b$$

Dobimo:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left[\frac{y-b}{a}\right] = \frac{1}{|a|}\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda\left(\frac{y-b}{a}\right)}; & y \geq b \\ 0; & sicer \end{cases} \tag{6.540}$$

Če sta $a \geq 0,\; b = 0$, sledi:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda\left(\frac{y-0}{a}\right)}; & y \geq 0 \\ 0; & sicer \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{a}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)y}; & y \geq 0 \\ 0; & sicer \end{cases} \tag{6.541}$$

in ima spremenljivka Y eksponentno porazdelitev s parametrom $\frac{\lambda}{a}$.

<u>Primer 7</u>: Funkcija porazdelitve mešane gostote verjetnosti ima naslednjo obliko:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\left(x\cdot y^2\right) \ ; \ 0\le x\le 1 \ ; \ 0\le y\le 1 \\ \quad 0 \qquad ; \qquad \text{drugod} \end{cases}$$

a) Določite vrednost parametra c.

b) Poiščite $P\left(0\le x\le \frac{1}{2} \ ; \ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$ na analitičen način.

c) Poiščite $P\left(0\le x\le \frac{1}{2} \ ; \ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$ na numeričen način (s pomočjo Matlaba).

a) Najprej izračunajmo parameter c:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx\ dy=\int_0^1\int_0^1 c\left(x\cdot y^2\right)\ dx\ dy=c\int_0^1 xdx\cdot\int_0^1 y^2dy=$$

$$=c\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1=\frac{c}{6}=1$$

$$c=6$$

b) Nato izračunajmo verjetnost $P\left(0\le x\le \frac{1}{2} \ ; \ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$ na analitičen način:

$$P\left(0\le x\le \frac{1}{2} \ ; \ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 6\left(x\cdot y^2\right)\ dx\ dy=6\int_0^{1/2} xdx\cdot\int_0^{1/2} y^2dy=$$

$$=6\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{1/2}\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{1/2}=\left(x^2\right)_0^{1/2}\left(y^3\right)_0^{1/2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}=0.0313$$

c) Nato izračunajmo verjetnost $P\left(0\le x\le \frac{1}{2} \ ; \ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$ še na numeričen način s pomočjo Matlaba. V ta namen pokličemo naslednji program (mc_integ_2D.m):

```
% numericna integracija z monte carlo (mc_integ_2D.m):
% deluje le, ce se funkcija da razcepiti na x in y del.

clear, clc
f1 = input('Vnesi funkcijo, npr. x/2','s');    % vnesemo x del funkcije
f2 = input('Vnesi funkcijo, npr. y/2','s');    % vnesemo y del funkcije
a1 = input('Vnesi spodnjo mejo za x del');
b1 = input('Vnesi zgornjo mejo za x del');
a2 = input('Vnesi spodnjo mejo za y del');
b2 = input('Vnesi zgornjo mejo za y del');

ch = input('a imas opravka z eksponentno funkcijo x dela Da(1)/Ne(0)?');
if ch == 1
```

```
   k = input('Vnesi koeficient za x del');
   b1 = 10/k
end
ch = input('a imas opravka z eksponentno funkcijo y dela Da(1)/Ne(0)?');
if ch == 1
   k = input('Vnesi koeficient za y del');
   b2 = 10/k
end

N = input('Vnesi stevilo vzorcev');

sv1=(b1+a1)/2;
stres1 = sv1 - a1;
sv2=(b2+a2)/2;
stres2 = sv2 - a2;
I1 = 0;
I2 = 0;

for i = 1:N
    x=random('Uniform',sv1-stres1,sv1+stres1,1,1); % x se lahko giblje le na defin. obmocju
    I1 = I1 + (b1-a1)*eval(f1);
    y=random('Uniform',sv2-stres2,sv2+stres2,1,1); % y se lahko giblje le na defin. obmocju
    I2 = I2 + (b2-a2)*eval(f2);
end

I1=I1/N
I2=I2/N
I = I1*I2
disp('Rezultat numericne integracije je:')
I
```

Izpis komandnega okna ob klicu tega programa pa je:

```
Vnesi funkcijo, npr. x/2          6*x
Vnesi funkcijo, npr. y/2          y^2
Vnesi spodnjo mejo za x del    0
Vnesi zgornjo mejo za x del    0.5
Vnesi spodnjo mejo za y del    0
Vnesi zgornjo mejo za y del    0.5
a imas opravka z eksponentno funkcijo x dela Da(1)/Ne(0)? 0
a imas opravka z eksponentno funkcijo y dela Da(1)/Ne(0)? 0
Vnesi stevilo vzorcev  1000

I1 =

    0.7437


I2 =

    0.0421


I =

    0.0313

Rezultat numericne integracije je:

I =

    0.0313
```

Kot je razvidno, dobimo isti rezultat kot pri analitičnem izračunu.

6.6 Primeri iz Markovskih verig

V tem poglavju si bomo pogledali nekaj nalog iz področja Markovskih procesov, pri čemer se bomo osredotočili predvsem na Markovske verige. Nekaj primerov bo popolnoma splošnih hipotetičnih, nekateri pa bodo imeli za seboj prava aplikativna ozadja oz. ozadja iz procesov v naravi. Pri tem naj poudarimo, da smo v tem poglavju zaradi poenostavitve podajanja snovi izpustili rigorozne matematične oznake za vektorje in matrike, kljub temu pa bo iz teksta jasno razvidno, kdaj imamo opravka z vektorji, kdaj pa z matrikami. Naštejmo še nekatera gradiva, na katera smo se najbolj opirali pri tvorbi teh primerov: Hudoklin-Božič: Stohastični procesi (skripta in zbirka rešenih nalog), Juričić in Dragan: Stohastični procesi v logistiki, Prosojnice iz predavanj, Lipschutz: Probability, Schaum's Outlines, ter Winston: Operations Research, Applications and Algorithms. Pri tem so bili številni primeri opremljeni še z dodatno razlago in/ali reševanjem s pomočjo Matlaba, oz. so bile opravljene določene modifikacije ali razširitve. Poleg tega je bilo dodanih še precej dodatnih primerov, tako osnovnih računskih, kot tudi simuliranih iz realne prakse.

6.6.1 Splošni primeri

<u>Primer 1</u>: Dan je začetni vektor porazdelitve verjetnosti za zasedbo stanj (z verjetnostjo 0.5 zasedamo stanje 1 ali 3):

$$P(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{6.542}$$

in naslednja prehodna matrika P:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.543}$$

a) Narišite avtomat ,

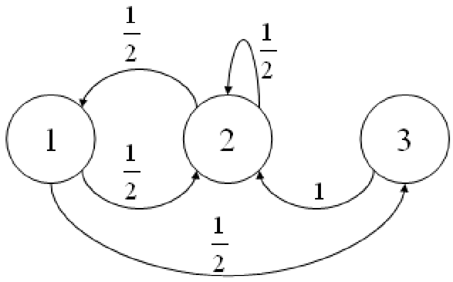
b) Poiščite $P(x_3)$,

c) Poiščite $E(x,t), t \le 3$,

d) Poiščite $P(x_3)$ z drevesom.

Pri tem je $x_i \in \{1,2,3\}$ zaloga vrednosti za stanja.

a) Slika 6.45. prikazuje avtomat.



Slika 6.45. Avtomat

b) Za potrebe izračuna $P(x_3)$ si bomo pomagali z izrazom (4.29). Najprej izračunamo $P(x_1)$ za prvi časovni trenutek:

$$P(x_1)=P\cdot P(x_0)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix} \tag{6.544}$$

Nato izračunamo $P(x_2)$ za drugi časovni trenutek:

$$P(x_2)=P\cdot P(x_1)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}+\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\\ 0\end{bmatrix} \tag{6.545}$$

Nazadnje izračunamo še $P(x_3)$ za tretji časovni trenutek:

$$P(x_3)=P\cdot P(x_2)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{16}\\ \frac{3}{16}+\frac{5}{16}\\ \frac{3}{16}+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{16}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{3}{16}\end{bmatrix} \tag{6.546}$$

c) Izračunajmo $E(x,t)$, $t\le 3$. Pri tem si pomagamo z izrazom:

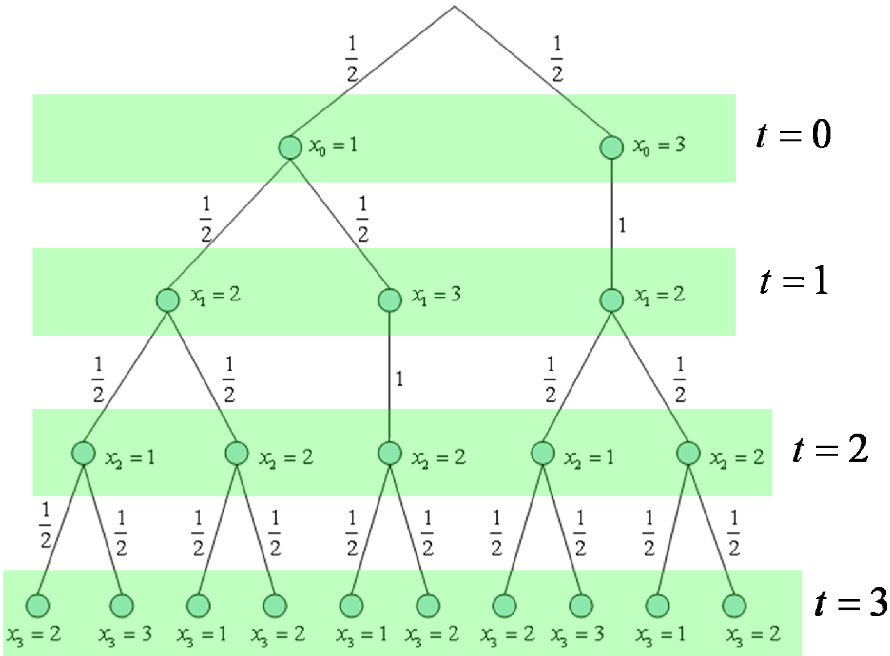
$$E(X_t)=\left.\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p(x_i)\right)\right|_t=\left.\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i\right)\right|_t=\left(x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3\right)_t \tag{6.547}$$

pri čemer je $x_i \in \{1,2,3\}$ zaloga vrednosti za stanja, p_i so pa verjetnosti za zasedbo stanj ob časovnem trenutku t.

Dobimo za $t \leq 3$:

$$\begin{aligned}
E(x_1) &= 1\times 0 + 2\times\frac{3}{4} + 3\times\frac{1}{4} = \frac{9}{4} = \frac{36}{16} = 2.25 \\
E(x_2) &= 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{5}{8} + 3\times 0 = \frac{13}{8} = \frac{26}{16} = 1.625 \\
E(x_3) &= 1\times\frac{5}{16} + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{3}{16} = \frac{14}{16} + 1 = \frac{30}{16} = 1.875
\end{aligned} \tag{6.548}$$

d) Poiščimo $P(x_3)$ še z drevesom, ki ga prikazuje slika 6.46.



Slika 6.46. Drevo za potrebe izračuna vektorja verjetnosti $P(x_3)$.

Princip izračunavanja verjetnostnih vektorjev za zasedbo stanj ob različnih časovnih trenutkih s pomočjo drevesa je bil razložen v spremnem tekstu slike 53 v primeru v poglavju 4.1. Na osnovi drevesa na sliki 6.46., ki ga dobimo z opazovanjem avtomata na sliki 6.45., lahko zapišemo naslednje izraze:

$$\begin{aligned}
P(x_3 = 1) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \\
P(x_3 = 2) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 3\cdot\frac{2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\
P(x_3 = 3) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16}
\end{aligned} \tag{6.549}$$

Seveda dobimo enake rezultate kot v izrazu (6.546). V nadaljevanju si poglejmo, kako bi izračune tega primera opravili v Matlabu. V ta namen pokličemo program markov1.m, ki ima naslednjo obliko:

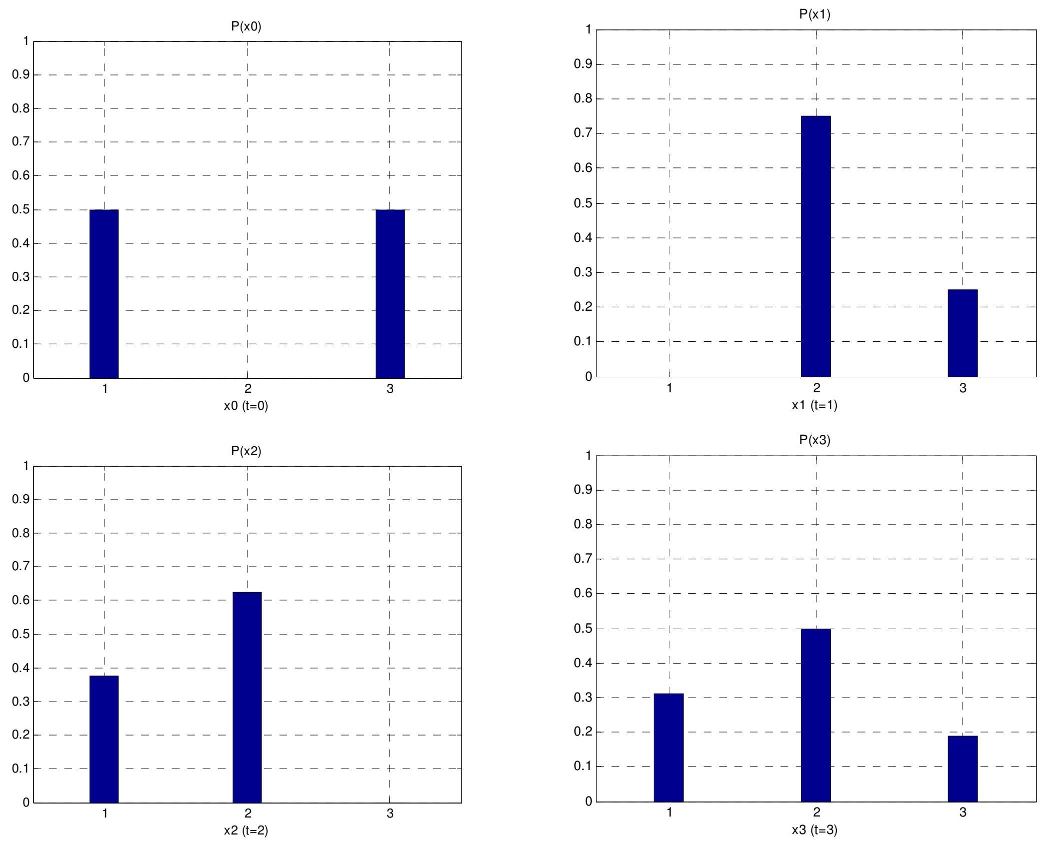
```
% markov1.m

clear
clc
close all

P = input('Vnesi prehodno matriko P')
tmax = input('Vnesi tmax');
p0 = input('Vnesi zacetni vektor p0')
st = input('Vnesi vektor stanj')    %zaloga vrednosti za stanja
p0_old = p0;
x = st;                             % vektor stanj

pt = [];

% generacija casovnih vektorjev verjetnosti za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
    pt1 = P*p0;
    E(i) = x*pt1;      % pricakovana vrednost za case t = 1,2,...,tmax
    pt = [pt; i pt1'];
    p0 = pt1;
end

disp('Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:')
pt
E

disp('Izpis vektorja verj. in E z ulomki:')
sym(pt,'r')
sym(E,'r')

% prikaz casovnih vektorjev verjetnosti za t=0,2,3,...,tmax:

figure
bar(x,p0_old,0.2)
str1 = ['P(x0)'];
title(str1)
str2 = ['x0 (t=0)'];
xlabel(str2)
grid
d=axis;
axis([d(1) d(2) d(3) 1])

for i = 1:tmax                          % generacija slik za P(xi)
    figure
    bar(x,pt(i,2:end),0.2)
    str1 = ['P(x' num2str(i) ')'];
    title(str1)
    str2 = ['x' num2str(i) ' (t=' num2str(i) ')'];
    xlabel(str2)
    grid
    d=axis;
    axis([d(1) d(2) d(3) 1])
end
```

```
% prikaz E(x,t) za t=1,2,3,...,tmax:

figure
plot([1:tmax],E,'LineWidth',2)
hold on
plot([1:tmax],E,'ro','LineWidth',2)
title('E(x,t)')
xlabel('t')
grid
d=axis;
axis([0 d(2)+1 d(3) d(4)])

% izracun stacionarnih verjetnosti:

[LAST_VEKT,LAST_VRED]=eig(P);
p1stac = 1/(1+ LAST_VEKT(2)/LAST_VEKT(1)+LAST_VEKT(3)/LAST_VEKT(1))
p2stac = LAST_VEKT(2)/LAST_VEKT(1) * p1stac
p3stac = LAST_VEKT(3)/LAST_VEKT(1) * p1stac
```

Izgled komandnega okna bi imel za ta primer obliko:

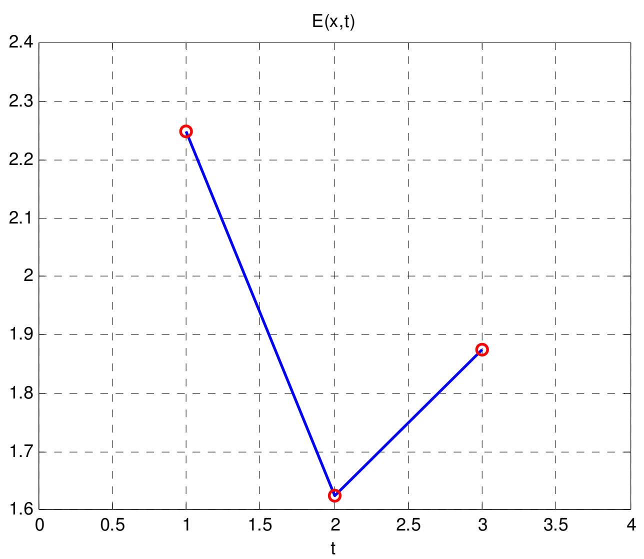
```
Vnesi prehodno matriko P[0 0.5 0;0.5 0.5 1;0.5 0 0]

P =

         0    0.5000         0
    0.5000    0.5000    1.0000
    0.5000         0         0

Vnesi tmax3
Vnesi zacetni vektor p0[0.5 0 0.5]'

p0 =

    0.5000
         0
    0.5000

Vnesi vektor stanj[1 2 3]

st =

     1     2     3

Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:

pt =

    1.0000         0    0.7500    0.2500
    2.0000    0.3750    0.6250         0
    3.0000    0.3125    0.5000    0.1875


E =

    2.2500    1.6250    1.8750

Izpis vektorja verj. in E z ulomki:

ans =

[ 1,    0, 3/4,  1/4]
[ 2,  3/8, 5/8,    0]
[ 3, 5/16, 1/2, 3/16]


ans =

[ 9/4, 13/8, 15/8]
```

Na sliki 6.47. si lahko pogledamo vektorje verjetnosti za zasedbo stanj ob časovnih trenutkih 0, 1, 2, in 3.



Slika 6.47. Vektorji verjetnosti za zasedbo stanj ob časovnih trenutkih 0, 1, 2, in 3.

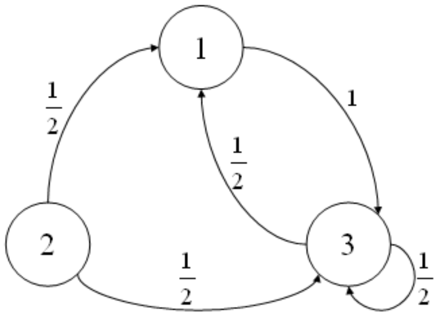
Na sliki 6.48. pa si lahko pogledamo še $E(x,t)$, $t \leq 3$.



Slika 6.48. Potek matematičnega upanja $E(x,t)$, $t \leq 3$.

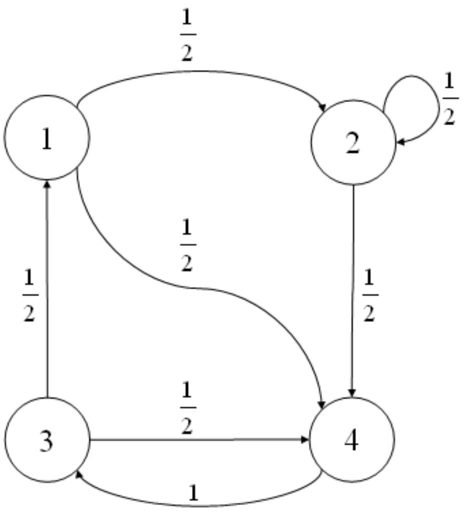
<u>*Primer 2:*</u> *Poiščite prehodne matrike za naslednje avtomate:*

a)



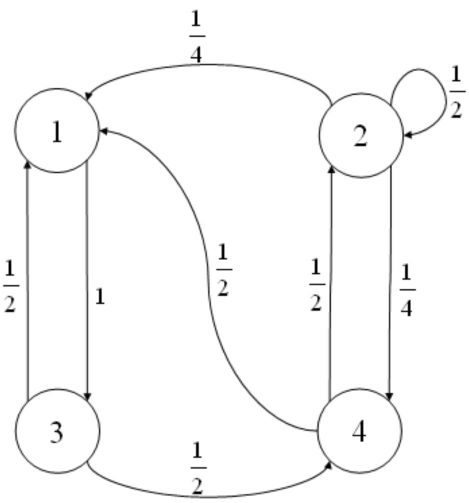
$$\Rightarrow P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

b)



$$\Rightarrow P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)

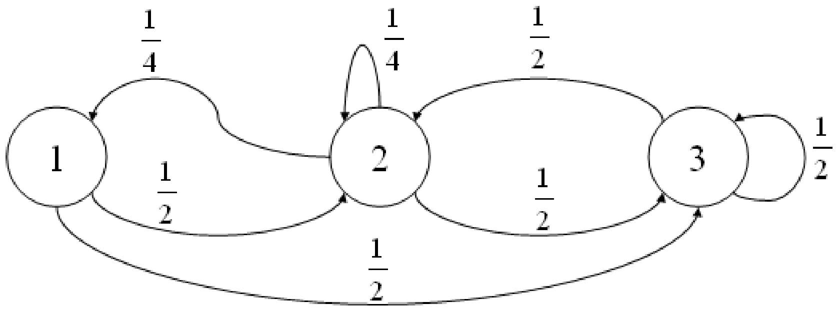


$$\Rightarrow P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Primer 3:</u> Poiščite avtomat za naslednjo prehodno matriko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.550)$$

Slika 6.49. prikazuje avtomat za dano prehodno matriko.



Slika 6.49. Avtomat za dano prehodno matriko

<u>Primer 4:</u> Igralna sreča nekega igralca sledi naslednjemu vzorcu. Če zmaga igro, je verjetnost zmage v naslednji igri 0.6. Če pa zgubi igro, je verjetnost ponovne zgube v naslednji igri enaka 0.7. Verjetnost zmage v 1. igri je 50%.

a) Poiščite prehodno matriko P in avtomat.

b) Poiščite verjetnost, da zmaga 2. igro.

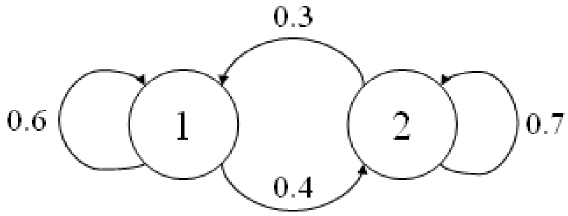
c) Poiščite verjetnost, da zmaga 3. igro.

Najprej definirajmo stanja:

stanje 1 – zmaga igro,
stanje 2 – izgubi igro.

Očitno je $x_i \in \{1,2\}$ zaloga vrednosti za stanja.

a) Najprej podajmo prehodno matriko in avtomat:



$$\Rightarrow P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ker je verjetnost zmage v 1. igri enaka 50%, za začetni vektor verjetnosti zapišemo:

$$P(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{6.551}$$

b) Za potrebe izračuna $P(x_1)$ (zmaga v 2. igri) si bomo pomagali z izrazom (4.29), pri čemer dobimo:

$$P(x_1) = P \times P(x_0) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix} \tag{6.552}$$

c) Tudi za potrebe izračuna $P(x_2)$ (zmaga v 3. igri) si bomo pomagali z izrazom (4.29), pri čemer dobimo:

$$P(x_2) = P \times P(x_1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.435 \\ 0.565 \end{bmatrix} \tag{6.553}$$

Torej velja, da je verjetnost, da zmaga v 2. igri, enaka 45%, v 3. igri pa je enaka 43,5%.

Izgled komandnega okna v Matlabu bi imel za ta primer obliko:

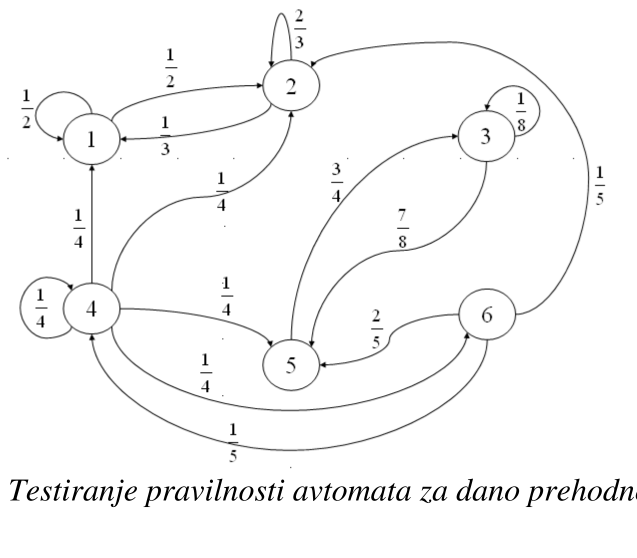
```
Vnesi prehodno matriko P[0.6 0.3;0.4 0.7]

P =

   0.6000    0.3000
   0.4000    0.7000

Vnesi tmax2
Vnesi zacetni vektor p0[0.5 0.5]'

p0 =

   0.5000
   0.5000

Vnesi vektor stanj[1 2]

st =
```

```
    1     2

Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:

pt =

    1.0000    0.4500    0.5500
    2.0000    0.4350    0.5650


E =

    1.5500    1.5650

Izpis vektorja verj. in E z ulomki:

ans =

[ 1,   9/20,   11/20]
[ 2, 87/200, 113/200]


ans =

[ 31/20, 313/200]
```

Primer 4: Dano imamo naslednjo prehodno matriko P:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.554}$$

A je pripadajoči avtomat na sliki 6.50. pravilen? Če ni, napišite, kje so napake in narišite pravilen avtomat!

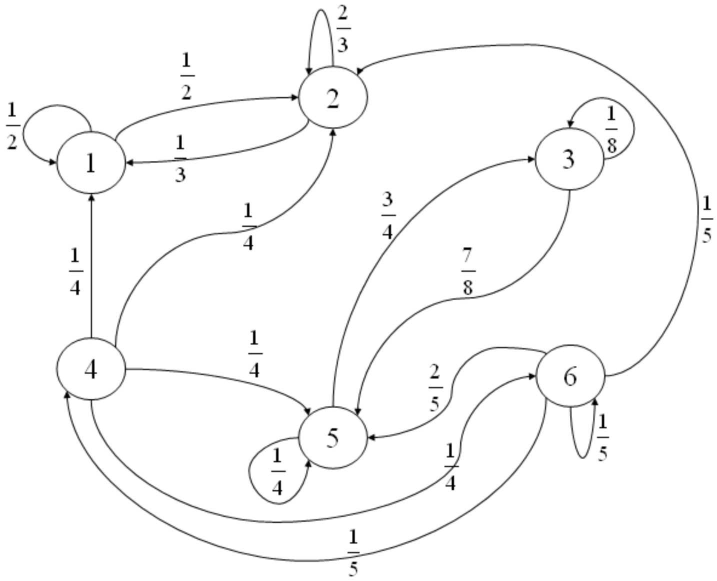


Slika 6.50. Testiranje pravilnosti avtomata za dano prehodno matriko

Napake so naslednje:

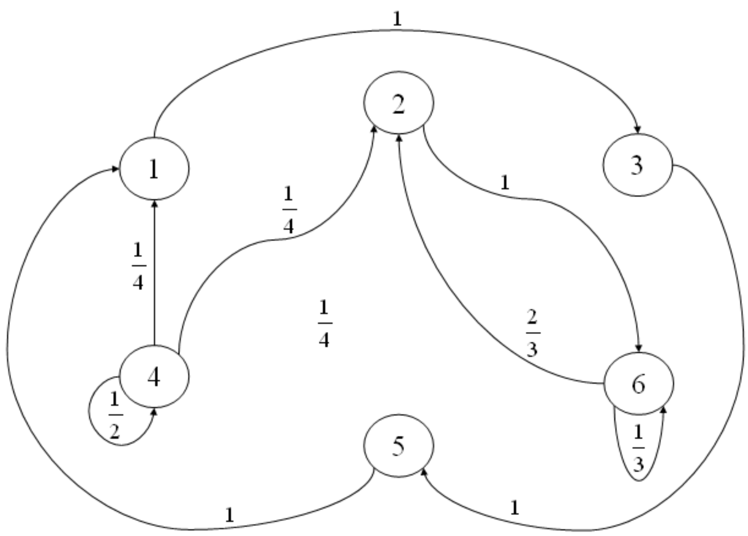
$$
\begin{aligned}
P_{44} &= \frac{1}{4} \rightarrow \text{ ni povezave} \\
P_{55} &= \frac{1}{4} \rightarrow \text{ manjka povezava} \\
P_{66} &= \frac{1}{5} \rightarrow \text{ manjka povezava}
\end{aligned}
\qquad (6.555)
$$

Pravilen avtomat je prikaza na sliki 6.51.



Slika 6.51. Pravilen avtomat za dano prehodno matriko

<u>*Primer 5:*</u> *Dan imamo avtomat, prikazan na sliki 6.52.*



Slika 6.52. Dan avtomat

A je pripadajoča prehodna matrika:

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

pravilna? Če ni, napišite, kje so napake, ter zapišite pravilno matriko.

Napake so naslednje:

$$P_{41} \neq 0 = \frac{1}{4} \qquad P_{62} \neq 0 = \frac{2}{3}$$

$$P_{43} \neq \frac{1}{4} = 0 \qquad P_{63} \neq \frac{2}{3} = 0$$

$$P_{44} \neq 0 = \frac{1}{2} \qquad P_{66} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P_{45} \neq \frac{1}{2} = 0$$

Pravilna prehodna matrika se glasi:

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

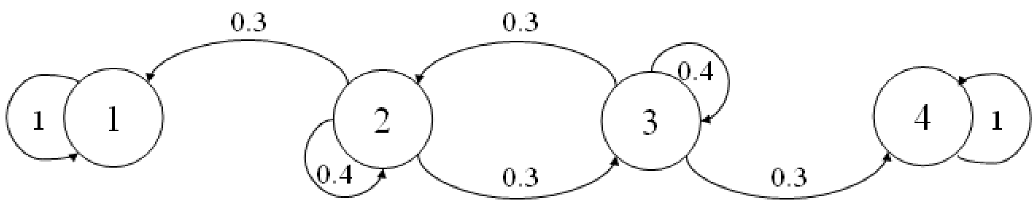
<u>Primer 5:</u> Muha se pomika enodimenzionalno, pri čemer vsak premik za eno dolžinsko enoto opravi v eni časovni enoti. V vsaki časovni enoti se premakne levo ali desno z verjetnostjo 0.3, ali pa ostane na mestu z verjetnostjo 0.4. Na skrajni levi (x = 1) in skrajni desni (x = m) jo čakata pajka (glej sliko 6.53). Če muha prileti do njiju, jo pojesta in proces se konča, sicer pa se muha giblje med pozicijami 2,3,…,m-1. Določite stanja in narišite avtomat, če je m = 4. Določite tudi prehodno matriko.

Slika 6.53. Primer muhe in pajkov

Stanja so naslednja:

$S = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$ lega na x osi.

Avtomat prikazuje slika 6.54.



Slika 6.54. Avtomat za primer muhe in pajkov

Prehodna matrika ima obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.556)$$

Primer 6: Dana sta naslednja prehodna matrika in vektor porazdelitve verjetnosti za posamezni stanji v tretji časovni enoti:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P(x_3) = \begin{bmatrix} 0.363 \\ 0.637 \end{bmatrix} \tag{6.557}$$

Kakšno je bilo začetno stanje $P(x_0)$?

Tvorimo naslednji izraz na osnovi izraza (4.29):

$$\begin{aligned}
&P \times P(x_2) = P(x_3) \\
&\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(x_2) \\ P_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3630 \\ 0.6370 \end{bmatrix} \\
&\left.\begin{aligned} 0.3 \times P_1(x_2) + 0.4 \times P_2(x_2) = 0.3630 / \times 0.7 \\ 0.7 \times P_1(x_2) + 0.6 \times P_2(x_2) = 0.6370 / \times 0.3 \end{aligned}\right\} - \\
&0.7 \times 0.4 \times P_2(x_2) - 0.3 \times 0.6 \times P_2(x_2) = 0.3630 \times 0.7 - 0.6370 \times 0.3 \\
&P_2(x_2) = \frac{0.3630 \times 0.7 - 0.6370 \times 0.3}{0.7 \times 0.4 - 0.3 \times 0.6} = \frac{0.063}{0.1} = 0.63 \\
&P_1(x_2) = 1 - P_2(x_2) = 0.37 \\
&\text{Sledi: } P(x_2) = \begin{bmatrix} P_1(x_2) \\ P_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.63 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.558}$$

Podobno tvorimo še ta izraz:

$$\begin{aligned}
&P \times P(x_1) = P(x_2) \\
&\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(x_1) \\ P_2(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.63 \end{bmatrix} \\
&\left.\begin{aligned} 0.3 \times P_1(x_1) + 0.4 \times P_2(x_1) = 0.37 / \times 0.7 \\ 0.7 \times P_1(x_1) + 0.6 \times P_2(x_1) = 0.63 / \times 0.3 \end{aligned}\right\} - \\
&\underbrace{0.28 \times P_2(x_1) - 0.18 \times P_2(x_1)}_{0.1 \times P_2(x_1)} = 0.7 \times 0.37 - 0.63 \times 0.3 = 0.07 \Rightarrow \\
&P_2(x_1) = 0.7 \\
&P_1(x_1) = 1 - P_2(x_1) = 1 - 0.7 = 0.3 \\
&\text{Sledi: } P(x_1) = \begin{bmatrix} P_1(x_1) \\ P_2(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.559}$$

Nazadnje še tvorimo:

$$P \times P(x_0) = P(x_1)$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(x_0) \\ P_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(x_1) \\ P_2(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.3 \times P_1(x_0) + 0.4 \times P_2(x_0) = 0.3 / \times 0.7 \\ 0.7 \times P_1(x_0) + 0.6 \times P_2(x_0) = 0.7 / \times 0.3 \end{array}\right\} -$$

$$0.4 \times 0.7 \times P_2(x_0) - 0.6 \times 0.3 \times P_2(x_0) = 0.3 \times 0.7 - 0.7 \times 0.3 = 0 \qquad (6.560)$$

$$P_2(x_0) = 0$$

$$P_1(x_0) = 1 - P_2(x_0) = 1$$

Sledi: $P(x_0) = \begin{bmatrix} P_1(x_0) \\ P_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Torej je bil začetni vektor enak: $P(x_0) = \begin{bmatrix} P_1(x_0) \\ P_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Primer 6:</u> Opravka imamo z napovedovanjem vremena v Tel Avivu s pomočjo Markovskih verig. Iz statistike opazovanja vremena so ugotovili lastnosti, podane v tabeli na sliki 6.55.

sedanji dan $x_i + 1$

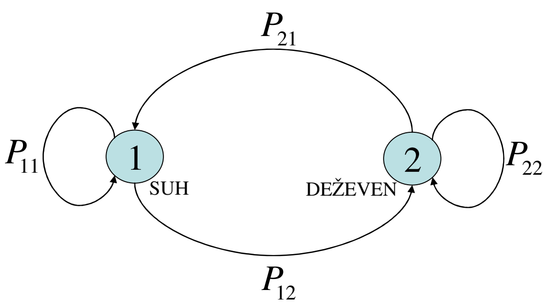
prejšnji dan x_i	SUH (1)	DEŽEVEN (2)
SUH (1)	1049	350
DEŽEVEN (2)	351	687

Meritve

Slika 6.55. Statistika opazovanja vremena v Tel Avivu

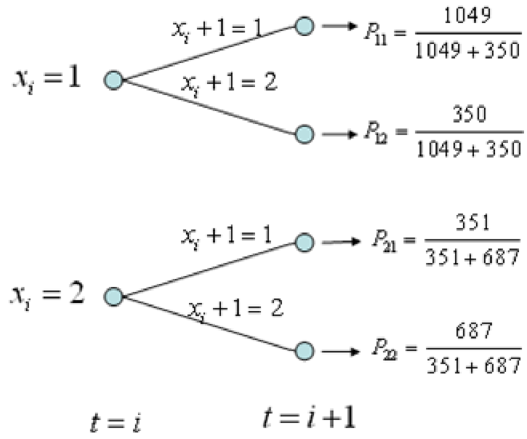
Če je 1. januar deževen, kakšna je verjetnost, da bo 6. januar sončen ali deževen?

Najprej podajmo avtomat, ki ga prikazuje slika 6.56 (stanji sta 1 in 2).



Slika 6.56. Avtomat za napovedovanje vremena v Tel Avivu

Na osnovi slik 6.55 in 6.56. lahko narišemo sliko 6.57.



Slika 6.57. Izračun verjetnosti prehodov med stanjema

Tako dobimo naslednje prehodne verjetnosti:

$P_{11} = 0.7498$ } *Verjetnost, da če je suh dan, da bo naslednji dan spet suh dan.*
$P_{12} = 0.2502$ } *Verjetnost, da če je suh dan, da bo naslednji dan deževen.*
$P_{21} = 0.3382$ } *Verjetnost, da če je deževen dan, da bo naslednji dan suh.* (6.561)
$P_{22} = 0.6618$ } *Verjetnost, da če je deževen dan, da bo naslednji dan spet deževen.*

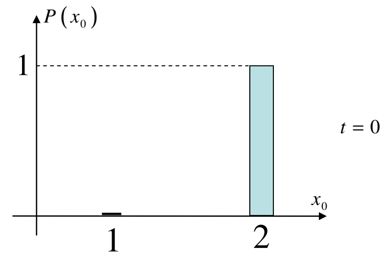
Prehodna matrika zavzame obliko:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.7498 & 0.3382 \\ 0.2502 & 0.6618 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \Downarrow & \quad\quad \Downarrow \\ \sum 1 & \quad\quad \sum 1 \end{array} \end{array} \tag{6.562}$$

Za 1. januar lahko zapišemo naslednje (gotovo smo v stanju 2):

$$t = 0$$

$$\underline{P}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \rightarrow 1.\ \text{januar je } 100\%\ \text{deževen} \end{matrix}$$

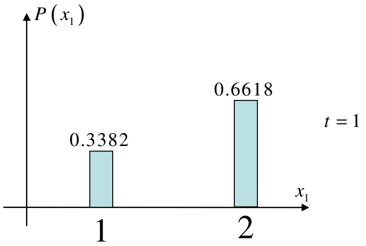


(6.563)

Za 2. januar lahko zapišemo naslednje:

$$t = 1$$

$$\underbrace{\underline{P}(x_1)}_{\text{2. januar}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_0) = \begin{bmatrix} 0.7498 & 0.3382 \\ 0.2502 & 0.6618 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3382 \\ 0.6618 \end{bmatrix}$$

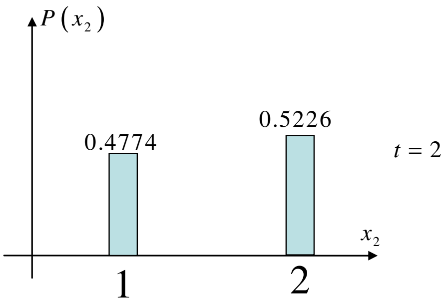


(6.564)

Za 3. januar lahko zapišemo naslednje:

$$t = 2$$

$$\underbrace{\underline{P}(x_2)}_{\text{3. januar}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_1) = \begin{bmatrix} 0.7498 & 0.3382 \\ 0.2502 & 0.6618 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3382 \\ 0.6618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4774 \\ 0.5226 \end{bmatrix}$$

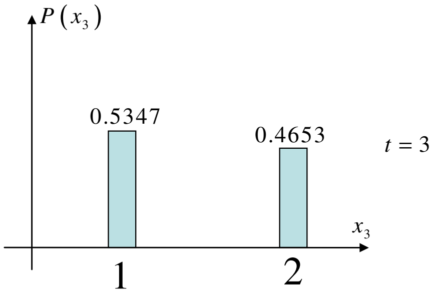


(6.565)

Za 4. januar lahko zapišemo naslednje:

$$t = 3$$

$$\underbrace{\underline{P}(x_3)}_{\text{4. januar}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_2) = \begin{bmatrix} 0.7498 & 0.3382 \\ 0.2502 & 0.6618 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4774 \\ 0.5226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5347 \\ 0.4653 \end{bmatrix}$$

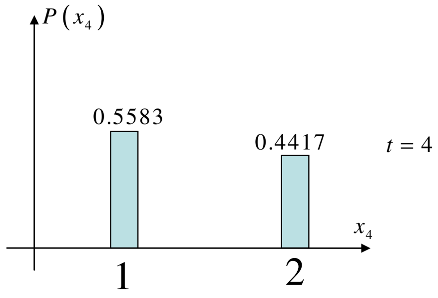


(6.566)

Za 5. januar lahko zapišemo naslednje:

$$t = 4$$

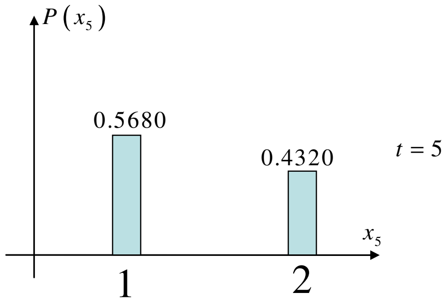
$$\underbrace{\underline{P}(x_4)}_{\text{5. januar}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_3) = \begin{bmatrix} 0.5583 \\ 0.4417 \end{bmatrix} \qquad (6.567)$$



Za 6. januar lahko zapišemo naslednje:

$$t = 5$$

$$\underbrace{\underline{P}(x_5)}_{\text{6. januar}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_4) = \begin{bmatrix} 0.5680 \\ 0.4320 \end{bmatrix} \qquad (6.568)$$



Torej je 56.8 % verjetnost, da bo suh dan, ter 43.2 % verjetnost, da bo deževen dan v 6. januarju, če je bil 1. januarja deževen dan.

Če bi poklicali program markov1.m, bi dobili naslednji izpis v komandnem oknu:

```
Vnesi prehodno matriko P     [0.7498 0.3382;0.2502 0.6618]

P =

    0.7498    0.3382
    0.2502    0.6618

Vnesi tmax5
Vnesi zacetni vektor p0         [0 1]'

p0 =

     0
     1

Vnesi vektor stanj              [1 2]
```

st =

1 2

Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:

pt =

1.0000	**0.3382**	**0.6618**
2.0000	**0.4774**	**0.5226**
3.0000	**0.5347**	**0.4653**
4.0000	**0.5583**	**0.4417**
5.0000	**0.5680**	**0.4320**

Očitno dobimo za časovne poteke vektorjev verjetnosti enake rezultate kot pri analitičnih izračunih.

Izračunajmo še razmere v stacionarnem stanju (glej izraz (4.31)):

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_\infty) = \underline{P}(x_\infty) \qquad ; \qquad \underline{\underline{P}} \doteq \begin{bmatrix} 0.74 & 0.33 \\ 0.26 & 0.67 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.74 & 0.33 \\ 0.26 & 0.67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{\infty 1} \\ P_{\infty 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\infty 1} \\ P_{\infty 2} \end{bmatrix}$$

$$0.74 \cdot P_{\infty 1} + 0.33 \cdot P_{\infty 2} = P_{\infty 1} \qquad (E_1)$$

$$0.26 \cdot P_{\infty 1} + 0.67 \cdot P_{\infty 2} = P_{\infty 2} \qquad (E_2)$$

Iz E_1 sledi:

$$0.33 \cdot P_{\infty 2} = P_{\infty 1}(1 - 0.74) = P_{\infty 1} \cdot 0.26$$

$$P_{\infty 2} = \frac{0.26}{0.33} \cdot P_{\infty 1} \tag{6.569}$$

Velja pa tudi:

$$P_{\infty 1} + P_{\infty 2} = 1 \;\Rightarrow\; P_{\infty 2} = 1 - P_{\infty 1}$$

Sledi:

$$\frac{0.26}{0.33} \cdot P_{\infty 1} = 1 - P_{\infty 1}$$

$$P_{\infty 1}\left(1 + \frac{0.26}{0.33}\right) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\infty 1} &= \frac{1}{1 + \frac{0.26}{0.33}} \doteq 0.56 \\ P_{\infty 2} &= 1 - P_{\infty 1} \doteq 0.44 \end{aligned}\right\} \textit{Torej so 6. januarja že skoraj stacionarne razmere.}$$

<u>Primer 7:</u> Dan imamo nek rezervoar, kjer so na osnovi meritev dobili naslednjo prehodno matriko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.570}$$

kjer stanja 1, 2, 3, 4 pomenijo naslednje:

1 – kritično,
2 – slabo,
3 – dobro,
4 – odlično.

Izračunajte:

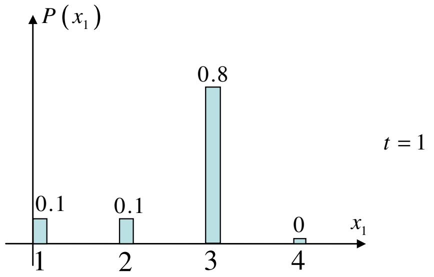
- *a) Porazdelitev verjetnosti za 3 časovne enote (npr. dneve),*
- *b) Narišite avtomat,*
- *c) Izračunajte in narišite E(x,t) za 3 časovne enote. Rezervoar je na začetku v kritičnem stanju ($x_0 = 1$).*
- *d) Rešite še z drevesom za $x_0 = 1$ in podajte sklep.*

a) Najprej bomo izračunali porazdelitev verjetnosti za 3 časovne enote. Na začetku velja (začetni vektor porazdelitve verjetnosti):

$$\underline{P}(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{6.571}$$

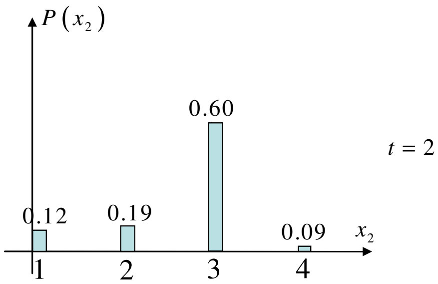
Za 1. časovno enoto lahko zapišemo naslednje:

$$\underline{P}(x_1) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_0) = \ldots = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{6.572}$$



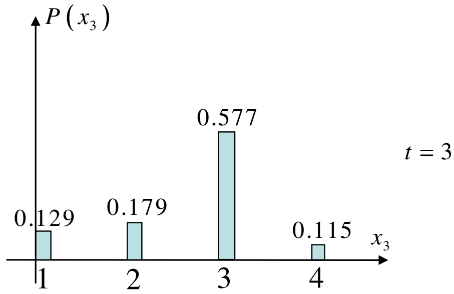
Za 2. časovno enoto lahko zapišemo naslednje:

$$\underline{P}(x_2) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_1) = \ldots = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.19 \\ 0.60 \\ 0.09 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{6.573}$$



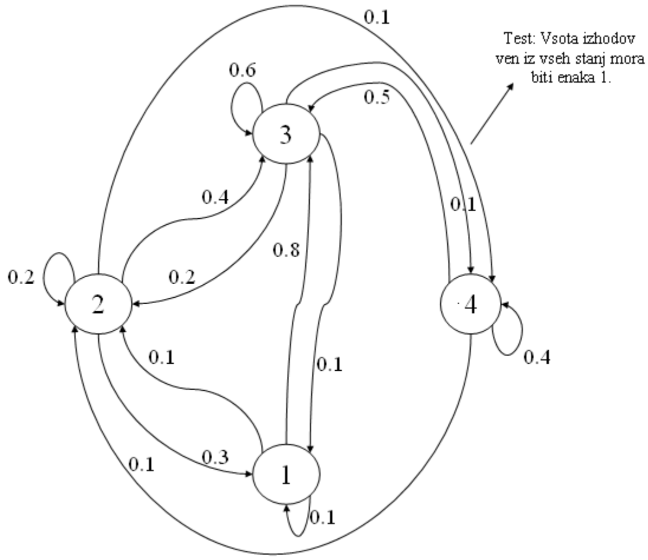
Za 3. časovno enoto pa lahko zapišemo naslednje:

$$\underline{P}(x_3) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_2) = \ldots = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.129 \\ 0.179 \\ 0.577 \\ 0.115 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{6.574}$$



Torej bo rezervoar po 3 časovnih enotah z največjo, 57.7 % verjetnostjo, v dobrem stanju 3, če je bil na začetku v kritičnem stanju.

b) Avtomat za ta primer je prikazan na sliki 6.58.



Slika 6.58. Avtomat za primer rezervoarja

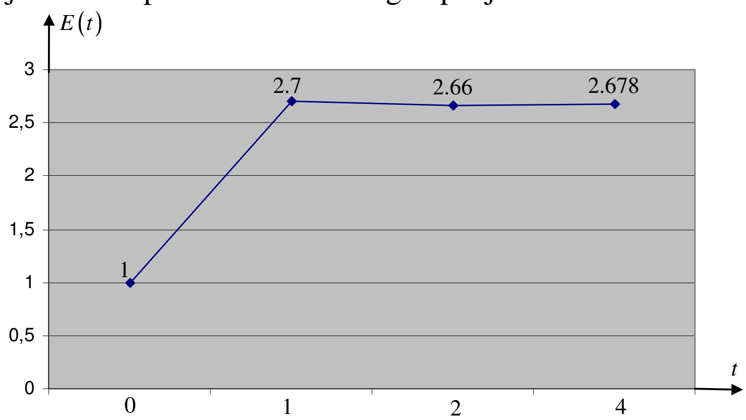
c) Matematično upanje E(x,t) za 3 časovne enote dobimo s pomočjo izraza:

$$E(X_t) = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p(x_i) \right) \Bigg|_t = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i \right) \Bigg|_t = \left(x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 \right)_t \tag{6.575}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} E(x_1) &= 1\times 0.1 + 2\times 0.1 + 3\times 0.8 + 4\times 0 = 2.7 \\ E(x_2) &= 1\times 0.12 + 2\times 0.19 + 3\times 0.6 + 4\times 0.09 = 2.66 \\ E(x_3) &= 1\times 0.129 + 2\times 0.179 + 3\times 0.577 + 4\times 0.115 = 2.678 \end{aligned} \tag{6.576}$$

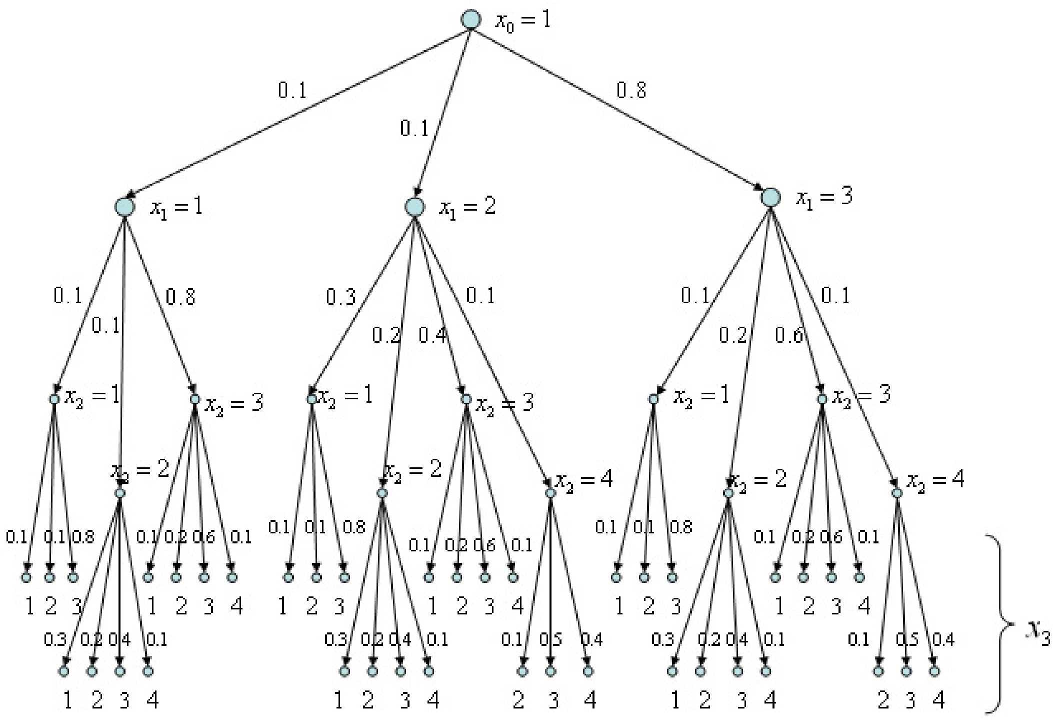
Slika 6.59. prikazuje časovni potek matematičnega upanja.



Slika 6.59. Časovni potek matematičnega upanja

Iz slike 6.59. je razvidno, da se matematično upanje izniha na vrednost 2.678, kar pomeni, da pričakujemo z največjo verjetnostjo, da bo bil po 3 dneh rezervoar v dobrem stanju.

d) Drevo za dani problem z rezervoarjem je prikazano na sliki 6.60.



Slika 6.60.: Drevo za dani problem z rezervoarjem

Če bi poklicali program markov1.m, bi dobili naslednji izpis v komandnem oknu:

```
Vnesi prehodno matriko P          [0.1 0.3 0.1 0;0.1 0.2 0.2 0.1; 0.8 0.4 0.6 0.5;0 0.1 0.1 0.4 ]

P =

    0.1000    0.3000    0.1000         0
    0.1000    0.2000    0.2000    0.1000
    0.8000    0.4000    0.6000    0.5000
         0    0.1000    0.1000    0.4000

Vnesi tmax       3
Vnesi zacetni vektor p0   [1 0 0 0]'

p0 =

     1
     0
     0
     0

Vnesi vektor stanj    [1 2 3 4]

st =

     1     2     3     4
```

Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:

pt =

1.0000	**0.1000**	**0.1000**	**0.8000**	**0**
2.0000	**0.1200**	**0.1900**	**0.6000**	**0.0900**
3.0000	**0.1290**	**0.1790**	**0.5770**	**0.1150**

E =

2.7000 2.6600 2.6780

Očitno dobimo za časovne poteke vektorjev verjetnosti enake rezultate kot pri analitičnih izračunih.

<u>Primer 8</u>: Študent ima take navade: Če to noč študira, je 70 % verjetnosti, da ne bo študiral naslednjo noč. Če pa to noč ne študira, je 60 % verjetnosti, da ne bo študiral tudi naslednjo noč.

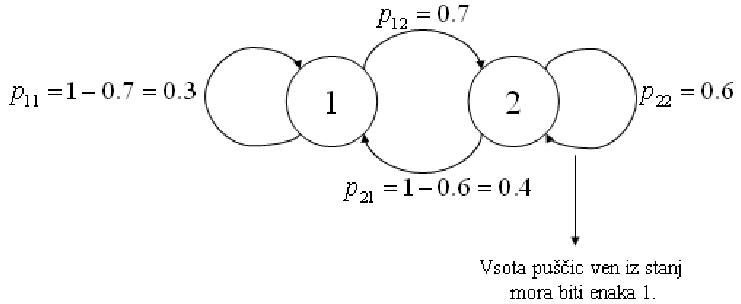
a) Konstruirajte prehodno matriko,
b) Narišite avtomat,
c) Kakšna je porazdelitev verjetnosti, da čez 3 noči študira/ ne študira, če to noč študira?
d) Kakšna je po daljšem času verjetnost, da študent ponoči študira?
e) Reši točko c) še z drevesom,
f) Narišite potek matematičnega upanja v odvisnosti od časa $t \geq 0$.

Stanji sta:
1 – ponoči študira
2 – ponoči ne študira

a) Prehodna matrika in začetni vektor verjetnosti imata obliko:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad P(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} 1 \rightarrow \text{ta noč} \\ 2 \end{array} \tag{6.577}$$

b) Avtomat je prikazan na sliki 6.61.



Slika 6.61.:Avtomat za študijske navade študenta

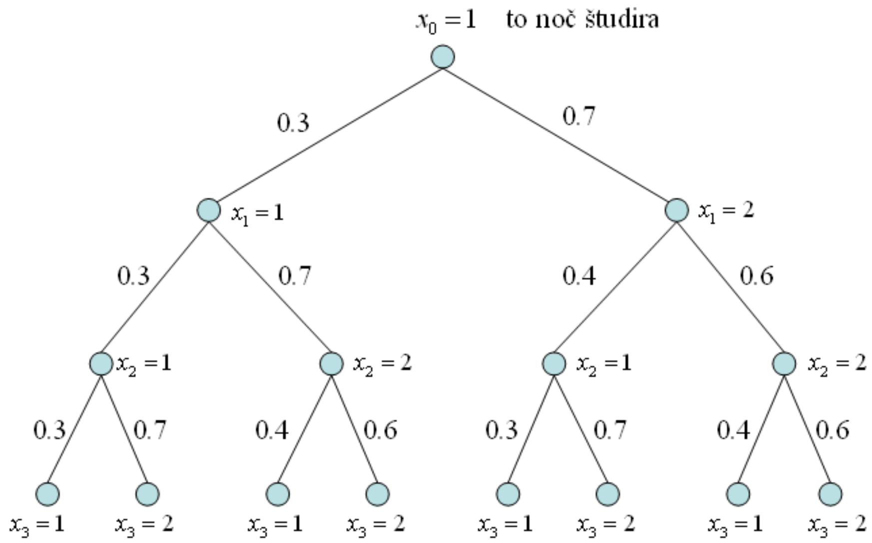
c) Izračun porazdelitve verjetnosti za naslednje 3 noči je naslednji:

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= P\cdot p(x_0) = \begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3\\ 0.7\end{bmatrix}\begin{matrix}1\rightarrow \text{naslednja noč}\\ 0\end{matrix}\\
p(x_2) &= P\cdot p(x_1) = \begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\ 0.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.09+0.28\\ 0.21+0.42\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.37\\ 0.63\end{bmatrix}\begin{matrix}1\rightarrow \text{čez 2 noči}\\ 0\end{matrix}\\
p(x_3) &= P\cdot p(x_2) = \begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.37\\ 0.63\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3630\\ 0.6370\end{bmatrix}\rightarrow \begin{matrix}\text{Porazdelitev verjetnosti, da čez}\\ \text{3 noči študira oz. ne študira}\end{matrix}
\end{aligned}
\tag{6.578}
$$

d) Izračun stacionarnih verjetnosti je naslednji:

$$
\begin{aligned}
&P\times P_\infty = P_\infty \qquad\qquad P_{1\infty} + P_{2\infty} = 1\\
&P\times\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\end{bmatrix}\\
&\left.\begin{matrix}0.3P_{1\infty} + 0.4P_{2\infty} = P_{1\infty} & \big|\cdot 0.7\\ 0.7P_{1\infty} + 0.6P_{2\infty} = P_{2\infty} & \big|\cdot 0.3\end{matrix}\right\}-\\
&0.28\cdot P_{2\infty} - 0.18\cdot P_{2\infty} = 0.7P_{1\infty} - 0.3P_{2\infty}\\
&0.4P_{2\infty} = 0.7P_{1\infty}\\
&P_{2\infty} = \frac{0.7}{0.4}P_{1\infty} = 1 - P_{1\infty}\\
&P_{1\infty} = \frac{1}{1+\frac{0.7}{0.4}} = 0.3636,\quad P_{2\infty} = 0.6364
\end{aligned}
\tag{6.579}
$$

e) Drevo za ta problem je predstavljeno na sliki 6.62.



Slika 6.62.:Drevo, ki opisuje študijske navade študenta

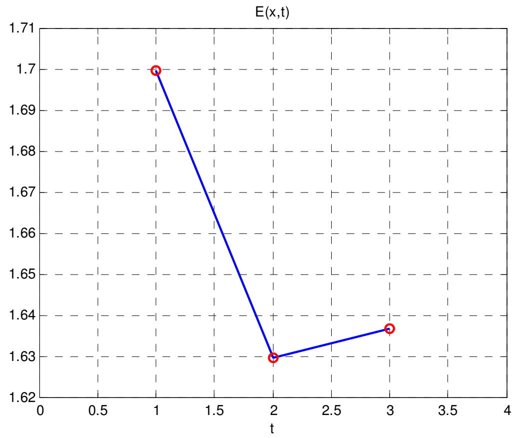
Na osnovi slike 6.62. zapišemo:

$$\begin{aligned} P(x_3 = 1) &= (0.3)^3 + 0.4 \times 0.7 \times 0.3 + 0.3 \times 0.4 \times 0.7 + 0.4 \times 0.6 \times 0.7 = \\ &= (0.3)^3 + 2 \times 0.4 \times 0.7 \times 0.3 + 0.4 \times 0.6 \times 0.7 = \\ &= (0.3)^3 + 0.4[2 \times 0.7 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7] = \\ &= (0.3)^3 + 0.4[0.42 + 0.42] = (0.3)^3 + 0.4 \times 0.84 = 0.3630 \\ P(x_3 = 2) &= 0.7 \times 0.3^2 + 0.6 \times 0.7 \times 0.3 + 0.4 \times 0.7^2 + 0.6^2 \times 0.7 = \\ &= 0.7[0.09 + 0.18 + 0.28 + 0.36] = 0.7 \times 0.91 = 0.6370 \end{aligned} \tag{6.580}$$

f) Potek matematičnega upanja v odvisnosti od časa $t \geq 0$ dobimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} E(x_0) &= \sum_{i=1}^{2} i \times P(x_0 = i) = 1 \times P(x_0 = 1) + 2 \times P(x_0 = 2) = 1 \times 1 + 2 \times 0 = 1 \\ E(x_1) &= \sum_{i=1}^{2} i \times P(x_1 = i) = 1 \times P(x_1 = 1) + 2 \times P(x_1 = 2) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.7 = 1.7 \\ E(x_2) &= \sum_{i=1}^{2} i \times P(x_2 = i) = 1 \times P(x_2 = 1) + 2 \times P(x_2 = 2) = 1 \times 0.37 + 2 \times 0.63 = 1.63 \\ E(x_3) &= \sum_{i=1}^{2} i \times P(x_3 = i) = 1 \times P(x_3 = 1) + 2 \times P(x_3 = 2) = 1 \times 0.363 + 2 \times 0.637 = 1.637 \end{aligned} \tag{6.581}$$

Potek matematičnega upanja v odvisnosti od časa $t \geq 0$ je prikazan na sliki 6.63.



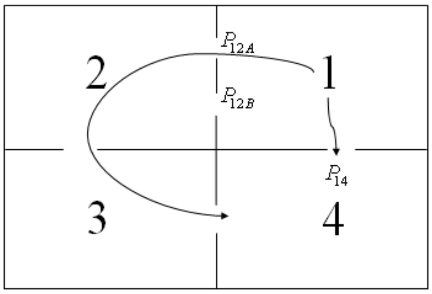
Slika 6.63.: Potek matematičnega upanja v odvisnosti od časa

Če bi poklicali program markov1.m, bi dobili naslednji izpis v komandnem oknu:

```
Vnesi prehodno matriko P      [0.3 0.4; 0.7 0.6]

P =

   0.3000    0.4000
   0.7000    0.6000

Vnesi tmax     3
Vnesi zacetni vektor p0     [1 0]'

p0 =

     1
     0

Vnesi vektor stanj     [1 2]

st =

     1     2

Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:

pt =

   1.0000    0.3000    0.7000
   2.0000    0.3700    0.6300
   3.0000    0.3630    0.6370


E =

   1.7000    1.6300    1.6370
```

Očitno dobimo enake rezultate kot pri analitičnih izračunih.

<u>Primer 9</u>: *Miška se giblje v zaboju s štirimi prekati, ki so povezani z odprtinami (slika 6.64). V časih n = 1,2,...,n prehaja iz enega prekata v drugega. Z enako verjetnostjo izbere katerokoli odprtino. Njeno gibanje poskušamo opisati z Markovsko verigo, kjer so stanja prekati.*
a) Konstruirajte prehodno matriko,
b) Narišite avtomat.



Slika 6.64.: Gibanje miške v zaboju s prekati

Stanja so naslednja:

1- 1. prekat,
2- 2. prekat,
3- 3. prekat,
4- 4. prekat.

Za 1. prekat velja:

$$\begin{aligned}
&P_{12A} = P_{12B} = P_{14} \\
&P_{12A} + P_{12B} + P_{14} = 1 \Rightarrow \quad P_{14} + P_{14} + P_{14} = 1 \\
&P_{14} = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad P_{12A} = P_{12B} = \frac{1}{3} \\
&\qquad P_{12} = P_{12A} + P_{12B} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{6.582}$$

Za 2. prekat velja:

$$\begin{aligned}
&P_{23} = P_{21A} = P_{21B} \\
&P_{23} + P_{21A} + P_{21B} = 1 \\
&P_{23} + P_{23} + P_{23} = 1 \Rightarrow \quad P_{23} = \frac{1}{3} \\
&P_{21A} = P_{21B} = \frac{1}{3} \\
&P_{21} = P_{21A} + P_{21B} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{6.583}$$

Za 3. prekat velja:

$$\left.\begin{aligned} P_{34}+P_{32}&=1 \\ P_{34}&=P_{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P_{34}=P_{32}=\frac{1}{2} \tag{6.584}$$

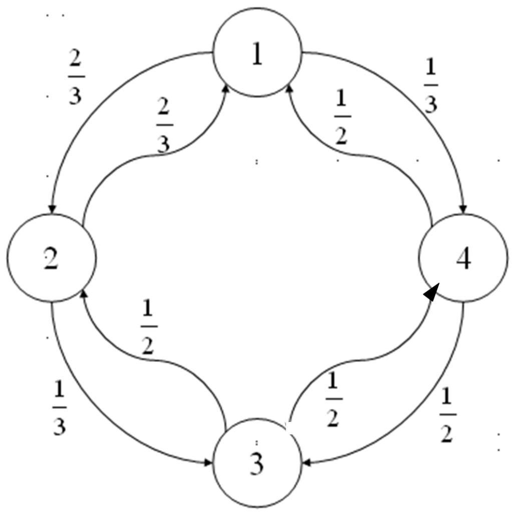
Za 4. prekat velja:

$$\left.\begin{aligned} P_{43}+P_{41}&=1 \\ P_{43}&=P_{41} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P_{43}=P_{41}=\frac{1}{2} \tag{6.585}$$

Dobimo naslednjo prehodno matriko:

$$P=\underbrace{\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\end{array}}_{\Sigma_{PO\ STOLPCIH}=1}=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \tag{6.586}$$

Avtomat pa je prikazan na sliki 6.65.



Slika 6.65.:Avtomat za gibanje miške v zaboju s prekati

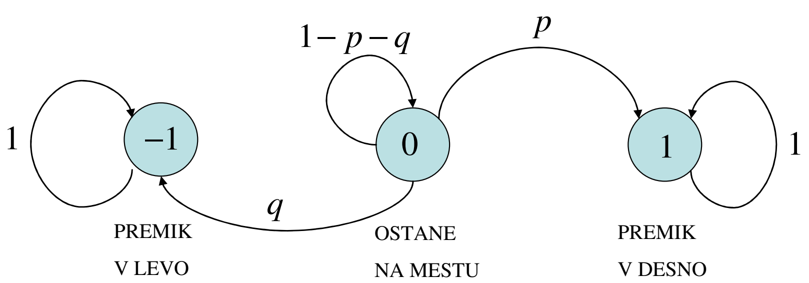
<u>Primer 10</u>: Opravka imamo z vinjenim človekom. Verjetnost, da se premakne v desno, je p, v levo je q, da ostane na mestu, pa je $1-p-q$. Modelirajte njegovo gibanje s pomočjo Markovskih verig. Obravnavajte primera za čas $t \le 1$ in $t \le 2$, pri čemer ob vsaki časovni enoti t naredi premik. Vzemite, da ob $t = 0$ stoji na mestu.
a) Narišite avtomat.
b) Določite prehodno matriko in izračunajte vektor verjetnosti ob končnem času. Verificirajte rezultat z drevesom.
c) Izračunajte matematično upanje za čas t=1 oz. časa t=1 in t=2.

<u>1. Model za čas $t \le 1$</u>:

Prostor stanj je naslednji:

$$x_t = \left\{ \underbrace{-1}_{\substack{\text{en korak}\\ \text{levo}}},\ 0,\ \underbrace{1}_{\substack{\text{en korak}\\ \text{desno}}} \right\} \text{ - } \textit{zaloga vrednosti stanj} \tag{6.587}$$

a) Avtomat je prikazan na sliki 6.66, kjer sta -1 in 1 absorbcijski stanji.

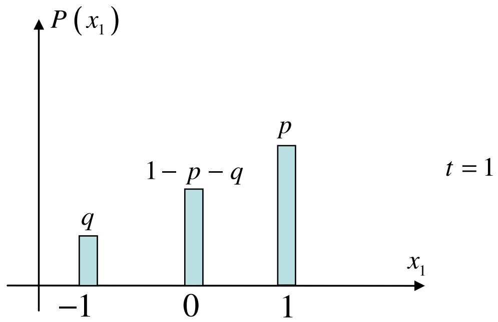


Slika 6.66.:Avtomat za gibanje vinjenega človeka, primer za $t \le 1$

b) Tvorimo še naslednje izraze (glej sliko 6.67):

$$P(\underline{x}_0) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \qquad \underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & q & 0 \\ 0 & 1-p-q & 0 \\ 0 & p & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.588}$$

$$\underline{P}(x_1) = \underline{\underline{P}} \cdot P(\underline{x}_0) = \underline{\underline{P}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 1-p-q \\ p \end{bmatrix} \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$



Slika 6.67.:Porazdelitev verjetnosti za t=1.

c) Matematično upanje za čas t=1 je enako:

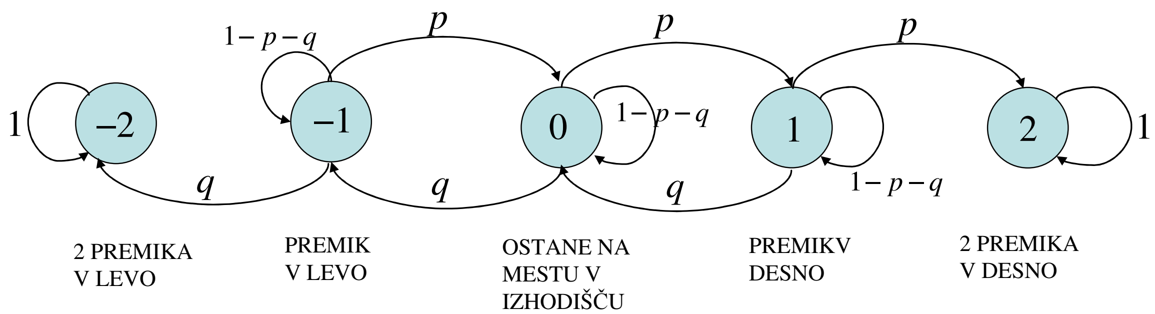
$$E(x_1)=\sum_{i=-1}^{1} x_i \times P(x_1=i) = -1\times q + 0\times(1-p-q)+1\times p = \overbrace{(p-q)\times 1}^{t=1} \qquad (6.589)$$

<u>2. Model za čas</u> $t \le 2$:

Prostor stanj je naslednji:

$$x_t = \left\{ \underbrace{-2}_{\text{dva koraka levo}},\ -1,\ 0,\ 1,\ \underbrace{2}_{\text{dva koraka desno}} \right\} \text{- zaloga vrednosti stanj} \qquad (6.590)$$

a) Avtomat je prikazan na sliki 6.68, kjer sta -2 in 2 absorbcijski stanji.



Slika 6.68.:Avtomat za gibanje vinjenega človeka, primer za $t \le 2$

b) Prehodna matrika je:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p-q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.591}$$

Začetni vektor verjetnosti je:

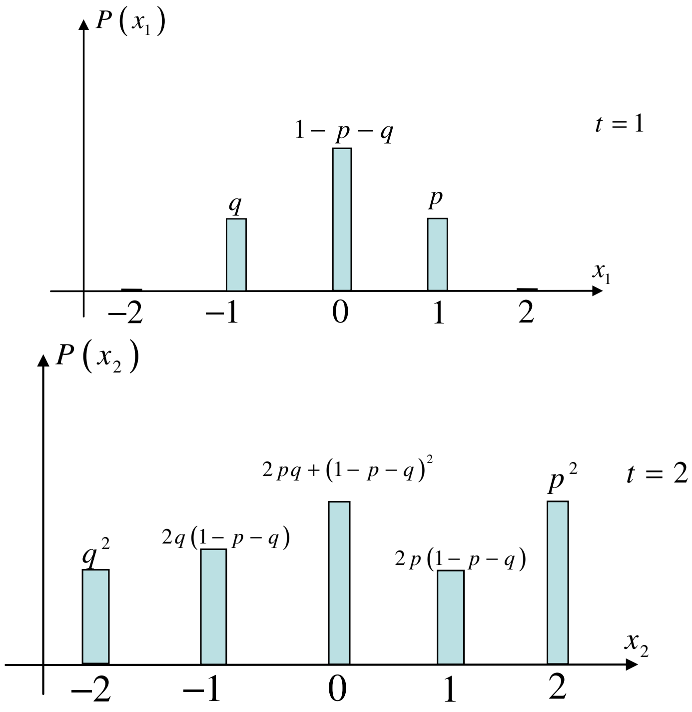
$$\underline{P}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -2 \\ -1 \\ 0 \} \text{Na začetku je v izhodišču.} \\ 1 \\ 2 \end{array} \tag{6.592}$$

Tvorimo izraze (glej sliko 6.69):

$$\underline{P}(x_1) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p-q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 1-p-q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\underline{P}(x_2) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{P}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p-q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 1-p-q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.593}$$

$$\underline{P}(x_2) = \begin{bmatrix} q^2 \\ 2q(1-p-q) \\ 2pq+(1-p-q)^2 \\ 2p(1-p-q) \\ p^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

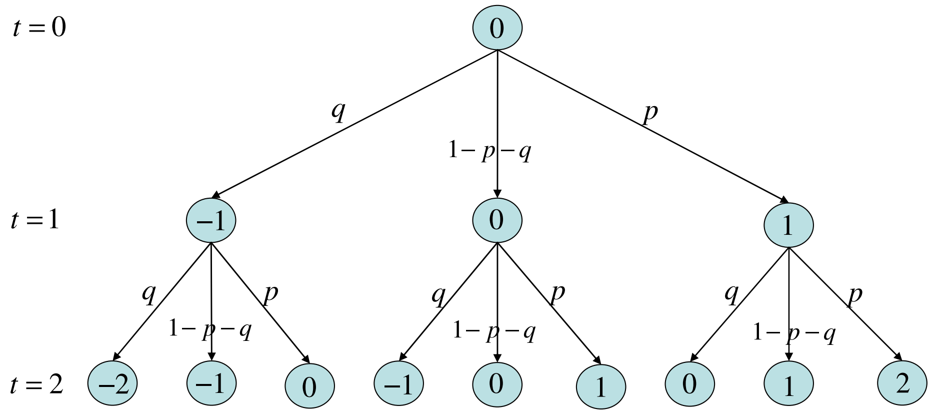


Slika 6.69.:Porazdelitev verjetnosti za t=1 in t=2.

c) Matematično upanje za časa t=1 in t=2 je enako:

$$
\begin{aligned}
& x_1 \in \{-2,-1,0,1,2\} \\
& E(x_1) = \sum_{i=-2}^{2} i \times P(x_1 = i) = -2\times 0 - 1\times q + 0\times(1-p-q) + \\
& \qquad\qquad +1\times p + 2\times 0 = (p-q)\times \overbrace{1}^{t=1} \\
& E(x_2) = \sum_{i=-2}^{2} i \times P(x_2 = i) = -2\times q^2 - 1\times 2q(1-p-q) + \\
& \qquad\qquad +\underbrace{0\times\left[2pq+(1-p-q)^2\right]}_{0} + \\
& \qquad\qquad +1\times 2p(1-p-q) + 2\times p^2 = \\
& \qquad\qquad = 2\left(p^2-q^2\right) + (1-p-q)\times 2(p-q) = \\
& \qquad\qquad = 2(p-q)\times[p+q+1-p-q] = 2(p-q)
\end{aligned}
\tag{6.594}
$$

Verificirajmo rezultate v (6.593) še z drevesom (glej sliko 6.70).



Slika 6.70.:Drevo za gibanje vinjenega človeka, primer za $t \le 2$

Na osnovi slike 6.70. lahko zapišemo:

$$
\begin{aligned}
&P(x_2=-2)=q^2\\
&P(x_2=-1)=q(1-p-q)+(1-p-q)q=2q(1-p-q)\\
&P(x_2=\ 0)=pq+(1-p-q)^2+pq=2pq+(1-p-q)^2\\
&P(x_2=\ 1)=p(1-p-q)+(1-p-q)p=2p(1-p-q)\\
&P(x_2=\ 2)=p^2
\end{aligned}
\tag{6.595}
$$

Dobimo isto kot prej!

Na koncu si poglejmo, kako bi izračunali rezultate s pomočjo Matlaba. V ta namen potrebujemo tudi uporabo Symbolic Toolboxa in datoteke **inline2sym.m**, pridobljene na MathWorks File Exchange (deluje za verzijo ≥ 7.1). Uporabimo program markov2.m, ki ima naslednjo obliko:

```
% markov2.m
%
% primer postavitve (pijani mozak):
% primer postavitve za P:  inline('[1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]','p','q')
% primer postavitve za p0: inline('[0; 0; 1; 0; 0;]')
% primer postavitve za st: inline('[-2; -1; 0; 1; 2;]')
%
% klice funkcijo inline2sym, dobljeno na file exchange

clear
clc
close all

syms p q

ch = input('Zelis tudi numericni izracun (primer pijanec) 1-DA,0-NE')
if ch == 1
   pn = input('pn=')
   qn=input('qn=')
end

% Setup prehodne matrike:
P = input('Vnesi prehodno matriko P na način: inline(''[s 0;0 s]'',''s'') enojni narek')
P = inline2sym(P)
if ch == 1
   Ps = subs(P,p,pn);
   Ps = subs(Ps,q,qn)
end


% Setup max. casa:
tmax = input('Vnesi tmax');

% Setup zacetnega vektorja:
p0 = input('Vnesi zacetni vektor na način: inline(''[s; 0]'',''s'') enojni narek')
p0 = inline2sym(p0)

% Setup vektorja stanj:
st = input('Vnesi vektor stanj na način: inline(''[s; 0]'',''s'') enojni narek')    %zaloga vrednosti za stanja
st = inline2sym(st)
x = st;

% generacija simbolicnih casovnih vektorjev verjetnosti in mat. upanja za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
    disp(['izpis za cas: ' num2str(i)])
    pt=P*p0
    E(i) = x'*pt;      % pricakovana vrednost za case t = 1,2,...,tmax
    if ch == 1
       pts = subs(pt,p,pn);
       pts = subs(pts,q,qn)
       Es = subs(E(i),p,pn);
       Es = subs(Es,q,qn)
    end
    p0 = pt;
end

disp('Izpis koncnega vektorja verj. in cas.sprem. E(t):')
pt
E=simplify(E)
```

Izpis komandnega okna ob klicu programa markov2.m je naslednji:

```
Zelis tudi numericni izracun (primer pijanec) 1-DA,0-NE   0

ch =
    0

Vnesi prehodno matriko P na način: inline("[s 0;0 s]","s") enojni narek
                                              inline('[1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]','p','q')

P =
    Inline function:
    P(p,q) = [1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]

P =

[ 1,         q,           0,           0,           0]
[ 0, 1 - q - p,           q,           0,           0]
[ 0,         p,   1 - q - p,           q,           0]
[ 0,         0,           p,   1 - q - p,           0]
[ 0,         0,           0,           p,           1]

Vnesi tmax    2

Vnesi zacetni vektor na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek    inline('[0; 0; 1; 0; 0;]')

p0 =
    Inline function:
    p0(x) = [0; 0; 1; 0; 0;]

p0 =
    0
    0
    1
    0
    0

Vnesi vektor stanj na način: inline("[s; 0]","s") enojni narekinline('[-2; -1; 0; 1; 2;]')

st =
    Inline function:
    st(x) = [-2; -1; 0; 1; 2;]

st =
   -2
   -1
    0
    1
    2

izpis za cas: 1

pt =
        0
        q
 1 - q - p
        p
        0

izpis za cas: 2

pt =
              q^2
     -2*q*(p + q - 1)
 2*p*q + (p + q - 1)^2
     -2*p*(p + q - 1)
              p^2
```

Izpis koncnega vektorja verj. in cas.sprem. E(t):

```
pt =
            q^2
    -2*q*(p + q - 1)
 2*p*q + (p + q - 1)^2
    -2*p*(p + q - 1)
            p^2

 E =
[ p - q, 2*p - 2*q]
```

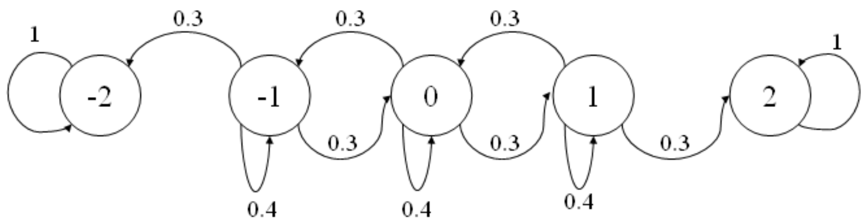
Če primerjamo te rezultate s prejšnjimi analitičnimi izračuni, vidimo, da so popolnoma enaki.

<u>Primer 11</u>: Opravka imamo z vinjenim človekom. Verjetnost, da se premakne v desno, je $p = 0.3$, v levo je $q = 0.3$, da ostane na mestu, pa je $1 - p - q = 0.4$. Modelirate njegovo gibanje s pomočjo Markovskih verig. Obravnavajte primer za čas $t \leq 2$, pri čemer ob vsaki časovni enoti t naredi premik. Vzemite, da ob $t = 0$ stoji na mestu.
a) Narišite avtomat.
b) Določite prehodno matriko in izračunajte vektor verjetnosti ob končnem času. Verificirajte rezultat z drevesom.
c) Izračunajte matematično upanje za časa t=1 in t=2.

Prostor stanj je naslednji:

$$x_t = \left\{ \underbrace{-2,}_{\substack{\textit{dva}\text{ koraka}\\ \text{levo}}} \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \underbrace{2}_{\substack{\textit{dva}\text{ koraka}\\ \text{desno}}} \right\} \text{- } \textit{zaloga vrednosti stanj} \tag{6.596}$$

a) Avtomat je prikazan na sliki 6.71, kjer sta -2 in 2 absorbcijski stanji.



Slika 6.71.:Avtomat za gibanje vinjenega človeka pri času $t \leq 2$

b) Prehodna matrika in začetni vektor verjetnosti sta (glej izraz (6.591)):

$$P = \begin{array}{r} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \end{array}; \quad P(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.597}$$

Tvorimo izraza (glej izraze v (6.593)):

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P \times P(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P(x_2) &= P \times P(x_1) = \begin{bmatrix} 0.3 \cdot 0.3 \\ 2 \cdot 0.3(1-0.3-0.3) \\ 2 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + (1-0.3-0.3)^2 \\ 2 \cdot 0.3(1-0.3-0.3) \\ 0.3 \cdot 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.24 \\ 0.18+0.16 \\ 0.24 \\ 0.09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.24 \\ 0.34 \\ 0.24 \\ 0.09 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.598}$$

c) Matematično upanje za časa t=1 in t=2 je enako:

$$\begin{aligned} &E(x_1) = \sum_{i=-2}^{2} i \times P(x_1 = i) = (-2) \times 0 + (-1) \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0 = 0 \\ &E(x_2) = \sum_{i=-2}^{2} i \times P(x_2 = i) = (-2) \times 0.09 + (-1) \times 0.24 + 0 \times 0.34 + 1 \times 0.24 + 2 \times 0.09 = \\ &= -0.18 - 0.24 + 0.24 + 0.18 = 0 \end{aligned} \tag{6.599}$$

Verificirajmo rezultate še z drevesom (glej izraze). Pri tem ponovno velja slika 6.70. iz prejšnjega primera, le da postavimo $p = 0.3$, $q = 0.3$, ter $1 - p - q = 0.4$. Če upoštevamo izraze iz (6.595), dobimo:

$$
\begin{aligned}
&P(x_2=-2)=q^2=0.3^2=0.09\\
&P(x_2=-1)=q(1-p-q)+(1-p-q)q=2q(1-p-q)=2\cdot 0.3(1-0.3-0.3)=0.24\\
&P(x_2=\ 0)=pq+(1-p-q)^2+pq=2pq+(1-p-q)^2=2\cdot 0.3\cdot 0.3+(1-0.3-0.3)^2=0.34\\
&P(x_2=\ 1)=p(1-p-q)+(1-p-q)p=2p(1-p-q)=2\cdot 0.3(1-0.3-0.3)=0.24\\
&P(x_2=\ 2)=p^2=0.3^2=0.09
\end{aligned}
\tag{6.600}
$$

Na koncu si poglejmo, kako bi izračunali rezultate s pomočjo Matlaba. Uporabimo program markov2.m, pri čemer je izpis komandnega okna ob klicu tega programa naslednji:

```
Zelis tudi numericni izracun (primer pijanec) 1-DA,0-NE1

ch =
    1

pn=0.3
pn =
   0.3000

qn=0.3
qn =
   0.3000

Vnesi prehodno matriko P na način: inline("[s 0;0 s]","s") enojni narek
                             inline('[1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]','p','q')

P =
    Inline function:
    P(p,q) = [1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]

P =
[ 1,         q,         0,         0, 0]
[ 0, 1 - q - p,         q,         0, 0]
[ 0,         p, 1 - q - p,         q, 0]
[ 0,         0,         p, 1 - q - p, 0]
[ 0,         0,         0,         p, 1]

Ps =
   1.0000    0.3000         0         0         0
        0    0.4000    0.3000         0         0
        0    0.3000    0.4000    0.3000         0
        0         0    0.3000    0.4000         0
        0         0         0    0.3000    1.0000

Vnesi tmax      2
Vnesi zacetni vektor na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek      inline('[0; 0; 1; 0; 0;]')
```

```
p0 =
   Inline function:
   p0(x) = [0; 0; 1; 0; 0;]

p0 =
   0
   0
   1
   0
   0

Vnesi vektor stanj na način: inline("[s; 0]","s") enojni narekinline('[-2; -1; 0; 1; 2;]')

st =
   Inline function:
   st(x) = [-2; -1; 0; 1; 2;]

st =
  -2
  -1
   0
   1
   2

izpis za cas: 1
pt =
      0
      q
 1 - q - p
      p
      0

pts =
      0
  0.3000
  0.4000
  0.3000
      0

Es =
   0

izpis za cas: 2

pt =
              q^2
    -2*q*(p + q - 1)
 2*p*q + (p + q - 1)^2
    -2*p*(p + q - 1)
              p^2
```

pts =

0.0900

0.2400

0.3400

0.2400

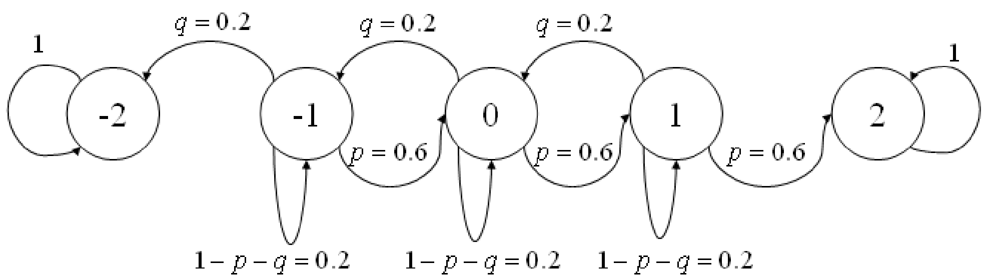
0.0900

Es =

1.1102e-16

<u>Primer 12</u>: Opravka imamo z vinjenim človekom. Verjetnost, da se premakne v desno, je $p=0.6$, v levo je $q=0.2$, da ostane na mestu, pa je $1-p-q=0.2$. Modelirate njegovo gibanje s pomočjo Markovskih verig. Obravnavajte primer za čas $t\leq 2$, pri čemer ob vsaki časovni enoti t naredi premik. Vzemite, da ob $t=0$ stoji na mestu.
a) Narišite avtomat.
b) Določite prehodno matriko in izračunajte vektor verjetnosti ob končnem času.
c) Izračunajte matematično upanje za časa t=1 in t=2.

a) Avtomat je prikazan na sliki 6.72, kjer sta -2 in 2 absorbcijski stanji.



Slika 6.72.:Avtomat za gibanje vinjenega človeka pri času $t\leq 2$

b) Prehodna matrika je (glej izraz (6.591)):

$$P=\begin{array}{r} -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-p-q & q & 0 & 0\\ 0 & p & 1-p-q & q & 0\\ 0 & 0 & p & 1-p-q & 0\\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Vsota po stolpcih je 1.}} \qquad (6.601)$$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Tvorimo izraze (glej izraze v (6.593)):

$$P=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 1\end{bmatrix}}_{\text{Vsota po stolpcih je 1.}};\qquad P(x_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$P(x_1)=P\times P(x_0)=\begin{bmatrix}0\\0.2\\0.2\\0.6\\0\end{bmatrix} \tag{6.602}$$

$$P(x_2)=P\times P(x_1)=\begin{bmatrix}0.2\times0.2\\ 0.2\times0.2+0.2\times0.2\\ 0.6\times0.2+0.2\times0.2+0.2\times0.6\\ 0.6\times0.2+0.2\times0.6\\ 0.6\times0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.04\\0.08\\0.28\\0.24\\0.36\end{bmatrix}$$

c) Matematično upanje za časa t=1 in t=2 je enako:

$$E(x_1)=\sum_{i=-2}^{2} i\times P(x_1=i)=(-2)\times0+(-1)\times0.2+0\times0.2+1\times0.6+2\times0=0.4$$
$$E(x_2)=\sum_{i=-2}^{2} i\times P(x_2=i)=(-2)\times0.04+(-1)\times0.08+0\times0.28+1\times0.24+2\times0.36=0.8 \tag{6.603}$$

Na koncu si poglejmo, kako bi izračunali rezultate s pomočjo Matlaba. Uporabimo program markov2.m, pri čemer je izpis komandnega okna ob klicu tega programa naslednji:

```
Zelis tudi numericni izracun (primer pijanec) 1-DA,0-NE1

ch =

    1

pn=0.6
pn =

   0.6000

qn=0.2
qn =

   0.2000

Vnesi prehodno matriko P na način: inline("[s 0;0 s]","s") enojni narek
                         inline('[1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]','p','q')

P =

     Inline function:
     P(p,q) = [1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0 0 p 1]
```

```
P =

[ 1,        q,        0,        0, 0]
[ 0, 1 - q - p,        q,        0, 0]
[ 0,        p, 1 - q - p,        q, 0]
[ 0,        0,        p, 1 - q - p, 0]
[ 0,        0,        0,        p, 1]

Ps =

    1.0000    0.2000         0         0         0
         0    0.2000    0.2000         0         0
         0    0.6000    0.2000    0.2000         0
         0         0    0.6000    0.2000         0
         0         0         0    0.6000    1.0000

Vnesi tmax  2
Vnesi zacetni vektor na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek    inline('[0; 0; 1; 0; 0;]')

p0 =
     Inline function:
     p0(x) = [0; 0; 1; 0; 0;]


p0 =
     0
     0
     1
     0
     0

Vnesi vektor stanj na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek      inline('[-2; -1; 0; 1; 2;]')

st =
     Inline function:
     st(x) = [-2; -1; 0; 1; 2;]


st =
    -2
    -1
     0
     1
     2

izpis za cas: 1

pt =

         0
         q
 1 - q - p
         p
         0


pts =

         0
    0.2000
    0.2000
    0.6000
         0

Es =
    0.4000

izpis za cas: 2

pt =

                q^2
     -2*q*(p + q - 1)
 2*p*q + (p + q - 1)^2
     -2*p*(p + q - 1)
                p^2
```

pts =
0.0400
0.0800
0.2800
0.2400
0.3600

Es =
0.8000

<u>Primer 13</u>: *Vsako sekundo mečemo kovanec. Če pade pismo, dobimo 1 Evro, če pade glava, ga izgubimo. Začnemo z 2 Evra. Če pridemo na 0 ali 4 Evre, se igra konča. Kolikšna je verjetnost, da se bo igra končala pri* $t \leq 4$ *sekunde z izgubo (v 4 sekundah ali manj), torej, da smo po 4 rundah izgubili (padli na 0)?*

a) Narišite avtomat in določite prehodno matriko.

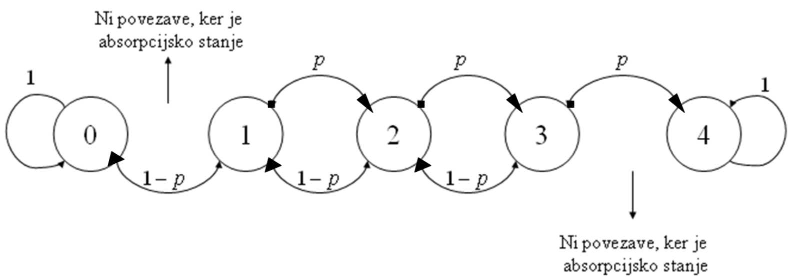
b) Opravite analitične izračune.

c) Izračunajte še s pomočjo drevesa.

Definirajmo:

$$\begin{aligned}
&p = && \text{verjetnost, da dobimo 1 Evro,}\\
&1-p = && \text{verjetnost, da izgubimo 1 Evro.}\\
&x_0 = 2\ Evra && (t=0),\\
&x_i = && \text{vsota denarja v trenutku } i\\
&\text{Stanja} = && \{0,1,2,3,4\} \text{ Eure}
\end{aligned} \tag{6.604}$$

a) Avtomat je prikazan na sliki 6.73.



Slika 6.73.:Avtomat za metanje kovanca pri $t \leq 4$

Prehodna matrika ima obliko:

$$P=\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1-p & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 1-p & 0\\ 0 & 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & P_{20} & P_{30} & P_{40}\\ P_{01} & P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41}\\ P_{02} & P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42}\\ P_{03} & P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43}\\ P_{04} & P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \tag{6.605}$$
$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

b) Analitični izračuni so:

Najprej postavimo začetni vektor verjetnosti: $P(x_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

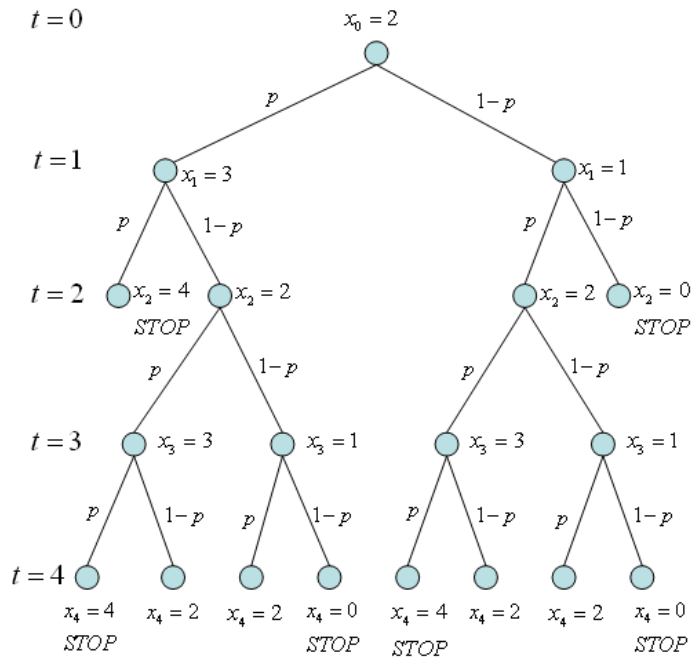
Nato lahko tvorimo naslednje izraze:

$$P(x_1)=P\times P(x_0)=\begin{bmatrix} 0\\ 1-p\\ 0\\ p\\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4 \end{array} \quad P(x_2)=P\times P(x_1)=\begin{bmatrix} (1-p)^2\\ 0\\ 2p(1-p)\\ 0\\ p^2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4 \end{array}$$

$$P(x_3)=P\times P(x_2)=\begin{bmatrix} (1-p)^2\\ 2p(1-p)^2\\ 0\\ 2p^2(1-p)\\ p^2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4 \end{array} \tag{6.606}$$

$$P(x_4)=P\times P(x_3)=\begin{bmatrix} (1-p)^2+2p(1-p)^3\\ 0\\ 2p^2(1-p)^2\times 2\\ 0\\ 2p^3(1-p)+p^2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4 \end{array}$$

c) Slika 6.74. prikazuje drevo za ta primer.



Slika 6.74.:Drevo za metanje kovanca pri $t \le 4$

Na osnovi slike 6.74. lahko tvorimo naslednje izraze:

$$
\begin{aligned}
&P(x_4=0)=p(1-p)^3+p(1-p)^3=2p(1-p)^3+(1-p)^2\\
&P(x_4=1)=0\\
&P(x_4=2)=p^2(1-p)^2+p^2(1-p)^2+p^2(1-p)^2+p^2(1-p)^2=4p^2(1-p)^2\\
&P(x_4=3)=0\\
&P(x_4=4)=p^2+p^3(1-p)+p^3(1-p)=p^2+2p^3(1-p)
\end{aligned}
\tag{6.607}
$$

V primerih, da se igra ustavi že pred iztekom 4 sekund (konkretno pri t = 2 sek), seveda pri t=4 upoštevamo rezultate za delne verjetnosti, ki smo jih dobili že ob ustavitvi (pri t = 2). Če dobljene verjetnosti v (6.607) primerjamo z analitičnim izračunom (izraz (6.606)), vidimo, da smo dobili enake rezultate. Očitno je verjetnost, da smo po štirih rundah izgubili (ostali na 0 Evrih), enaka:

$$P(x_4=0)=p(1-p)^3+p(1-p)^3=2p(1-p)^3+(1-p)^2 \tag{6.608}$$

Na koncu si poglejmo, kako bi izračunali rezultate s pomočjo Matlaba. Uporabimo program markov3.m, ki ima obliko:

```
% markov3.m
%
% test za primer 13 poglavja 6.6 SPL
%

clear
clc
close all

syms p

% Setup prehodne matrike:
P =[1 1-p 0 0 0;0 0 1-p 0 0;0 p 0 1-p 0; 0 0 p 0 0; 0 0 0 p 1]

% Setup max. casa:
tmax = 4;

% Setup zacetnega vektorja:
p0 = [0; 0; 1; 0; 0;]

% Setup vektorja stanj:
st = [0 1 2 3 4]   %zaloga vrednosti za stanja
x = st;      % vektor stanj

% generacija simbolicnih casovnih vektorjev verjetnosti:

for i = 1:tmax
   disp(['izpis za cas: ' num2str(i)])
   pt=P*p0
   p0 = pt;
end

disp('Izpis koncnega vektorja verj.:')
pt
```

pri čemer je izpis komandnega okna ob klicu tega programa naslednji:

```
P =

[   1, 1-p,   0,   0,   0]
[   0,   0, 1-p,   0,   0]
[   0,   p,   0, 1-p,   0]
[   0,   0,   p,   0,   0]
[   0,   0,   0,   p,   1]

p0 =
    0
    0
    1
    0
    0

st =

    0     1     2     3     4

izpis za cas: 1
pt =
  0
 1-p
  0
  p
  0

izpis za cas: 2
pt =
  (1-p)^2
       0
 2*p*(1-p)
```

```
      0
     p^2

izpis za cas: 3
pt =
    (1-p)^2
 2*(1-p)^2*p
        0
 2*p^2*(1-p)
       p^2

izpis za cas: 4
pt =
 (1-p)^2+2*(1-p)^3*p
              0
     4*p^2*(1-p)^2
              0
    2*p^3*(1-p)+p^2

Izpis koncnega vektorja verj.:
pt =
 (1-p)^2+2*(1-p)^3*p
              0
     4*p^2*(1-p)^2
              0
    2*p^3*(1-p)+p^2
```

6.6.2 Praktični primeri

<u>Primer 14 (primer zalog)</u>: V neki trgovini ne želijo imeti več kot 4 enote določenega blaga na zalogi. Da bi nadomestili prodane enote v enem tednu, naročijo na začetku vsakega tedna toliko enot, kolikor jih manjka do 4 enote. Dobavni rok za to blago je 1 teden. Kakšna je po daljšem času verjetnost, da skladišče nima na začetku nobene enote blaga na zalogi? Kakšna je po daljšem času verjetnost, da ima skladišče na zalogi 4 enote blaga?

Definirajmo naslednji spremenljivki:

X = {število kosov na zalogi na začetku tedna}

Y = {število kosov, prodanih v tednu} (6.609)

Definiramo lahko tudi tabelo, podano na sliki 6.75.

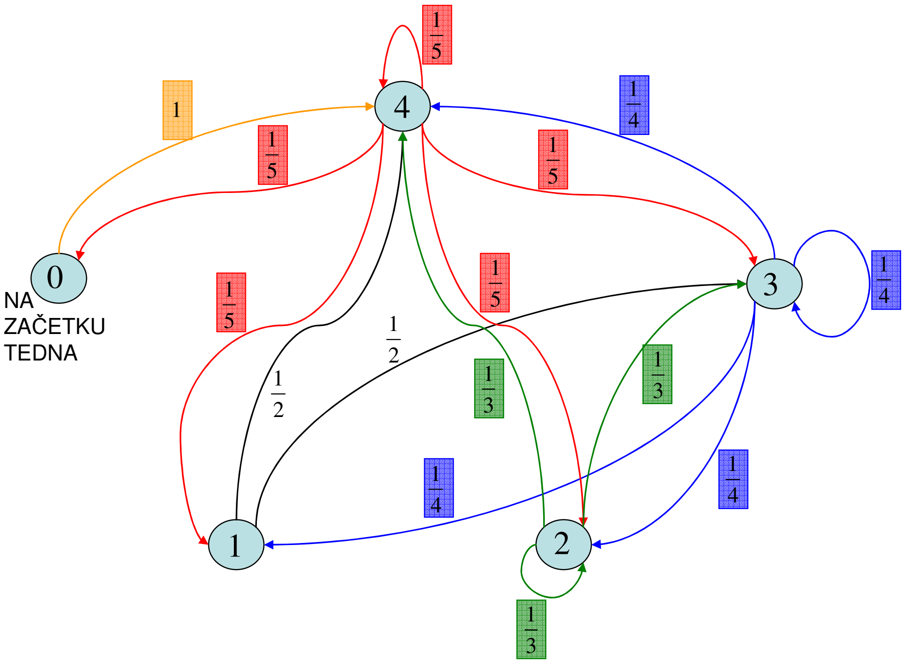
Število enot na zalogi (X)	Verjetnost za število kosov, prodanih v tednu (Y)	Število kosov, naročenih na začetku tedna, ki prispejo na koncu tedna	Možna bilanca na koncu tedna
4	$0,1,2,3,4 \rightarrow P=\frac{1}{5}$	*0*	$(0+0),(1+0),(2+0),(3+0),(4+0)$
3	$0,1,2,3 \rightarrow P=\frac{1}{4}$	*1*	$(1+0),(1+1),(2+1),(3+1)$
2	$0,1,2 \rightarrow P=\frac{1}{3}$	*2*	$(2+0),(2+1),(2+2)$
1	$0,1 \rightarrow P=\frac{1}{2}$	*3*	$(3+0),(3+1)$
0	$0 \rightarrow P=1$	*4*	$(4+0)$

Slika 6.75.:Tabela za problem zalog

Stanja definiramo na naslednji način (število enot na zalogi):

$$S = \{0,1,2,3,4\}\ \textit{kosov} \qquad (6.610)$$

Avtomat ima obliko, ki je prikazana na sliki 6.76.



Slika 6.76.:Avtomat za problem zalog

Prehodna matrika ima obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.611)$$

Če bi želeli izračunati, kakšne so po daljšem času verjetnosti (v stacionarnem stanju), bi morali seveda uporabiti izraz (4.31) ter rešiti dotični sistem enačb. Lahko pa si pomagamo tudi z uporabo Matlaba, pri čemer npr. pokličemo program **markov1.m**, ter postavimo dovolj velik čas. Če npr. postavimo čas t = 10, bomo dobili naslednji izpis v komandnem oknu, če vzamemo primer, da so na začetku opazovanja (t = 0) na zalogi 4 enote:

Vnesi prehodno matriko P [0 0 0 0 0.2;0 0 0 0.25 0.2; 0 0 1/3 0.25 0.2;0 0.5 1/3 0.25 0.2;1 0.5 1/3 0.25 0.2]

P =

0	**0**	**0**	**0**	**0.2000**
0	**0**	**0**	**0.2500**	**0.2000**
0	**0**	**0.3333**	**0.2500**	**0.2000**
0	**0.5000**	**0.3333**	**0.2500**	**0.2000**
1.0000	**0.5000**	**0.3333**	**0.2500**	**0.2000**

Vnesi tmax 10
Vnesi zacetni vektor p0 [0 0 0 0 1]'

p0 =

0
0
0
0
1

Vnesi vektor stanj [0 1 2 3 4]

st =

0 1 2 3 4

Izpis vektorja verj. z decimalkami:

pt =

1.0000	**0.2000**	**0.2000**	**0.2000**	**0.2000**	**0.2000**
2.0000	**0.0400**	**0.0900**	**0.1567**	**0.2567**	**0.4567**
3.0000	**0.0913**	**0.1555**	**0.2077**	**0.2527**	**0.2927**
4.0000	**0.0585**	**0.1217**	**0.1910**	**0.2687**	**0.3600**
5.0000	**0.0720**	**0.1392**	**0.2028**	**0.2637**	**0.3223**
6.0000	**0.0645**	**0.1304**	**0.1980**	**0.2676**	**0.3396**
7.0000	**0.0679**	**0.1348**	**0.2008**	**0.2660**	**0.3305**
8.0000	**0.0661**	**0.1326**	**0.1995**	**0.2669**	**0.3349**
9.0000	**0.0670**	**0.1337**	**0.2002**	**0.2665**	**0.3326**
10.0000	**0.0665**	**0.1331**	**0.1999**	**0.2667**	**0.3337**

Po daljšem času dobimo torej naslednje verjetnost za zasedbo stanj:

$$\begin{aligned}
P(x_{10} = 0) &= 0.0665 \sim \frac{1}{15} \\
P(x_{10} = 1) &= 0.1331 \sim \frac{2}{15} \\
P(x_{10} = 2) &= 0.1999 \sim \frac{3}{15} \\
P(x_{10} = 3) &= 0.2667 \sim \frac{4}{15} \\
P(x_{10} = 4) &= 0.3337 \sim \frac{5}{15}
\end{aligned} \tag{6.612}$$

Torej je po daljšem času verjetnost, da na zalogi ne bo nobenega kosa, enaka 0.0665, verjetnost, da bodo na zalogi 4 kosi, pa je enaka 0.3337.

<u>Primer 15 (primer transporta)</u>: *Helikopter, ki lahko prevaža poleg pilota še enega potnika, povezuje letališče* A *z dvema dislociranima obratoma* B_1 in B_2 *nekega podjetja. Lokacije* A, B_1 in B_2 *so razporejene tako, da traja polet na relacijah* $A-B_1$, $A-B_2$ *in* B_1-B_2 *20 min. Helikopter starta na začetku 20 min intervalov. Če potnik že čaka, ga helikopter vzame in takoj vzleti. Če potnika še ni, helikopter čaka 20 min in vzleti na začetku naslednjega 20 minutnega intervala, če je potnik že prišel. Sicer čaka naslednjih 20 min, itn. Če medtem, ko potnik že čaka, pride še nov potnik, slednji poišče drug način prevoza. Verjetnost, da potnik na določeni lokaciji čaka na helikopter, je:*

Lokacija	A	B_1	B_2
Verjetnost	*0.8*	*0.6*	*0.45*

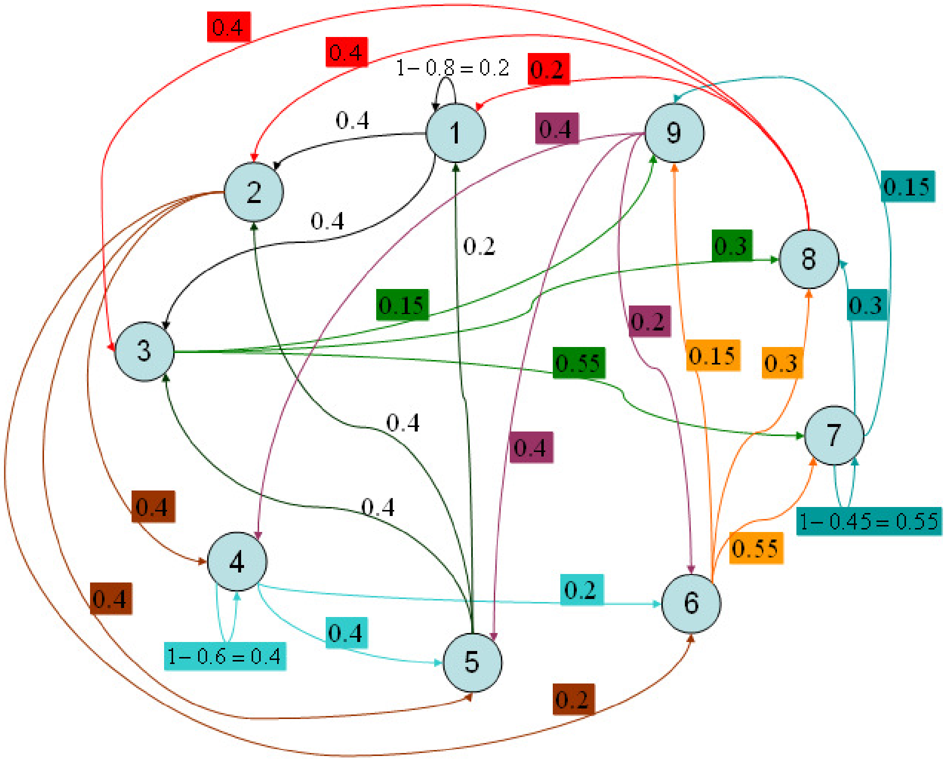
Verjetnost, da se potnik na lokaciji A *odloči za* B_1 ali B_2, *je enaka. Če pa je na lokaciji* B_1 ali B_2, *je pa dvakrat večja verjetnost, da se odloči za lokacijo* A.

Narišite avtomat in določite prehodno matriko, ki opisuje ta proces. Če je na začetku avtomat v stanju 1 (helikopter čaka na lokaciji A), kakšna bo porazdelitev verjetnosti po treh 20 minutnih časovnih intervalih? Kakšna je po daljšem času verjetnost za zasedbo posameznih stanj.

Najprej definirajmo stanja:

$$
\begin{aligned}
&\textit{1.}\quad \text{Helikopter čaka v } A \left\{ \begin{array}{l} \text{potnika ni} \Rightarrow P = 1-0.8 = 0.2 \\ \text{potnik je} \Rightarrow P = 0.4 \text{ , da gre v } B_1 \text{ ali } B_2 \end{array} \right. \\
&2.\quad \textit{Prelet iz } A \to B_1 \\
&3.\quad \textit{Prelet iz } A \to B_2 \\
&4.\quad \textit{Helikopter čaka v } B_1 \\
&5.\quad \textit{Prelet iz } B_1 \to A \\
&6.\quad \textit{Prelet iz } B_1 \to B_2 \\
&7.\quad \textit{Helikopter čaka v } B_2 \\
&8.\quad \textit{Prelet iz } B_2 \to A \\
&9.\quad \textit{Prelet iz } B_2 \to B_1
\end{aligned}
\tag{6.613}
$$

Slika 6.77. prikazuje avtomat za dani primer.



Slika 6.77.:Avtomat za problem preletov helikopterja

Prehodna matrika pa ima naslednjo obliko:

$$
\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\
0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\
0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\
0 & 0 & 0.55 & 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0.15 & 0.15 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (6.614)
$$

Začetni vektor verjetnosti je:

$$\underline{P}\left(x_0\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}1 \rightarrow \text{Na začetku je v stanju 1.}\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array} \qquad (6.615)$$

Če hočemo izračunati porazdelitev verjetnosti po treh 20 minutnih časovnih intervalih, moramo tvoriti izraze:

$$\begin{aligned}\underline{P}\left(x_1\right)&=\underline{\underline{P}}\cdot\underline{P}\left(x_0\right)\\ \underline{P}\left(x_2\right)&=\underline{\underline{P}}\cdot\underline{P}\left(x_1\right)\\ \underline{P}\left(x_3\right)&=\underline{\underline{P}}\cdot\underline{P}\left(x_2\right)\end{aligned} \qquad (6.616)$$

Pri tem izračunu si lahko pomagamo tudi z uporabo Matlaba, pri čemer npr. pokličemo program **markov4.m**, ki ima naslednjo obliko:

```
% markov4.m
%
% primer za helikopter z 9 stanji
%

clear
clc
close all

P = [0.2 0.0 0.0  0.0 0.2 0.0  0.0  0.2 0.0;...
     0.4 0.0 0.0  0.0 0.4 0.0  0.0  0.4 0.0;...
     0.4 0.0 0.0  0.0 0.4 0.0  0.0  0.4 0.0;...
     0.0 0.4 0.0  0.4 0.0 0.0  0.0  0.0 0.4;...
     0.0 0.4 0.0  0.4 0.0 0.0  0.0  0.0 0.4;...
     0.0 0.2 0.0  0.2 0.0 0.0  0.0  0.0 0.2;...
     0.0 0.0 0.55 0.0 0.0 0.55 0.55 0.0 0.0;...
     0.0 0.0 0.30 0.0 0.0 0.30 0.30 0.0 0.0;...
     0.0 0.0 0.15 0.0 0.0 0.15 0.15 0.0 0.0]

tmax = input('Vnesi tmax');
p0 = input('Vnesi zacetni vektor p0')
st = input('Vnesi vektor stanj')    %zaloga vrednosti za stanja
p0_old = p0;
x = st;      % vektor stanj

pt = [];

% generacija casovnih vektorjev verjetnosti za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
   pt1 = P*p0;
   pt = [pt; i pt1'];
   p0 = pt1;
end

disp('Izpis vektorja verj.z decimalkami:')
pt
```

```
% prikaz casovnih vektorjev verjetnosti za t=0,2,3,...,tmax:

figure
bar(x,p0_old,0.2)
str1 = ['P(x0)'];
title(str1)
str2 = ['x0 (t=0)'];
xlabel(str2)
grid
d=axis;
axis([d(1) d(2) d(3) 1])

for i = 1:tmax
   figure
   bar(x,pt(i,2:end),0.2)
   str1 = ['P(x' num2str(i) ')'];
   title(str1)
   str2 = ['x' num2str(i) ' (t=' num2str(i) ')'];
   xlabel(str2)
   grid
   d=axis;
   axis([d(1) d(2) d(3) 1])
end
```

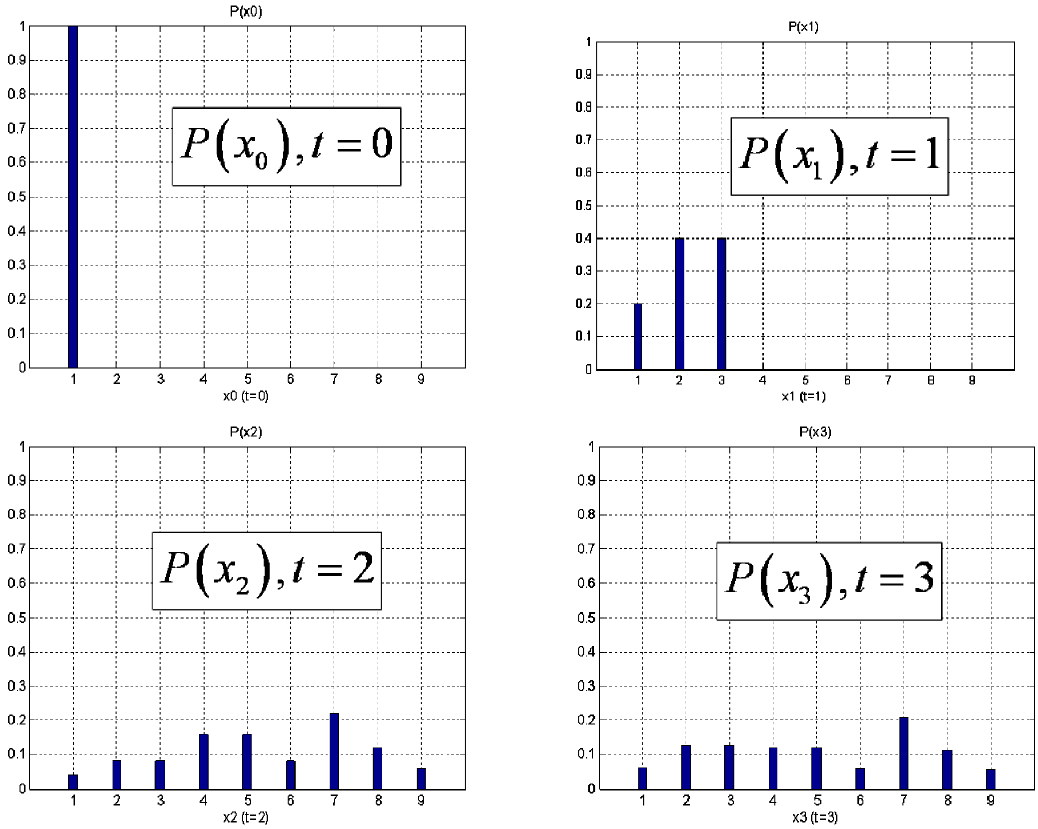
Ko program pokličemo, dobimo naslednjo obliko komandnega okna:

```
P =

  Columns 1 through 8

    0.2000         0         0         0    0.2000         0         0    0.2000
    0.4000         0         0         0    0.4000         0         0    0.4000
    0.4000         0         0         0    0.4000         0         0    0.4000
         0    0.4000         0    0.4000         0         0         0         0
         0    0.4000         0    0.4000         0         0         0         0
         0    0.2000         0    0.2000         0         0         0         0
         0         0    0.5500         0         0    0.5500    0.5500         0
         0         0    0.3000         0         0    0.3000    0.3000         0
         0         0    0.1500         0         0    0.1500    0.1500         0

  Column 9

         0
         0
         0
    0.4000
    0.4000
    0.2000
         0
         0
         0

Vnesi tmax    3
Vnesi zacetni vektor p0     [1 0 0 0 0 0 0 0 0]'

p0 =
     1
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0

Vnesi vektor stanj[1 2 3 4 5 6 7 8 9]

st =
     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Izpis vektorja verj.z decimalkami:

```
pt =

  Columns 1 through 8

   1.0000   0.2000   0.4000   0.4000        0        0        0        0
   2.0000   0.0400   0.0800   0.0800   0.1600   0.1600   0.0800   0.2200
   3.0000   0.0640   0.1280   0.1280   0.1200   0.1200   0.0600   0.2090

  Columns 9 through 10

        0        0
   0.1200   0.0600
   0.1140   0.0570
```

Slika 6.78. prikazuje časovni potek vektorja verjetnosti za čase $t = 0,1,2,3$.

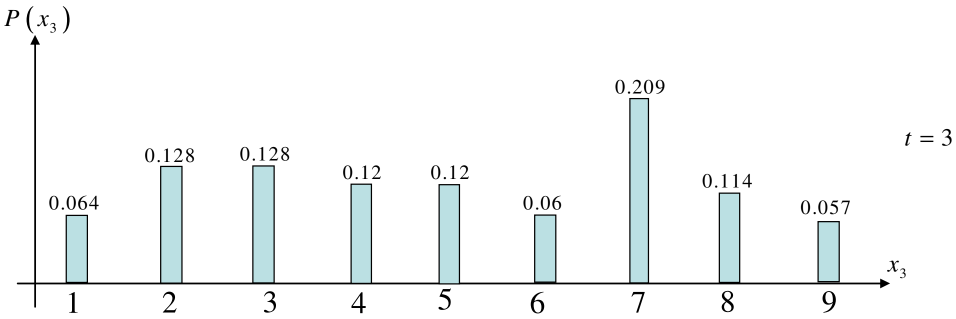


Slika 6.78.: Časovni potek vektorja verjetnosti za čase $t = 0,1,2,3$

Porazdelitev verjetnosti po treh 20 minutnih časovnih intervalih bo torej naslednja:

$$\underline{P}(x_3)^T = [0.064 \quad 0.128 \quad 0.128 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.06 \quad 0.209 \quad 0.114 \quad 0.057] \qquad (6.616)$$

Na pregleden način jo ilustrira slika 6.79.



Slika 6.79.: Porazdelitev verjetnosti po treh 20 minutnih časovnih intervalih

Torej je največja verjetnost, to je 20.9 %, da se bo helikopter po treh 20 minutnih časovnih intervalih nahajal v stanju 7, če je bil na začetku v stanju 1 (je čakal na lokaciji A). Torej je največja verjetnost, da bo helikopter po treh časovnih intervalih čakal na lokaciji B_2.

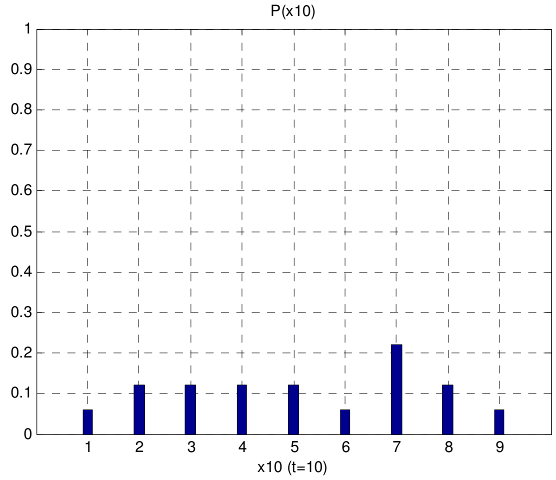
Če bi želeli izračunati, kakšne so po daljšem času verjetnosti (v stacionarnem stanju), bi morali seveda uporabiti izraz (4.31) ter rešiti dotični sistem enačb. Lahko pa si zopet pomagamo z uporabo Matlaba, pri čemer zopet pokličemo program **markov4.m**, ter postavimo dovolj velik čas. Če npr. postavimo čas t = 10, bomo dobili naslednji izpis časovnega poteka vektorja verjetnosti v komandnem oknu, če vzamemo primer, da smo na začetku opazovanja (t = 0) v stanju 1:

```
pt =

  Columns 1 through 8

    1.0000    0.2000    0.4000    0.4000         0         0         0         0
    2.0000    0.0400    0.0800    0.0800    0.1600    0.1600    0.0800    0.2200
    3.0000    0.0640    0.1280    0.1280    0.1200    0.1200    0.0600    0.2090
    4.0000    0.0596    0.1192    0.1192    0.1220    0.1220    0.0610    0.2184
    5.0000    0.0601    0.1203    0.1203    0.1203    0.1203    0.0602    0.2192
    6.0000    0.0600    0.1200    0.1200    0.1201    0.1201    0.0601    0.2198
    7.0000    0.0600    0.1200    0.1200    0.1200    0.1200    0.0600    0.2199
    8.0000    0.0600    0.1200    0.1200    0.1200    0.1200    0.0600    0.2200
    9.0000    0.0600    0.1200    0.1200    0.1200    0.1200    0.0600    0.2200
   10.0000    0.0600    0.1200    0.1200    0.1200    0.1200    0.0600    0.2200

  Columns 9 through 10

         0         0
    0.1200    0.0600
    0.1140    0.0570
    0.1191    0.0596
    0.1196    0.0598
    0.1199    0.0599
    0.1200    0.0600
    0.1200    0.0600
    0.1200    0.0600
    0.1200    0.0600
```

Porazdelitev verjetnosti daljšem času bo torej naslednja:

$$\underline{P}(x_{10})^T = [0.06 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.06 \quad 0.22 \quad 0.12 \quad 0.06] \qquad (6.617)$$

Na pregleden način jo ilustrira slika 6.80.



Slika 6.80.: Porazdelitev verjetnosti po desetih 20 minutnih časovnih intervalih (po daljšem času)

Torej je verjetnost, da helikopter po daljšem času čaka na letališču A, enaka 0.06, da čaka v B_1, je 0.12, da čaka v B_2, pa je 0.22.

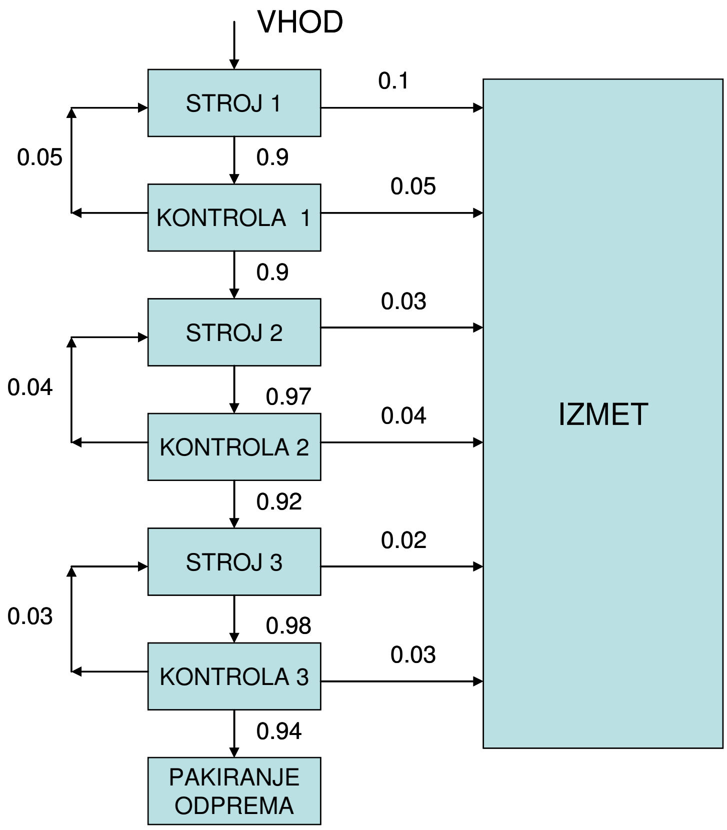
<u>Primer 16 (primer proizvodnega procesa)</u>: Dan imamo proizvodni proces, ki ga prikazuje slika 6.81. Na sliki 6.81. so označene verjetnosti, da gre izdelek v nadaljnjo fazo procesa, ali se vrne v prejšnjo, ali pa gre v izmet.Planirani kumulativni časi T_k, potrebni za izvedbo posameznih faz procesa, so podani v naslednji tabeli:

FAZA PROCESA	T_k **(ČLOVEK x URA)**
Stroj 1	3
Kontrola 1	0.25
Stroj 2	2.5
Kontrola 2	0.25
Stroj 3	1.5
Kontrola 3	0.25

Zanima nas naslednje:

a) Kolikšen delež izdelkov, ki pridejo na vhod procesa, se v povprečju odpremi?

b) Koliko časa se v povprečju potroši za posamezno fazo procesa?



Slika 6.81.: Verjetnosti, da gre izdelek v nadaljnjo fazo proizvodnega procesa, ali se vrne v prejšnjo, ali pa gre v izmet.

Proces lahko obravnavamo kot Markovsko verigo. V ta namen postavimo naslednja stanja verige:

Stanje 1 - Stroj 1
Stanje 2 - Kontrola 1
Stanje 3 - Stroj 2
Stanje 4 - Kontrola 2
Stanje 5 - Stroj 3
Stanje 6 - Kontrola 3 (6.618)
Stanje 7 - Pakiranje in odprema
Stanje 8 - Izmet

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Na osnovi slike 6.81. lahko definiramo prehodno matriko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.05 & 0.03 & 0.04 & 0.02 & 0.03 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.619}$$

Iz izraza (6.619) vidimo, da ima prehodna matrika dve ponorni stanji (7, 8), ter šest minljivih stanj (1, 2, 3, 4, 5, 6). Kot se izkaže, moramo v nadaljevanju najprej poiskati verjetnost za absorbcijo v stanje 7 [12]. V ta namen tvorimo naslednjo matriko [12], ki je podmatrika matrike P:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.620}$$

Nato tvorimo naslednjo matriko [12]:

$$I - Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.97 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.92 & 1 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.98 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.621}$$

Z inverzijo te matrike dobimo takoimenovano fundamentalno matriko. Kot se izkaže, ima naslednjo obliko [12]:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.94 & 1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.88 & 0.98 & 1.04 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.86 & 0.95 & 1.01 & 1.04 & 0 & 0 \\ 0.81 & 0.9 & 0.96 & 0.99 & 1.03 & 0.03 \\ 0.8 & 0.88 & 0.94 & 0.97 & 1.01 & 1.03 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.622}$$

Potrebujemo še eno matriko, ki je tudi podmatrika matrike P:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0.1 & 0.05 & 0.03 & 0.04 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix} \tag{6.623}$$

Tvorimo še produkt $R \cdot N$, pri čemer po izpeljavi dobimo naslednji rezultat [12]:

$$R \cdot N = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.83 & 0.88 & 0.91 & 0.95 & 0.97 \\ 0.25 & 0.17 & 0.12 & 0.09 & 0.05 & 0.03 \end{bmatrix} \tag{6.624}$$

Dokazati se da, da elementi prve vrstice tega produkta pomenijo verjetnosti, da bo izdelek odpremljen, elementi druge vrstice pa verjetnosti izmeta, če izhajamo iz posameznih faz procesa [12]. Na osnovi tega lahko sklepamo, da bo delež izdelkov, ki pridejo na vhod procesa, odpremljen na izhodu procesa, v povprečju enak 75%.

Kot se tudi izkaže, elementi prvega stolpa matrike N pomenijo povprečno število zasedb posameznih stanj [12], ki so v našem primeru posamezne faze procesa, če izhajamo iz prvega stanja. Če te vrednosti pomnožimo z vrednostmi planiranih časov T_k, dobimo dejanske povprečne čase obravnave izdelka, ki je prišel na vhod, v posameznih fazah procesa [12]. Če želimo dobiti še ustrezne čase za izdelek, ki je prišel do izhoda procesa (odprema), pa moramo dejanske povprečne čase obravnave izdelka, ki je prišel na vhod, še deliti z 0.75 [12].

Tako dobimo naslednjo tabelo:

Faza procesa	**Povprečno število zasedb stanj**	**Dejanski povprečni časi obravnave izdelka (gledano iz vhoda) (človek- ura)**	**Dejanski povprečni časi obravnave izdelka (gledano iz izhoda) (človek- ura)**
Stroj 1	1.05	3.15	4.2
Kontrola 1	0.94	0.23	0.31
Stroj 2	0.88	2.2	2.93
Kontrola 2	0.86	0.22	0.29
Stroj 3	0.81	1.21	1.61
Kontrola 3	0.8	0.2	0.27

Odgovor na vprašanje, koliko časa se v povprečju potroši za posamezno fazo procesa, torej dobimo z opazovanjem četrtega stolpa v zgornji tabeli. Torej nam očitno tovrstna analiza omogoči tudi realno oceno pripadajočih stroškov.

Na koncu si poglejmo, kako bi opravili izračune tega primera v Matlabu. V ta namen, pokličemo program **markov5.m**, katerega oblika je naslednja:

```
% markov5.m
%
% primer s proizvodnim procesom
%

clear
clc
close all

M = input('število minljivih stanj')

disp('Planirani kumulativni časi za izvedbo posametnih faz:')

Tk = [3 0.25 2.5 0.25 1.5 0.25]

disp('prehodna matrika:')

P = [0   0.05  0.0  0.0   0.0   0.0    0.0  0 ;...
     0.9 0     0.0  0.0   0.0   0.0    0.0  0 ;...
     0   0.9   0.0  0.04  0.0   0.0    0.0  0 ;...
     0   0     0.97 0.0   0.0   0.0    0.0  0 ;...
     0   0     0.0  0.92  0.0   0.03   0.0  0 ;...
     0   0     0.0  0.0   0.98  0.0    0.0  0 ;...
     0   0     0.0  0.0   0.0   0.94   1    0 ;...
     0.1 0.05  0.03 0.04  0.02  0.03   0    1 ]

disp('matrike glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:6,1:6)

N = inv(eye(6) - Q)

R = P(7:8,1:6)

NR = R*N
```

```
disp('delež izdelkov, ki pridejo na vhod procesa, odpremljen na izhodu procesa, je v povprečju enak:')

DI = NR(1,1)

disp('povprečno število zasedb posameznih stanj:')

N(:,1)

disp('dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel na vhod:')

for i = 1:M
   Tk1(i) = N(i,1)*Tk(i);
   Tk2(i) = Tk1(i)/DI;
end

Tk1

disp('dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel do izhoda (odpreme):')

Tk2
```

Izpis v komandnem oknu ob klicu tega programa pa bi bil naslednji:

```
število minljivih stanj6

M =
    6

Planirani kumulativni časi za izvedbo posametnih faz:

Tk =
   3.0000    0.2500    2.5000    0.2500    1.5000    0.2500

prehodna matrika:

P =
        0    0.0500    0         0         0         0         0         0
   0.9000         0    0         0         0         0         0         0
        0    0.9000    0         0.0400    0         0         0         0
        0         0    0.9700    0         0         0         0         0
        0         0    0         0.9200    0         0.0300    0         0
        0         0    0         0         0.9800    0         0         0
        0         0    0         0         0         0.9400    1.0000    0
   0.1000    0.0500    0.0300    0.0400    0.0200    0.0300    0         1.0000

matrike glede na minljiva in ponorna stanja:

Q =
        0    0.0500         0         0         0         0
   0.9000         0         0         0         0         0
        0    0.9000         0    0.0400         0         0
        0         0    0.9700         0         0         0
        0         0         0    0.9200         0    0.0300
        0         0         0         0    0.9800         0


N =
   1.0471    0.0524         0         0         0         0
   0.9424    1.0471         0         0         0         0
   0.8824    0.9804    1.0404    0.0416         0         0
   0.8559    0.9510    1.0092    1.0404         0         0
   0.8113    0.9015    0.9565    0.9861    1.0303    0.0309
   0.7951    0.8834    0.9374    0.9664    1.0097    1.0303

R =
        0         0         0         0         0    0.9400
   0.1000    0.0500    0.0300    0.0400    0.0200    0.0300

NR =
   0.7474    0.8304    0.8812    0.9084    0.9491    0.9685
   0.2526    0.1696    0.1188    0.0916    0.0509    0.0315
```

delež izdelkov, ki pridejo na vhod procesa, odpremljen na izhodu procesa, je v povprečju enak:

DI =
0.7474

povprečno število zasedb posameznih stanj:
ans =
1.0471
0.9424
0.8824
0.8559
0.8113
0.7951

dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel na vhod:

Tk1 =
3.1414 0.2356 2.2060 0.2140 1.2170 0.1988

dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel do izhoda (odpreme):

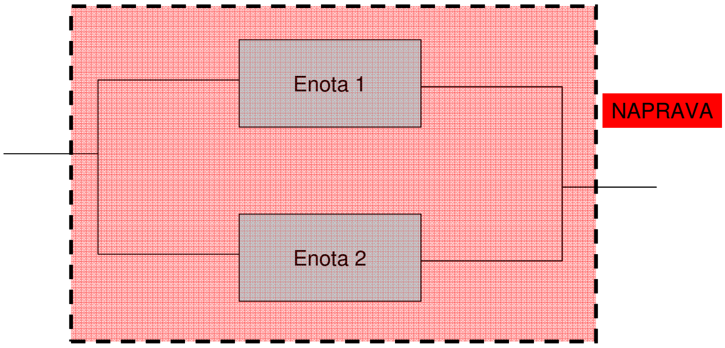
Tk2 =
4.2032 0.3152 2.9517 0.2863 1.6283 0.2660

Do rahlo drugačnih rezultatov glede na analitične izračune je prišlo zaradi numeričnih napak pri zaokroževanju.

Primer 17 (primer zanesljivosti naprav): Neka preprosta naprava se sestoji iz dveh vzporedno vezanih enot in je prikazana na sliki 6.82. Naprava deluje, če deluje vsaj ena izmed obeh enot, sicer pa odpove. Odpovedi naprave, ki je ne popravljamo, zasledujemo v časovnih intervalih Δt*, pri čemer je verjetnost, da v tem intervalu odpovesta obe enoti, zanemarljiva. Označimo z* λ *pogostost odpovedi, ki naj za obe napravi ne bo odvisna od časa. Produkt* $\lambda\Delta t$ *predstavlja pogojno verjetnost, da enota odpove v intervalu* Δt*, če je na začetku tega intervala dobro delovala. Odpoved delovanja ene enote na splošno spremeni pogoje delovanja druge in obratno, zato sta načeloma pogostosti odpovedi obeh enot različni med seboj. Označimo različne možne pogostosti odpovedi na naslednji način:*

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{pogostost odpovedi enote } 1, \textit{ kadar delujeta obe enoti.}\\
&\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{pogostost odpovedi enote } 2, \textit{ kadar delujeta obe enoti.}\\
&\lambda_1^* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{pogostost odpovedi enote } 1, \textit{ ko je enota } 2 \textit{ že odpovedala.}\\
&\lambda_2^* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{pogostost odpovedi enote } 2, \textit{ ko je enota } 1 \textit{ že odpovedala.}
\end{aligned} \qquad (6.625)$$

Izračunajte povprečni čas do odpovedi naprave MTTF (mean time to failure) [12].



Slika 6.82.: Preprosta naprava, ki se sestoji iz dveh vzporedno vezanih enot.

Proces delovanja naprave lahko obravnavamo kot Markovsko verigo. V ta namen postavimo naslednja stanja verige:

Stanje 1 – obe enoti delujeta
Stanje 2 – enota 1 ne deluje, enota 2 deluje
Stanje 3 – enota 1 deluje, enota 2 ne deluje (6.626)
Stanje 4 – obe enoti ne delujeta

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

Prehodna matrika ima naslednjo obliko [12]:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1-\lambda_2^* & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1-\lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & \lambda_1^* & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (6.627)$$

Iz izraza (6.626) vidimo, da ima prehodna matrika eno ponorno stanje (4), ter tri minljiva stanja (1, 2, 3). V nadaljevanju najprej tvorimo naslednjo matriko, ki je podmatrika matrike P:

$$Q = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1-\lambda_2^* & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1-\lambda_1^* \end{bmatrix} \quad (6.628)$$

Nato tvorimo naslednjo matriko:

$$I - Q = \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_2^* & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_1^* \end{bmatrix} \quad (6.629)$$

Inverz te matrike je enak:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_2^* & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_1^* \end{bmatrix}^{-1} \tag{6.630}$$

Po daljši izpeljavi dobimo naslednji rezultat [11]:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2^*} & \dfrac{1}{\lambda_2^*} & 0 \\ \dfrac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1^*} & 0 & \dfrac{1}{\lambda_1^*} \end{bmatrix} \tag{6.631}$$

Dokazati se da, da je povprečen čas do odpovedi naprave enak vsoti prvega stolpa matrike N [12] :

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2^*} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1^*} \tag{6.632}$$

Na koncu si poglejmo, kako bi opravili izračune tega primera v Matlabu. V ta namen, pokličemo program **markov6.m**, katerega oblika je naslednja:

```
% markov6.m
%
% primer z zanesljivostjo naprave
%
clear
clc
close all
syms a1 a2 b1 b2

M = input('število minljivih stanj')

disp('ai sta parametra prve enote, bi pa parametra druge enote')
disp('')

disp('prehodna matrika:')

P = [1-a1-a2  0      0      0;...
     a1       1-b2   0      0;...
     a2       0      1-b1   0;...
     0        b2     b1     1];

pretty(P)

disp('matriki Q in N glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:M,1:M);
N = inv(eye(M) - Q);

pretty(Q)
pretty(N)

disp('povprečen čas do odpovedi naprave je enak:')

MTTF = sum(N(:,1));
pretty(MTTF)
```

Izpis v komandnem oknu ob klicu tega programa pa bi bil naslednji:

```
število minljivih stanj3

M =

    3

ai sta parametra prve enote, bi pa parametra druge enote
prehodna matrika:

              [1 - a1 - a2     0        0      0 ]
              [                                  ]
              [    a1        1 - b2     0      0 ]
              [                                  ]
              [    a2          0      1 - b1   0 ]
              [                                  ]
              [    0          b2        b1     1 ]

matriki Q in N glede na minljiva in ponorna stanja:

                [1 - a1 - a2     0        0    ]
                [                              ]
                [    a1        1 - b2     0    ]
                [                              ]
                [    a2          0      1 - b1 ]

                [     1                        ]
                [  -------           0      0  ]
                [  a1 + a2                     ]
                [                              ]
                [     a1             1         ]
                [------------       ----    0  ]
                [(a1 + a2) b2        b2        ]
                [                              ]
                [     a2                    1  ]
                [------------        0     ----]
                [(a1 + a2) b1               b1 ]

povprečen čas do odpovedi naprave je enak:

                 1           a1               a2
              -------  + ------------  + ------------
              a1 + a2    (a1 + a2) b2    (a1 + a2) b1
```

<u>Primer 18 (Primer tržne analize)</u>: Občan lahko kupi avto znamke Fiat (F), Renault (R) ali Volkswagen (V). Ko se odloči za nakup novega avta, je izbira odvisna od tega, kakšen avto ima sedaj. Proizvajalci so zbrali naslednje podatke o nakupih avtov:

	Naslednji nakup		
Sedanji nakup	% kupcev avta F	% kupcev avta R	% kupcev avta V
F	40	30	30
R	20	50	30
V	25	25	30

Kolikšno je povprečno število nakupov avtov, preden sedanji lastnik avta znamke Fiat kupi avto znamke Volkswagen?

Proces kupovanja avtov lahko obravnavamo kot Markovsko verigo. V ta namen postavimo naslednja stanja verige:

Stanje 1 – občan kupi avto F
Stanje 2 – občan kupi avto R
Stanje 3 – občan kupi avto V (6.633)

$S = \{1, 2, 3\}$

Prehodna matrika ima naslednjo obliko [12]:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0.25 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.634}$$

Ker matrika P nima nobenega ponornega stanja, jo imenujemo takoimenovana nerazcepna veriga [12]. Če želimo uporabiti postopek, podoben kot v prejšnjih dveh primerih, moramo matriko P pretvoriti v razcepno z določenim ponornim stanjem k. To storimo tako, da izberemo stolp k, v njem postavimo diagonalni element na 1, ostale elemente pa na 0 [12]. V našem primeru si v ta namen izberemo tretji stolp (k = 3), pri čemer dobimo:

$$P^* = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.635}$$

Kot se izkaže, je obnašanje nove verige pred absorbcijo enako obnašanju prvotne verige pred prvo zasedbo stanja k [12].

V nadaljevanju moramo izračunati povprečni čas prvega prehoda iz stanja 1 v stanje 3. V ta namen tvorimo matriko Q, kot smo to storili že v prejšnjih dveh primerih:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{6.636}$$

Tvorimo še matriko I - Q:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{6.637}$$

ter matriko N:

$$\begin{aligned} N &= (I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.3 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{adj(I-Q)}{\det(I-Q)} = \frac{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}}{0.6 \cdot 0.5 - 0.3 \cdot 0.2} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}}{0.24} = \begin{bmatrix} 2.08 & 0.83 \\ 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.638}$$

V splošnem velja, da povprečni čas do absorbcije iz posameznih minljivih stanj i v ponorna stanja dobimo iz matrike N tako, da seštejemo elemente ustreznega stolpa i v matriki N [12]. Poleg tega so posamezni elementi i-tega stolpa matrike N enaki povprečnemu številu zasedb posameznih minljivih stanj, če je bila veriga na začetku v stanju i. Več podrobnosti o tej problematiki si lahko bralec ogleda v literaturi [12].

V našem primeru je povprečni čas do absorbcije iz stanja 1 v stanje 3 enak vsoti 1. stolpa matrike N:

$$\mu_{13} = 2.08 + 1.25 = 3.33 \tag{6.639}$$

Torej je povprečno število nakupov avta, preden sedanji lastnik avta znamke Fiat kupi avto znamke Volkswagen, enako 3.33 avta.

<u>*Primer 19 (Primer vhodne kontrole)*</u>*: Pri prevzemanju krogličnih ležajev uporabljamo naslednji kontrolni plan: Ležaje zaporedoma pregledujemo in pošiljko zavrnemo, če je dimenzija določenega ležaja prevelika ali premajhna. Če pa dobimo tri ležaje z dimenzijo znotraj toleranc, pošiljko sprejmemo, V povprečju je 10% ležajev prevelikih, 5% pa premajhnih. Proces prevzemanja ležajev modelirajte z Markovsko verigo, kjer bodo stanja definirana s pregledi do sprejema ali zavrnitve pošiljke [13].*

a) Definirajte stanja procesa prevzemanja ležajev,

b) Definirajte prehodno matriko in narišite avtomat,

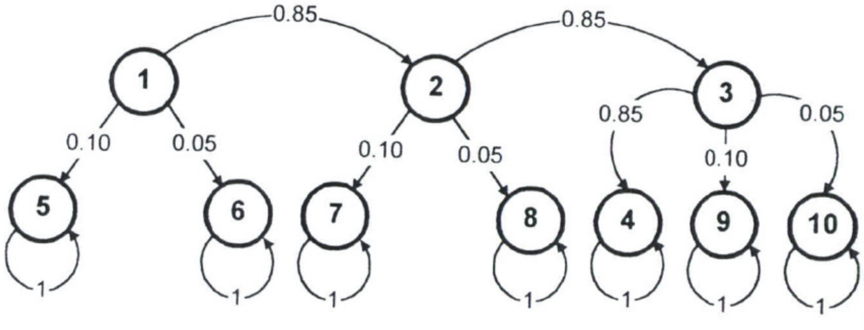
c) Koliko ležajev moramo v povprečju pregledati, da pridemo do odločitve, to je sprejema ali zavrnitve pošiljke.

d) Kakšna je verjetnost, da pošiljko zavrnemo, ker smo našli prevelik oz. premajhen ležaj.

a) Najprej bomo definirali stanja procesa:

Številka stanja	Število dobrih	Število prevelikih	Število premajhnih
1	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**0**
3	**2**	**0**	**0**
4	**3**	**0**	**0**
5	**0**	**1**	**0**
6	**0**	**0**	**1**
7	**1**	**1**	**0**
8	**1**	**0**	**1**
9	**2**	**1**	**0**
10	**2**	**0**	**1**

b) Avtomat prikazuje slika 6.83.



Slika 6.83.: Avtomat za primer prevzemanja ležajev.

Prehodna matrika ima obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.640}$$

Kot je razvidno, ima matrika tri minljiva stanja (1, 2, 3) ter sedem ponornih stanj (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

c) Potrebno je izračunati povprečni čas do absorbcije iz minljivega stanja 1. V ta namen najprej tvorimo matriko Q (dimenzije število minljivih stanj X število minljivih stanj):

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.641}$$

Nato tvorimo matriko I - Q:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.85 & 1 & 0 \\ 0 & -0.85 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.642}$$

Nato tvorimo matriko N, kjer po izpeljavi dobimo:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.85 & 1 & 0 \\ 0.7225 & 0.85 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.643}$$

Nato tvorimo še matriko R kot podmatriko matrike P (dimenzije število ponornih stanj X število minljivih stanj):

$$R=\begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.85 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.644)$$

kjer smo ob matriki ohranili informacijo o povezavi med stolpi oz. vrstami ter stanji matrike P. V nadaljevanju tvorimo še produkt $R \cdot N$, pri čemer dobimo:

$$R \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.85 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.85 & 1 & 0 \\ 0.7225 & 0.85 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6141 & 0.7225 & 0.85 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.085 & 0.1 & 0 \\ 0.0425 & 0.05 & 0 \\ 0.0723 & 0.085 & 0.1 \\ 0.0361 & 0.0425 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.645)$$

Verjetnost, da pošiljko zavrnemo, ker smo našli prevelik ležaj, dobimo tako, da v prvem stolpu (saj se ta tiče stanja 1, ko smo na začetku kontrole pošiljke) matrike $R \cdot N$ seštejemo elemente v peti, sedmi in deveti vrsti (ker pač te vrste pripadajo stanjem 5, 7, 9, ki se tičejo prevelikih ležajev). Dobimo:

$$P_1 = 0.1 + 0.085 + 0.0723 = 0.2573 \qquad (6.646)$$

Verjetnost, da pošiljko zavrnemo, ker smo našli premajhen ležaj, pa dobimo tako, da v prvem stolpu matrike $R \cdot N$ seštejemo elemente v šesti, osmi in deseti vrsti (ker pač te vrste pripadajo stanjem 6, 8, 10, ki se tičejo premajhnih ležajev). Dobimo:

$$P_2 = 0.05 + 0.0425 + 0.0361 = 0.1286 \qquad (6.646)$$

<u>Primer 20 (Primer tržne analize 2)</u>: Denimo celotna industrija pijače kola izdeluje le dva tipa kol (kola 1, kola 2). Ugotovljeno je, da je uporabnik v primeru, ko je nazadnje naročil kolo 1, z 90% verjetnostjo pri ponovnem naročilu zopet naročil kolo 1. Če pa je uporabnik nazadnje naročil kolo 2, je z 80% verjetnostjo pri ponovnem naročilu zopet naročil kolo 2.

a) Kakšna je verjetnost, da bo uporabnik, ki je nazadnje naročil kolo 2, po dveh naročilih naročil kolo 1?

b) Kakšna je verjetnost, da bo uporabnik, ki je nazadnje naročil kolo 1, po treh naročilih zopet naročil kolo 1?

c) Poiščite verjetnosti prehodov v stacionarnih razmerah.

Definirajmo stanja:

Stanje 1 – Uporabnik je nazadnje naročil kolo 1
Stanje 2 – Uporabik je nazadnje naročil kolo 2 (6.647)

Prehodna matrika ima naslednjo obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.648}$$

a) Tvorimo produkt:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.83 & 0.34 \\ 0.17 & 0.66 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{6.649}$$

Verjetnost, da bo uporabik, ki je nazadnje naročil kolo 2, po dveh naročilih naročil kolo 1, je enaka elementu $p_{21} = 0.34$.

b) Tvorimo produkt:

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.34 \\ 0.17 & 0.66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.781 & 0.438 \\ 0.219 & 0.562 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \tag{6.650}$$

Verjetnost, da bo uporabik, ki je nazadnje naročil kolo 1, po treh naročilih zopet naročil kolo 1, je enaka $q_{11} = 0.781$.

c) Verjetnosti v stacionarnih razmerah poiščemo s pomočjo naslednjih izrazov:

$$
\begin{aligned}
&P \cdot P_{\infty} = P_{\infty} \\
&\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{1\infty} \\ P_{2\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1\infty} \\ P_{2\infty} \end{bmatrix} \\
&\left.\begin{aligned} 0.9P_{1\infty} + 0.2P_{2\infty} = P_{1\infty} \qquad & \left|\cdot 0.1\right. \\ 0.1P_{1\infty} + 0.8P_{2\infty} = P_{2\infty} \qquad & \left|\cdot 0.9\right. \end{aligned}\right\} - \\
&0.02P_{2\infty} - 0.72P_{2\infty} = 0.1P_{1\infty} \;\; - 0.9P_{2\infty} \\
&0.2P_{2\infty} = 0.1P_{1\infty} \\
&P_{2\infty} = 0.5P_{1\infty} = 1 - P_{1\infty} \\
&P_{1\infty} = \frac{1}{1.5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P_{2\infty} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{6.651}
$$

Torej je po daljšem času verjetnost $\frac{2}{3}$, da bo uporabik naročil kolo 1, ter $\frac{1}{3}$, da bo uporabik naročil kolo 2.

<u>Primer 21 (Primer tržne analize 2 - nadaljevanje)</u>: Ta primer se navezuje na prejšnjega. Denimo vsak uporabnik nabavi eno naročilo kole tekom enega tedna, torej 52 naročil na leto. Denimo je 100 milijonov uporabnikov kole. Proizvodni stroški za eno enoto kole stanejo proizvajalca 1 Euro, prodaja jo pa po 2 Eura. Obstaja tudi oglaševalno podjetje, ki garantira, da bo za 500 milijonov na leto tako vplivalo na trg, da se bo prehodna matrika spremenila v naslednjo obliko:

$$
P^{*} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \;\;\;2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}
\tag{6.652}
$$

Ali se podjetju za proizvodnjo kole splača najeti storitve oglaševalnega podjetja?

V trenutnih okoliščinah je po daljšem času verjetnost $\frac{2}{3}$, da bo uporabik naročil kolo 1, ter $\frac{1}{3}$, da bo uporabik naročil kolo 2. Trenutni letni profit podjetja pri prodaji kole 1 je enak:

$$
PR = \frac{2}{3} \cdot 52 \cdot 100 \cdot 10^{6} = 3.466 \cdot 10^{9} = 3.466 \; milijarde
\tag{6.653}
$$

Izračunajmo stacionarne verjetnosti v spremenjenih okoliščinah:

$$
\begin{aligned}
&P^* \cdot P_\infty^* = P_\infty^* \\
&\begin{bmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1\infty}^* \\ P_{2\infty}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1\infty}^* \\ P_{2\infty}^* \end{bmatrix} \\
&\left.\begin{aligned} 0.95P_{1\infty}^* + 0.2P_{2\infty}^* = P_{1\infty}^* \qquad & \left|\cdot 0.05\right. \\ 0.05P_{1\infty}^* + 0.8P_{2\infty}^* = P_{2\infty}^* \qquad & \left|\cdot 0.95\right. \end{aligned}\right\} - \\
&0.01P_{2\infty}^* - 0.76P_{2\infty}^* = 0.05P_{1\infty}^* \; - 0.95P_{2\infty}^* \\
&0.2P_{2\infty}^* = 0.05P_{1\infty}^* \\
&P_{2\infty}^* = 0.25P_{1\infty}^* = 1 - P_{1\infty}^* \\
&P_{1\infty}^* = \frac{1}{1.25} = 0.8, \quad P_{2\infty}^* = 0.2
\end{aligned}
\tag{6.654}
$$

Profit v spremenjenih okoliščinah bi bil:

$$PR^* = 0.8 \cdot 52 \cdot 100 \cdot 10^6 = 4.160 \cdot 10^9 = 4.160 \; milijarde \tag{6.655}$$

Z upoštevanjem stroška za oglaševalno podjetje pa bi bil enak:

$$PR^*_{tot} = PR^* - 500 \cdot 10^6 = 4.160 \cdot 10^9 - 0.5 \cdot 10^9 = 3.66 \; milijarde \tag{6.656}$$

Ker je $PR^*_{tot} > PR$, se proizvodnemu podjetju splača najeti oglaševalno podjetje.

<u>*Primer 22 (Primer nabave blaga pri grosistu):*</u> *Grosist dobavlja enako blago treh različnih proizvajalcev (A, B, C) trgovcem. Ugotovljeno je (iz statistične analize preteklih podatkov):*

- *da so v povprečju trgovci v primeru, ko so nazadnje naročili blago proizvajalca A, s 75% verjetnostjo pri ponovnem naročilu zopet naročili blago proizvajalca A, z 10% verjetnostjo blago proizvajalca B, ter s 15% verjetnostjo blago proizvajalca C.*
- *da so v povprečju trgovci v primeru, ko so nazadnje naročili blago proizvajalca B, s 55% verjetnostjo pri ponovnem naročilu zopet naročili blago proizvajalca B, s 33% verjetnostjo blago proizvajalca A, ter z 12% verjetnostjo blago proizvajalca C.*
- *da so v povprečju trgovci v primeru, ko so nazadnje naročili blago proizvajalca C, s 88% verjetnostjo pri ponovnem naročilu zopet naročili blago proizvajalca C, z 10% verjetnostjo blago proizvajalca A, ter z 2% verjetnostjo blago proizvajalca B.*

a) *Če je nek trgovec trenutno uporabnik blaga A, kakšna je v povprečju verjetnost, da bo po treh naročilih pri grosistu raje naročil blago proizvajalca B?*

b) Poiščite verjetnosti prehodov v stacionarnih razmerah.

c) Denimo trgovci naročajo blago vsak teden. Npr. je trenutna potrošnja takšna: 50% jih naroča blago A, 30% jih naroča blago B, ter 20% blago C. Kakšno bo to razmerje procentov čez 4 tedne?

a) Najprej poiščimo prehodno matriko, ki ima naslednjo obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 & 0.1 \\ 0.1 & 0.55 & 0.02 \\ 0.15 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.657}$$

kjer smo s stanji 1 - A, 2 - B, 3 - C označili:

Stanje 1 (A) – Trgovec je nazadnje naročil blago proizvajalca A
Stanje 2 (B) – Trgovec je nazadnje naročil blago proizvajalca B
Stanje 3 (C) – Trgovec je nazadnje naročil blago proizvajalca C

Tvorimo produkt:

$$\begin{gathered} P^3 = P \cdot P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 & 0.1 \\ 0.1 & 0.55 & 0.02 \\ 0.15 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 & 0.1 \\ 0.1 & 0.55 & 0.02 \\ 0.15 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 & 0.1 \\ 0.1 & 0.55 & 0.02 \\ 0.15 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} = \\ = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5274 & 0.4644 & 0.2191 \\ 0.1393 & 0.2344 & 0.0540 \\ 0.3333 & 0.3013 & 0.7269 \end{bmatrix} \end{array} \end{gathered} \tag{6.658}$$

Verjetnost, da bo trgovec, ki je nazadnje naročil blago proizvajalca A, po treh naročilih naročil pri grosistu blago proizvajalca B, je enaka 0.1393.

b) Tvorimo naslednje izraze:

$$\begin{gathered} P \cdot P_\infty = P_\infty \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 & 0.1 \\ 0.1 & 0.55 & 0.02 \\ 0.15 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1\infty} \\ P_{2\infty} \\ P_{3\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1\infty} \\ P_{2\infty} \\ P_{3\infty} \end{bmatrix} \\ 0.75P_{1\infty} + 0.33P_{2\infty} + 0.1P_{3\infty} = P_{1\infty} \\ 0.1P_{1\infty} + 0.55P_{2\infty} + 0.02P_{3\infty} = P_{2\infty} \\ 0.15P_{1\infty} + 0.12P_{2\infty} + 0.88P_{3\infty} = P_{3\infty} \end{gathered} \tag{6.659}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}&(0.75-1)P_{1\infty}+0.33P_{2\infty}+0.1P_{3\infty}=0\\&0.1P_{1\infty}+(0.55-1)P_{2\infty}+0.02P_{3\infty}=0\\&0.15P_{1\infty}+0.12P_{2\infty}+(0.88-1)P_{3\infty}=0\end{aligned} \tag{6.660}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}&-0.25P_{1\infty}+0.33P_{2\infty}+0.1P_{3\infty}=0\\&0.1P_{1\infty}-0.45P_{2\infty}+0.02P_{3\infty}=0\\&0.15P_{1\infty}+0.12P_{2\infty}-0.12P_{3\infty}=0\end{aligned} \tag{6.661}$$

Upoštevajmo še, da je vsota stacionarnih verjetnosti enaka 1. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}&-0.25P_{1\infty}+0.33P_{2\infty}+0.1P_{3\infty}=0\\&0.1P_{1\infty}-0.45P_{2\infty}+0.02P_{3\infty}=0\\&0.15P_{1\infty}+0.12P_{2\infty}-0.12P_{3\infty}=0\\&P_{1\infty}+P_{2\infty}+P_{3\infty}=1\end{aligned} \tag{6.662}$$

V vektorsko matrični obliki (6.662) zapišemo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-0.25 & 0.33 & 0.1\\ 0.1 & -0.45 & 0.02\\ 0.15 & 0.12 & -0.12\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\\ P_{3\infty}\\ \end{bmatrix}}_{P_\infty}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{b} \tag{6.663}$$

Ker gre za predoločen sistem enačb (4 enačbe, 3 neznanke), rešitev lahko poiščemo na naslednji način [6], pri čemer po daljši izpeljavi dobimo:

$$P_\infty=\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot b=\begin{bmatrix}0.3532\\0.1027\\0.5441\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\P_{2\infty}\\P_{3\infty}\end{bmatrix} \tag{6.664}$$

Torej je po daljšem času verjetnost 0.3532, da bodo v povprečju trgovci pri grosistu naročali blago proizvajalca A, verjetnost 0.1027, da bodo v povprečju naročali blago proizvajalca B, ter verjetnost 0.5441, da bodo v povprečju naročali blago proizvajalca C.

Če si pri tovrstnem izračunu pomagamo z Matlabom (program **primer22_6p.m**), bi bili ukazi naslednji:

```
%   primer22_6p.m
%
%   program za primer 22:
%

clear
close all
clc

disp('prehodna matrika P je:')

P=[0.75 0.33 0.1;0.1 0.55 0.02;0.15 0.12 0.88]

disp('Matrika A in vektor b za izracun stac. verjetnosti:')

A=[-0.25 0.33 0.1;0.1 -0.45 0.02;0.15 0.12 -0.12;1 1 1]
b = [0 0 0 1]'

disp('stacionarni vektor verjetnosti (1. nacin):')

Pnesk = inv(A'*A)*A'*b

ch = input('Zelis se izracun z mnogokratnim produktom matrike P? 1-DA, 0-NE')

if ch == 0
  return
end

while 1==1

    k = input('stevilo mnozenj je:')
    Pk = P^k
    Pnesk1 = Pk(:,1)

    ch = input('Zelis se ponoviti izracun 1-Da, 0-Ne');
    if ch == 0
      return
    end
end
```

Izpis komandnega okna bi bil:

```
prehodna matrika P je:

P =
   0.7500    0.3300    0.1000
   0.1000    0.5500    0.0200
   0.1500    0.1200    0.8800

Matrika A in vektor b za izracun stac. verjetnosti:

A =
  -0.2500    0.3300    0.1000
   0.1000   -0.4500    0.0200
   0.1500    0.1200   -0.1200
   1.0000    1.0000    1.0000

b =
    0
    0
    0
    1
```

```
stacionarni vektor verjetnosti (1. nacin):

Pnesk =
   0.3532
   0.1027
   0.5441

Zelis se izracun z mnogokratnim produktom matrike P? 1-DA, 0-NE   1
ch =
    1

stevilo mnozenj je:  10
k =
   10
Pk =
   0.3713    0.3745    0.3374
   0.1095    0.1112    0.0966
   0.5192    0.5143    0.5660
Pnesk1 =
   0.3713
   0.1095
   0.5192

Zelis se ponoviti izracun 1-Da, 0-Ne  1
stevilo mnozenj je:  20
k =
   20
Pk =
   0.3541    0.3542    0.3524
   0.1030    0.1031    0.1024
   0.5429    0.5427    0.5452
Pnesk1 =
   0.3541
   0.1030
   0.5429

Zelis se ponoviti izracun 1-Da, 0-Ne  1
stevilo mnozenj je:  30
k =
   30
Pk =
   0.3532    0.3532    0.3531
   0.1027    0.1027    0.1027
   0.5441    0.5441    0.5442
Pnesk1 =
   0.3532
   0.1027
   0.5441
```

Kot je razvidno iz izpisa komandnega okna, smo rešitev za stacionarne verjetnosti poiskali na 2 načina:

a) Izpeljali smo matriko A in vektor b ter uporabili izraz (6.664).

b) Tvorili smo produkte:

$$P_\infty \in P^k, \;\; k = 10, 20, 30 \tag{6.665}$$

Pri tem drugem načinu smo morali opraviti dovolj množenj matrike P s samo seboj, da je produkt prešel v stacionarno stanje. To vemo po tem, da se vsi stolpi izenačijo med seboj. Vektor stacionarnih verjetnosti pa je potem enak kateremukoli izmed izenačenih stolpov od P^k.

c) Zanima nas razmerje procentov trgovcev uporabe določenega blaga (A, B ali C) čez 4 tedne. V ta namen tvorimo izraz:

$$P\left(\check{c}ez\ 4\ tedne\right)=P^{4}\cdot\begin{bmatrix}0.5\\0.3\\0.2\end{bmatrix}=P\cdot P\cdot P\cdot P\cdot\begin{bmatrix}0.5\\0.3\\0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4251\\0.1357\\0.4392\end{bmatrix}\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\qquad(6.666)$$

Torej bo čez 4 tedne v povprečju 42.51% trgovcev naročilo blago A, 13.57% blago B, ter 43.92% blago C. S tem vedenjem grosist gotovo lahko bolje planira, v kakšnem razmerju bo pri dobaviteljih nabavil blago.

<u>Primer 23 (Primer nabave blaga - nadaljevanje)</u>: Speljite izraze za matriko A in vektor b iz prejšnjega primera v bolj kompaktni vektorsko-matrični obliki. Napišite tudi program v Matlabu za tovrsten izračun.

Tvorimo naslednje izraze:

$$\begin{aligned}
&P\cdot P_{\infty}=P_{\infty}\\
&\left(P-I\right)P_{\infty}=0\\
&Velja\ tudi:\\
&p_{1\infty}+p_{2\infty}+...+p_{N\infty}=1,\quad kjer\ N\ \check{s}tevilo\ \ stanj.\\
&\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & ... & 1\end{bmatrix}}_{c}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}p_{1\infty}\\p_{2\infty}\\...\\p_{N\infty}\end{bmatrix}}_{P_{\infty}}=1\qquad\Rightarrow\qquad c\cdot P_{\infty}=1\\
&Sledi:\\
&\underbrace{\begin{bmatrix}\left(P-I\right)\\c\end{bmatrix}}_{A}P_{\infty}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\...\\0\\1\end{bmatrix}}_{b}
\end{aligned}\qquad(6.667)$$

Odtod pa nato lahko izračunamo vektor P_{∞} s pomočjo izraza (6.664).

Program v Matlabu (**stacionar.m**) bi imel naslednjo obliko:

```
%   stacionar.m
%
%   program za izracun stacionarnih verjetnosti:
%

clc
close all

ch=input('A si vnesel matriko P v workspace-u 1-DA,0-NE')
if ch == 0
  P=input('P=');
end

disp('prehodna matrika P je:')
P

disp('stevilo stanj je:')
s = size(P);
N = s(1)

disp('matrika A in vektor b sta:')

c = ones(N,1)';

A = [ [P-eye(N)]; c]

b = [zeros(N,1);1]

disp('Vektor stacionarnih verjetnosti je:')

Pnesk = inv(A'*A)*A'*b
```

Primer 24 (Primer distribucije pošte): *Imamo poštno podjetje, ki dostavlja pošiljke na tri lokacije (A, B, C) v treh predmestjih velikega mesta. Podjetje ima več dostavljalcev (voznikov), pri čemer je bilo ugotovljeno naslednje:*

1. Od voznikov, ki so dostavili zadnjo pošiljko na lokacijo A, jih je 30% voznikov moralo nato iti ponovno na lokacijo A, 30% jih je nato odšlo na lokacijo B, 30% pa jih je nato odšlo na lokacijo C.

2. Od voznikov, ki so dostavili zadnjo pošiljko na lokacijo B, jih je 40% voznikov moralo nato iti na lokacijo A, 40% jih je nato ponovno odšlo na lokacijo B, 30% pa jih je nato odšlo na lokacijo C.

3. Od voznikov, ki so dostavili zadnjo pošiljko na lokacijo C, jih je 50% voznikov moralo nato iti na lokacijo A, 30% jih je nato odšlo na lokacijo B, 20% pa jih je nato ponovno odšlo na lokacijo C.

Po vsaki izročeni pošiljki gredo vozniki do najbližje lokacije, da izvedejo naslednjo dostavo. Predpostavljeno je, da so časi dostave pošiljk in nato premika na najbližjo lokacijo približno enaki.

Odgovorite naslednje:

a) S kakšnimi verjetnostmi se bodo vozniki nahajali na lokacijah A, B ali C po dveh pošiljkah, če so startali iz lokacije C?

b) Kakšne so stacionarne verjetnosti, da se vozniki nahajajo na lokacijah A, B ali C po daljšem času?

Prehodna matrika ima naslednjo obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.668}$$

a) Tvorimo naslednji izraz:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.41 & 038 & 0.37 \\ 0.33 & 0.34 & 0.33 \\ 0.26 & 0.28 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \tag{6.669}$$

Torej, če so vozniki startali iz lokacije C, se bodo po dveh dostavah s 37% verjetnostjo nahajali na lokaciji A, s 33% verjetnostjo na lokaciji B, ter s 30% verjetnostjo na lokaciji C.

Seveda v tem primeru velja:

$$P\left(x_2, A \cup B \cup C \middle| C\right) = P^2 \cdot P\left(x_0\right) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} = \tag{6.670}$$

$$= \begin{array}{c} C \\ \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.33 \\ 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

ker s 100% verjetnostjo vemo, da kot začetni pogoj opazujemo lokacijo C. Torej lahko bodisi izračunamo $P^2 \cdot P\left(x_0\right)$, bodisi izračunamo le P^2 in gledamo 3. stolp, pa bomo prišli do enakega rezultata. Seveda temu ne bi bilo tako, če bi začetni vektor vseboval več verjetnosti, ki bi bile manjše od 1.

b) Izračunajmo še stacionarne verjetnosti (s pomočjo programa **stacionar.m**):

$$A=\begin{bmatrix}(P-I)\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.5\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.4 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.7 & 0.4 & 0.5\\ 0.3 & -0.6 & 0.3\\ 0.4 & 0.2 & -0.8\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \tag{6.671}$$

$$P_\infty=\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot b=\begin{bmatrix}0.3889\\ 0.3333\\ 0.2778\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{1\infty}\\ P_{2\infty}\\ P_{3\infty}\end{bmatrix}$$

Torej so stacionarne verjetnosti, da se vozniki nahajajo na lokacijah A, B ali C po daljšem času, enake: 38.89%, 33.33% oz. 27.78%.

<u>*Primer 25 (Primer preprostega strežnega sistema)*</u>*: Opravka imamo s preprostim strežnim sistemom, kjer je le en strežnik in so možna le tri stanja:*

- *Stanje 1 (S1): Nobena stranka ni prisotna,*
- *Stanje 2 (S2): Ena stranka je prisotna, ki jo strežnik streže,*
- *Stanje 3 (S3): Ena stranka je strežena in še ena čaka.*

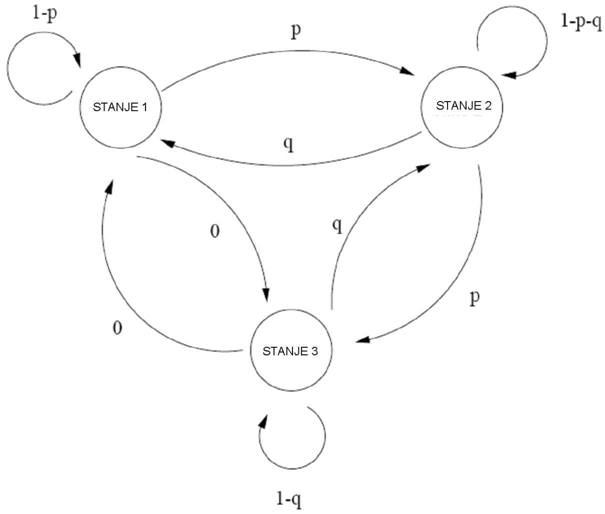
Predpostavimo, da vrsta nikoli ne more biti daljša, torej nova stranka odide, če se sistem nahaja v stanju 3. Predpostavimo tudi, da prihodi in storitev spadajo v kategorijo Poissonovih procesov. Definirajmo naslednje verjetnosti:

$$\begin{aligned}&p\text{................}verjetnost\ prehoda\ iz\ S1\ v\ S2\ ali\ iz\ S2\ v\ S3.\\ &1-p\text{...........}verjetnost,\ da\ smo\ v\ S1.\\ &q\text{.................}verjetnost\ prehoda\ iz\ S2\ v\ S1\ ali\ prehoda\ iz\ S3\ v\ S2.\\ &1-p-q\text{........}verjetnost,\ da\ smo\ v\ S2.\\ &1-q\text{.............}verjetnost,\ da\ smo\ v\ S3.\end{aligned} \tag{6.672}$$

a) Poiščite verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju na analitičen način, če je $p=0.05, q=0.08$.

b) Napišite program v Matlabu, ki bo s pomočjo uporabe Monte Carlo simulacije poiskal verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju.

Slika 6.84. prikazuje avtomat za ta primer.



Slika 6.84.: Avtomat za primer preprostega strežnega sistema s tremi stanji.

Prehodna matrika ima obliko:

$$P=\begin{bmatrix} 1-p & q & 0 \\ p & 1-p-q & q \\ 0 & p & 1-q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.95 & 0.08 & 0 \\ 0.05 & 0.87 & 0.08 \\ 0 & 0.05 & 0.92 \end{bmatrix} \tag{6.673}$$

a) Stacionarne verjetnosti izračunamo s pomočjo programa **stacionar.m**, pri čemer dobimo:

$$\begin{aligned} A&=\begin{bmatrix} (P-I) \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.95 & 0.08 & 0 \\ 0.05 & 0.87 & 0.08 \\ 0 & 0.05 & 0.92 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.05 & 0.08 & 0 \\ 0.05 & -0.13 & 0.08 \\ 0.4 & 0.05 & -0.08 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b&=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ P_\infty&=\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot b=\begin{bmatrix} 0.4961 \\ 0.3101 \\ 0.1938 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{1\infty} \\ P_{2\infty} \\ P_{3\infty} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.674}$$

b) Program v Matlabu **mc_queue.m**, ki bo s pomočjo uporabe Monte Carlo simulacije poiskal verjetnosti za zasedbo stanj v stacionarnem stanju, ima naslednjo obliko:

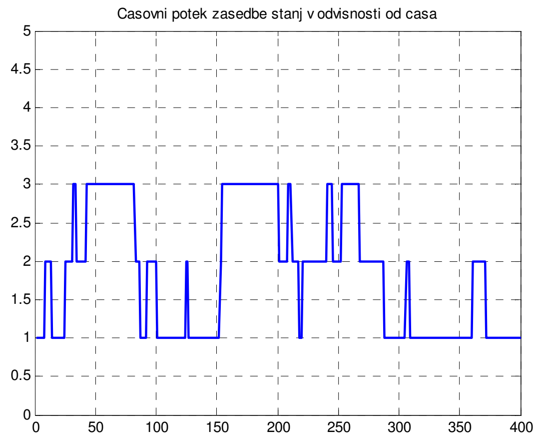
```
% program mc_queue.m
%
% program za monte carlo simulacijo preprostega strežnega sistema
% (primer 25)

clear
clc
close all

M = input('za koliko simulacij zelis casovni potek zasedbe stanj?')
if isempty(M)
  M = 400
end

stanje = 1;      % vedno start iz stanja 1
st_stanj =1;     % tu shranjujemo stanja

% Vnos verjetnosti in stevila simulacij:

p = input('p=')
if isempty(p)
  p = 0.05
end

q = input('q=')
if isempty(q)
  q = 0.08
end

N = input('stevilo simulacij:')
if isempty(N)
  N = 20000
end

% Gremo preko vseh simulacij delovanja streznega sistema:

for i = 1:N

   % za vsako simulacijo vzbudimo sistem:

   random_num = rand(1);

   if random_num < p
     % nova stranka pride v sistem (lahko caka, ali pa bo takoj na vrsti):
     if stanje<3 % omejimo navzgor
       stanje = stanje + 1;  % prehod iz 1 v 2 ali iz 2 v 3
     end
   end

   if random_num > 1-q
     % stranka zaključi strezbo in gre iz sistema:
     if stanje>1   % omejimo navzdol
       stanje = stanje - 1; % prehod iz 3 v 2 ali iz 2 v 1
     end
   end

   st_stanj = [st_stanj stanje];   % zapomnimo si stanje trenutne simulacije

end

% Tvorimo statistiko:

disp ('stevilo stanj 1:')
N1=length(find(st_stanj==1))

disp ('stevilo stanj 2:')
N2=length(find(st_stanj==2))

disp ('stevilo stanj 3:')
N3=length(find(st_stanj==3))
```

```
disp('Procentualni delez zasedbe stanja 1:')
N1/length(st_stanj)

disp('Procentualni delez zasedbe stanja 2:')
N2/length(st_stanj)

disp('Procentualni delez zasedbe stanja 3:')
N3/length(st_stanj)

% Casovni potek stanj v odvisnosti od casa:
figure
plot(st_stanj(1:M),'LineWidth',2)
d = axis;
axis([d(1) d(2) 0 5])
title('Casovni potek zasedbe stanj v odvisnosti od casa')
grid
```

Izpis komandnega okna je naslednji (za 20000 simulacij):

```
za koliko simulacij zelis casovni potek zasedbe stanj?

M =
    []

M =
  400

p =
    []
p =
   0.0500

q=
q =
    []

q =
   0.0800

stevilo simulacij:
N =
    []

N =
      20000

stevilo stanj 1:
N1 =
       9980

stevilo stanj 2:
N2 =
       6120

stevilo stanj 3:
N3 =
       3901

Procentualni delez zasedbe stanja 1:
ans =
   0.4990

Procentualni delez zasedbe stanja 2:
ans =
   0.3060

Procentualni delez zasedbe stanja 3:
ans =

   0.1950
```

Če dobljene rezultate za stacionarne verjetnosti primerjamo z rezultati, dobljenimi na analitičen način, opazimo dokaj dobro ujemanje rezultatov. Poglejmo si še, kako je strežni sistem dinamično prehajal med različnimi stanji ob napredovanju časa (simulacij), kar je razvidno iz slike 6.85 za prvih 400 simulacij.



Slika 6.85.: Dinamično prehajanje strežnega sistema med različnimi stanji (1, 2, 3) ob napredovanju časa (simulacij). Prvih 400 simulacij.

<u>Primer 26 (Primer računovodstva)</u>: Denimo imamo podjetje, ki obravnava odprt račun kot neplačan, če neplačnik zamuja s plačilom več kot 3 mesece. Glede na to lahko na začetku vsakega meseca razdeli odprte račune na naslednje kategorije:

Stanje 1 – Nov račun
Stanje 2 – Plačilo računa zamuja več kot en mesec
Stanje 3 – Plačilo računa zamuja več kot dva meseca
Stanje 4 – Plačilo računa zamuja več kot tri mesece
Stanje 5 – Račun je bil plačan
Stanje 6 – Račun je zavržen kot neizterljiv (6.675)

Kot se izkaže na osnovi statistične analize, ima prehodna matrika naslednjo obliko:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.676)$$

a) *Kakšna je verjetnost* $P(1 \to 5)$*, da bo nov račun prej ko slej izplačan?*

b) *Kakšna je verjetnost* $P(2 \to 6)$*, da bo račun, ki zamuja več kot en mesec, postopoma postal neizterljiv?*

c) *Če podjetje v povprečju proda blago v višini 100.000 EUR na mesec, koliko denarja na leto bo ostalo nepobranega?*

Izračunajmo najprej matriko Q. Pri tem vemo, da so stanja 1, 2, 3, in 4 minljiva, stanji 5 in 6 sta pa ponorni. Odtod sledi:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.677}$$

Nato poiščimo matriko N:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.12 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.678}$$

ter matriko R:

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{6.679}$$

Nazadnje poiščimo še matriko $R \cdot N$:

$$R \cdot N = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.12 & 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.964 & 0.94 & 0.88 & 0.7 \\ 0.036 & 0.06 & 0.12 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.680}$$

a) Verjetnost $P(1 \rightarrow 5)$, da bo nov račun prej ko slej izplačan, je 0.964.

b) Verjetnost $P(2 \rightarrow 6)$, da bo račun, ki zamuja več kot en mesec, postopoma postal neizterljiv, je 0.06.

c) Iz odgovora v točki a) lahko sklepamo, da bo le $1-0.964=0.036=3.6\%$ računov ostalo neizterljivih. Zato glede na to, da podjetje v povprečju proda blago v višini 100.000 EUR na mesec, bo ostala naslednja količina denarja na leto nepobranega:

$$vsota\ nepobranega\ denarja = 12\cdot 100000\cdot 0.036 = 43200\ Eur/leto \tag{6.681}$$

Izračune v tem primeru smo opravili z uporabo programa **markov7_qrn.m**, katerega struktura je naslednja:

```
% markov7_qrn.m
%
% splosen izracun numericnih matrik
%

clc
close all

ch=input('A si vnesel matriko P v workspace-u 1-DA,0-NE')
if ch == 0
   P=input('P=');
end

disp('prehodna matrika P je:')
P

disp('stevilo stanj je:')
s = size(P);
V = s(1)

M = input('število minljivih stanj')

disp('stev ponornih stanj je:')
Y=V-M

disp('matrike Q, N, R in RN  glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:M,1:M)
N = inv(eye(M) - Q)
R = P(M+1:V,1:M)
RN = R*N
```

<u>Primer 27 (Primer delnic na borzi)</u>: Denimo imamo opravka z naslednjim modelom delniškega trga. Na koncu vsakega dne je izmerjena cena določene delnice. Ugotovljeno je, da dvig vrednosti delnice naslednji dan zavisi od tega, če je vrednost narastla tudi prejšnji in predprejšnji dan. Konkretno je ugotovljeno naslednje:

1. *če je vrednost delnice naraščala zadnja dva dni, bo naslednji dan narastla z verjetnostjo 0.9.*
2. *če je vrednost delnice narastla prejšnji dan, ampak padla predprejšnji dan, bo naslednji dan narastla z verjetnostjo 0.6.*
3. *če je vrednost delnice padla prejšnji dan, ampak narastla predprejšnji dan, bo naslednji dan narastla z verjetnostjo 0.5.*
4. *če je vrednost delnice padla prejšnja dva dni, bo naslednji dan narastla z verjetnostjo 0.3.*

a) *Določite prehodno matriko,*
b) *Kakšna bo porazdelitev verjetnosti za zasedbo stanj čez tri dni, če je zadnja dva dni vrednost delnice padala.*

Najprej definirajmo stanja:

Stanje 1 - vrednost delnice naraste danes in včeraj,
Stanje 2 - vrednost delnice naraste danes in pade včeraj,
Stanje 3 - vrednost delnice pade danes in naraste včeraj,
Stanje 4 - vrednost delnice pade danes in včeraj. (6.682)

a) Začetni vektor verjetnosti in prehodna matrika sta:

$$P(x_0)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \qquad P=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}0.9&0.6&0&0\\0&0&0.5&0.3\\0.1&0.4&0&0\\0&0&0.5&0.7\end{bmatrix}\end{array} \tag{6.683}$$

b) Tvorimo izraz:

$$P(x_4)=P\cdot P\cdot P\cdot P\cdot P(x_0)=P^4\cdot P(x_0)=\begin{bmatrix}0.3834\\0.1719\\0.1116\\0.3331\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \tag{6.684}$$

Torej je največja verjetnost, to je 38.34%, da bomo čez tri dni v stanju 1 (vrednost delnice bo narastla danes in včeraj), če smo pred tremi dnevi bili v stanju 4 (vrednost delnice je padla danes in včeraj).

7 ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ STOHASTIČNIH PROCESOV IN MNOŽIČNE STREŽBE

V tem poglavju si bomo pogledali nekatere rešene naloge [5,11,12] iz različnih tipov stohastičnih procesov, kot npr. Poissonovih, rojstno smrtnih in podobnih procesov. Nato bo pa podanih tudi nekaj tipičnih nalog s področja množične strežbe.

7.1 Poissonovi procesi

<u>Primer 1:</u>

Povprečno število pozivov, ki pridejo v telefonsko centralo v eni uri, je 120. Predpostavimo, da tvorijo pozivi Poissonov proces.

a) Kakšna je verjetnost $\left(p_{\text{VEČ}} = p_{i>3}\right)$, da pridejo v centralo v 4 minutah več kot 3 pozivi?

b) Kakšen je standardni odmik od povprečnega števila pozivov v času 4 minut?

Rešitev za a):

Označimo najprej povprečno število pozivov:

$$E\left(N\underbrace{(t)}_{1\text{ ura}}\right) = 120 \quad \left(\text{v eni uri, torej povprečno 2 poziva na minuto}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad E\left(N\underbrace{(t)}_{1\text{ min}}\right) = 2 \tag{7.1}$$

Na osnovi izraza (4.88) lahko nato izračunamo parameter ρ:

$$E\left(N(t)\right) = \rho \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{E\left(N(t)\right)}{t}$$
$$\Rightarrow \qquad \rho = \frac{E\left(N\underbrace{(t)}_{1\text{ min}}\right)}{t} = \frac{2}{1\text{min}} = \frac{2}{\text{min}} \tag{7.2}$$

Gotovo lahko tvorimo naslednjo vsoto verjetnosti za število pozivov v centralo v 4 minutah oz. izraz za verjetnost $\left(p_{\text{VEČ}} = p_{i>3}\right)$ za več kot 3 pozive v tem času:

$$
\begin{aligned}
& p_0(4\min) + p_1(4\min) + \ldots + p_\infty(4\min) = 1 \\
& p_{\text{VEČ}} = p_4(4\min) + p_5(4\min) + \ldots + p_\infty(4\min) = \\
& = 1 - \left[p_0(4\min) + p_1(4\min) + p_2(4\min) + p_3(4\min)\right]
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Kot vemo, lahko verjetnost, da se do časa *t* zgodi *i* dogodkov, zapišemo v naslednji obliki (glej izraz (4.87)):

$$
p_i(t) = \frac{(\rho \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\rho \cdot t} \quad , \quad i = 0, 1, \ldots \tag{7.4}
$$

Torej lahko za verjetnosti, da se do časa 4 minute zgodi 0, 1, 2, ali 3 pozivi, zapišemo:

$$
\begin{aligned}
& p_0(4\min) = \frac{(\rho \cdot t)^0}{0!} \cdot e^{-\rho \cdot t} = e^{-2 \cdot 4} = 3.354 \cdot 10^{-4} \\
& p_1(4\min) = \frac{(\rho \cdot t)^1}{1!} \cdot e^{-\rho \cdot t} = \frac{\frac{2}{\min} \cdot 4\min}{1!} \cdot e^{-\frac{2}{\min} \cdot 4\min} = 8 \cdot e^{-8} = 2.683 \cdot 10^{-3} \\
& p_2(4\min) = \frac{(\rho \cdot t)^2}{2!} \cdot e^{-\rho \cdot t} = \frac{(2 \cdot 4)^2}{2!} \cdot e^{-2 \cdot 4} = 0.0107 \\
& p_3(4\min) = \frac{(\rho \cdot t)^3}{3!} \cdot e^{-\rho \cdot t} = \frac{(2 \cdot 4)^3}{3!} \cdot e^{-2 \cdot 4} = 0.0286
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Če izraze (7.5) upoštevamo v izrazu (7.3), dobimo:

$$
p_{\text{VEČ}} = 1 - \left(3.35 \cdot 10^{-4} + 2.683 \cdot 10^{-3} + 0.0107 + 0.0286\right) = 0.9535 \tag{7.6}
$$

Torej je verjetnost, da pridejo v centralo v 4 minutah več kot trije pozivi, enaka 95.35 %.

Rešitev za b):

Na osnovi izraza (4.88) lahko zapišemo tudi standardni odmik od povprečnega števila pozivov v času 4 minut:

$$
\begin{aligned}
&VAR\left(E\left(N\left(t\right)\right)\right)=\rho\cdot t\\
&VAR\left(E\left(N\left(4\right)\right)\right)=\rho\cdot 4\,\text{min}=\frac{2}{\text{min}}\cdot 4\,\text{min}=8\\
&STD\left(E\left(N\left(4\right)\right)\right)=\sqrt{VAR\left(E\left(N\left(4\right)\right)\right)}=\sqrt{8}\doteq 2.83
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Standardna deviacija od povprečnega števila pozivov v času 4 minut je torej 2.83 pozivov.

<u>*Primer 2:*</u>

Pri prevozu nekih izdelkov se v povprečju poškoduje 0.3 % izdelkov. Predpostavimo, da poškodbe tvorijo Poissonov proces. Koliko izdelkov moramo dodati pošiljki 1000 izdelkov, če želimo, da bo verjetnost dostave vsaj 1000 nepoškodovanih izdelkov več kot 0.95?

Podano imamo:

$$
\begin{aligned}
&n=1000\ \text{izdelkov}\\
&0.3\%\cdot n=0.3\cdot\frac{1}{100}\cdot 1000=3
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Torej velja, da se na 1000 izdelkov v povprečju trije pokvarijo. To lahko zapišemo na naslednji način:

$$E\left(n\right)_{1000\ izdelkov}=3 \tag{7.9}$$

Odtod lahko zapišemo tudi, koliko izdelkov se v povprečju pokvari na en izdelek:

$$E\left(n\right)_{1\ izdelek}=\frac{E\left(n\right)_{1000\ \text{izdelkov}}}{1000}=\frac{3}{1000}=0.003 \tag{7.10}$$

Torej se na en izdelek v povprečju pokvari 0.003 izdelka.

Iz izraza (4.88) vemo, da velja relacija: $E\left(N\left(t\right)\right)=\rho\cdot t$. Seveda tukaj ni neodvisna spremenljivka čas t, pač pa število izdelkov *n*. Tako lahko za en izdelek zapišemo naslednjo relacijo:

$$E\underbrace{\left(n\right)}_{\substack{\text{en}\\ \text{izdelek}}}=\rho\cdot\underbrace{\text{en izdelek}}_{n} \tag{7.11}$$

Torej lahko za parameter ρ zapišemo naslednji izraz:

$$\rho=\frac{E\left(n\right)_{\text{en izdelek}}}{\underbrace{\text{en izdelek}}_{n}}=\frac{0.003}{\text{en izdelek}} \tag{7.12}$$

V splošnem za odvisnost od časa velja naslednji izraz za verjetnosti, da se do časa t zgodi i dogodkov (glej izraz (4.87)):

$$p_i\left(t\right)=\frac{\left(\rho\cdot t\right)^i}{i!}\cdot e^{-\rho\cdot t}\quad,\qquad i=0,1,... \tag{7.13}$$

V tem primeru pa imamo opravka z odvisnostjo od števila poškodb izdelkov pri *n* izdelkih. Velja torej:

$$p_i\left(n\right)=\frac{\left(\rho\cdot n\right)^i}{i!}\cdot e^{-\rho\cdot n}\quad,\qquad i=0,1,... \tag{7.14}$$

Glede na izraz (7.14) je verjetnost, da ne pride do nobene poškodbe pri *n* izdelkih, naslednja:

$$p_0\left(n\right)=\frac{\left(\rho\cdot n\right)^0}{0!}\cdot e^{-\rho\cdot n} \tag{7.15}$$

Verjetnost, da pride do ene poškodbe pri *n* izdelkih, je naslednja:

$$p_1\left(n\right)=\frac{\left(\rho\cdot n\right)^1}{1!}\cdot e^{-\rho\cdot n} \tag{7.16}$$

Itn, lahko sklepamo naprej. Seveda je v našem primeru $n=1000$ izdelkov. Za verjetnost, da ne pride do nobene poškodbe pri 1000 izdelkih, potem dobimo:

$$p_0\left(1000\right)=e^{-\frac{0.003}{\text{izd}}\cdot 1000\text{ izd}}=e^{-3}=0.0497 \tag{7.17}$$

Za verjetnost, da pride do ene poškodbe pri 1000 izdelkih, dobimo naslednji izraz:

$$p_1(1000) = \frac{0.003 \cdot 1000}{1!} \cdot e^{-3} = 0.14936 \tag{7.18}$$

Za verjetnost, da pride do dveh poškodb pri 1000 izdelkih, dobimo naslednji izraz:

$$p_2(1000) = \frac{(0.003 \cdot 1000)^2}{2!} \cdot e^{-3} = \frac{9}{2} \cdot e^{-3} = 0.2240 \tag{7.19}$$

Za verjetnost, da pride do treh poškodb pri 1000 izdelkih, dobimo naslednji izraz:

$$p_3(1000) = \frac{(0.003 \cdot 1000)^3}{3!} \cdot e^{-3} = 0.2240 \tag{7.20}$$

Za verjetnost, da pride do štirih poškodb pri 1000 izdelkih, dobimo naslednji izraz:

$$p_4(1000) = \frac{(0.003 \cdot 1000)^4}{4!} \cdot e^{-3} = 0.1681 \tag{7.21}$$

Itn, lahko sklepamo naprej. Seveda za dotične verjetnosti velja tudi naslednji izraz:

$$\begin{aligned} &p_0(1000) + p_1(1000) + p_2(1000) + p_3(1000) + \\ &+ p_4(1000) + \ldots + p_m(1000) \geq 0.95 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Torej mora biti glede na tekst naloge verjetnost, da pride do *m* ali manj poškodb pri 1000 izdelkih, večja od 0.95. Potem je očitno, da moramo 1000 izdelkom dodati *m* izdelkov, da bo kljub najbolj neugodnemu scenariju, torej *m* poškodovanih, vseeno prišlo, z verjetnostjo vsaj 95 %, 1000 nepoškodovanih na cilj. V nadaljevanju moramo poiskati takšno število *m*, da bo izpolnjen kriterij (7.22). Najustrezneje je, če to storimo s poskušanjem.

Denimo vzamemo $m = 4$. Potem izraz (7.22) na osnovi izrazov (7.17) do (7.21) preide v obliko:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m} p_i(1000) = \sum_{i=0}^{4} p_i(1000) = \\ &= 0.0497 + 0.14936 + 0.224 + 0.224 + 0.1681 = 0.8150 < 0.95 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Očitno pogoj (7.22) še ni izpolnjen, torej moramo m večati toliko časa, dokler ne bo veljalo $\sum_{i=0}^{m} p_i(1000) \geq 0.95$. Zato v naslednjem koraku vzamemo $m = 5$. Seveda moramo izračunati še verjetnost, da pride do petih poškodb pri 1000 izdelkih:

$$\underbrace{p_5(1000)}_{\substack{\text{verjetnost, da} \\ \text{pride do 5 poškodb}}} = \frac{(0.003 \cdot 1000)^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0.1008 \tag{7.24}$$

Izraz (7.22) zdaj na osnovi izrazov (7.23) in (7.24) preide v obliko:

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(1000) = \sum_{i=0}^{5} p_i(1000) = \underbrace{0.8150}_{\sum_{i=0}^{4} p_i(1000)} + 0.1008 = 0.9158 \tag{7.25}$$

Ker je $0.9158 < 0.95$, pogoj še vedno ni izpolnjen. Zato v naslednjem koraku vzamemo $m = 6$. Seveda moramo izračunati še verjetnost, da pride do šestih poškodb pri 1000 izdelkih:

$$\underbrace{p_6(1000)}_{\substack{\text{verjetnost, da} \\ \text{pride do 6 poškodb}}} = \frac{(0.003 \cdot 1000)^6}{6!} \cdot e^{-3} = 0.0505 \tag{7.26}$$

Izraz (7.22) zdaj na osnovi izrazov (7.25) in (7.26) preide v obliko:

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(1000) = \sum_{i=0}^{6} p_i(1000) = \underbrace{0.9158}_{\sum_{i=0}^{5} p_i(1000)} + 0.0505 = 0.966 \tag{7.27}$$

Ker je $0.966 > 0.95$, je sedaj pogoj (7.22) izpolnjen. Torej moramo pošiljki 1000 izdelkov dodati vsaj 6 izdelkov, če želimo, da bo verjetnost, da jih bo prišlo vsaj 1000 nepoškodovanih na cilj, večja od 0.95.

7.2 Smrtni procesi

Primer 1:

Sistem je sestavljen iz 5 ekvivalentnih enot. Pogostost odpovedi posamezne enote je $4 \cdot 10^{-4}$ na uro. *Sistem zadovoljivo deluje, če delujejo vsaj 3 enote. Kakšna je verjetnost, da sistem zadovoljivo deluje 500 ur?*

Očitno gre za smrtni Poissonov proces, kjer enote predstavljajo osebke, njihove odpovedi pa »smrt osebka v populaciji«.

Zapišimo podatke:

$$n_0 = 5 \ \left(\text{začetna "populacija"}\right) \quad , \qquad t = 500\,\text{ur} \quad , \qquad \mu = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{\text{h}} \tag{7.28}$$

Izraz (4.145) lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$p_i\left(t\right) = \binom{n_0}{i} \cdot e^{-i \cdot \mu \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\mu \cdot t}\right)^{n_0 - i} \quad , \qquad i = n_0,\, n_0 - 1, \ldots, 0$$

$$p_i(500) = \binom{5}{i} \cdot e^{-i \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 500} \cdot \left(1 - e^{-4 \cdot 10^{-4} \cdot 500}\right)^{5-i} \quad , \qquad i = 5,\, 4,\, 3,\, 2,\, 1,\, 0 \tag{7.29}$$

$$p_i(500) = \binom{5}{i} \cdot e^{-i \cdot 0.2} \cdot \left(1 - e^{-0.2}\right)^{5-i} \quad , \qquad i = 5,\, 4,\, 3,\, 2,\, 1,\, 0$$

Glede na tekst naloge gotovo lahko zapišemo:

$$P\begin{pmatrix} \textit{sistem} \\ \text{zadovoljivo} \\ \text{deluje} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5\,\text{enot} \\ \text{deluje} \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 4\,\text{enote} \\ \text{delujejo} \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 3\,\text{enote} \\ \text{delujejo} \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

kar pomeni, da sistem zadovoljivo deluje, če delujejo vsaj 3 enote v 500 urah. Odtod na osnovi izraza (7.29) sledita naslednja izraza za verjetnosti, da deluje po 500 urah 5 enot oz. 4 enote:

$$P\begin{pmatrix}5\,\text{enot}\\ \text{deluje}\end{pmatrix}=p_5(500)=\binom{5}{5}\cdot e^{-0.2\cdot 5}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{5-5}=e^{-1}=0.3678$$

$$P\begin{pmatrix}4\,\text{enote}\\ \text{delujejo}\end{pmatrix}=p_4(500)=\binom{5}{4}\cdot e^{-0.2\cdot 4}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{5-4}=5\cdot e^{-0.8}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)=0.4072 \tag{7.31}$$

Izraz za verjetnost, da delujejo po 500 urah 3 enote, pa je:

$$P\begin{pmatrix}3\,\text{enote}\\ \text{delujejo}\end{pmatrix}=p_3(500)=\binom{5}{3}\cdot e^{-0.2\cdot 3}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{5-3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot e^{-0.6}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{2}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{-0.6}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{2}=10\cdot e^{-0.6}\cdot\left(1-e^{-0.2}\right)^{2}=0.1803 \tag{7.32}$$

Izraz (7.30) na osnovi izrazov (7.31) in (7.32) preide v obliko:

$$P\left(\text{sistem zadovoljivo deluje}\right)=0.3678+0.4072+0.1803=0.955 \tag{7.33}$$

Torej je verjetnost, da sistem zadovoljivo deluje v času 500 ur, enaka 95.5%.

7.3 Sistem *M/M/1* (osnovni model)

Primer 1:

Opravka imamo z nekim M/M/1 sistemom, osnovni model. Pogostost prihodov strank je 2 na minuto. Želimo, da bi bilo v povprečju v sistemu manj kot 5 strank vsaj 99% časa (torej da je verjetnost, da je v sistemu manj kot 5 strank v povprečju, večja kot 99%). Kolikšna mora biti intenzivnost strežbe, da bo zadovoljeno tem zahtevam?

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda=\frac{2}{\min} \tag{7.34}$$

Verjetnost, da je v sistemu manj kot 5 strank, zapišemo na naslednji način:

$$\underbrace{P\begin{pmatrix}\text{manj kot 5}\\ \text{strank v sistemu}\end{pmatrix}}_{P_{i<5}} = P(0 \text{ strank}) + P(1 \text{ stranka}) + P(2 \text{ stranki}) +$$

$$+P(3 \text{ stranke}) + P(4 \text{ stranke}) =$$

$$= p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + p_{3\infty} + p_{4\infty} = \tag{7.35}$$

$$= \sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} \geq 0.99$$

katera mora biti večja ali enaka 99%.

Gotovo velja tudi naslednji izraz:

$$\sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} + \sum_{i=5}^{\infty} p_{i\,\infty} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} = 1 - \sum_{i=5}^{\infty} p_{i\,\infty} \tag{7.36}$$

Odtod lahko na osnovi izraza (5.14) zapišemo:

$$\sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} = 1 - \sum_{i=5}^{\infty} \rho^{i} \cdot (1-\rho) = 1 - (1-\rho)\cdot \rho^{5} \cdot \sum_{i=5}^{\infty} \rho^{i-5} \tag{7.37}$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $m = i - 5$, dobimo:

$$\sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} = 1 - (1-\rho)\cdot \rho^{5} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \rho^{m}}_{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho^{5} \tag{7.38}$$

Pogoj (7.35) torej lahko zapišemo:

$$P_{i<5} = \sum_{i=0}^{4} p_{i\,\infty} = 1 - \rho^{5} \geq 0.99 \tag{7.39}$$

Odtod sledi:

$$\rho^{5} \leq 0.01 \quad , \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{5} \leq 0.01 \quad , \quad \left(\frac{2}{\mu}\right)^{5} \leq 0.01 \tag{7.40}$$

ter:

$$32 \le 0.01 \cdot \mu^5 \quad \Rightarrow \quad \mu^5 \ge 3200 \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{5.0237}{\min} \tag{7.41}$$

Torej mora biti intenzivnost strežbe večja ali enaka od 5.0237 stranke na minuto, če želimo doseči, da je verjetnost, da je v sistemu v povprečju manj kot 5 strank, večja od 99%.

Primer 2:

Čas strežbe v nekem servisu je porazdeljen eksponentno s povprečjem $E(W_S)$ =6 minut.

Prihodi strank tvorijo Poissonov proces s pogostostjo $\lambda = \frac{7}{\mathrm{h}}$.

a.) Ugotovi, če obstaja ravnovesna porazdelitev.

b.) Izračunaj verjetnost, da so v sistemu manj kot 3 stranke.

c.) Kakšna mora biti pogostost zaključkov strežbe, da verjetnost, da so ob prihodu nove stranke več kot 3 stranke v sistemu, ni večja od 0.16?

Rešitev za a):

Najprej na osnovi izraza (5.57) izračunajmo pogostost zaključkov strežbe μ:

$$E(W_S) = 6\min \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{6\min} = \frac{1}{6 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h}} = \frac{10}{\mathrm{h}} \tag{7.42}$$

Nato izračunajmo parameter za intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{7}{\mathrm{h}}}{\frac{10}{\mathrm{h}}} = 0.7 < 1 \tag{7.43}$$

Ker je parameter ρ manjši od 1, očitno ravnovesna porazdelitev obstaja.

Rešitev za b):

Gotovo lahko s pomočjo izraza (5.14) zapišemo naslednji izraz za verjetnost, da so v sistemu manj kot 3 stranke:

$$P(\text{manj kot 3 stranke}) = P(0\text{ strank}) + P(1\text{ stranka}) + P(2\text{ stranki}) =$$

$$= p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} =$$

$$= (1-\rho) + \rho\cdot(1-\rho) + \rho^2\cdot(1-\rho) = \tag{7.44}$$

$$= (1-\rho)\cdot\left(1+\rho+\rho^2\right) =$$

$$= (1-0.7)\cdot\left(1+0.7+0.7^2\right) = 0.657$$

Torej je verjetnost, da so v sistemu manj kot 3 stranke, enaka 65.7%.

Rešitev za c):

Glede na tekst naloge lahko formuliramo naslednjo neenakost:

$$P(\text{več kot 3 stranke v sistemu}) \le 0.16 \tag{7.45}$$

Gotovo lahko zapišemo tudi naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{P(\text{3 ali manj strank v sistemu})}_{P\,(i\le 3)} + \underbrace{P(\text{več kot 3 stranke v sistemu})}_{P\,(i>3)} = 1\\
&\underbrace{P(\text{več kot 3 stranke v sistemu})}_{P\,(i>3)} = 1 - \underbrace{P(\text{3 ali manj strank v sistemu})}_{P\,(i\le 3)}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Neenakost (7.45) torej lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$1 - P(i \le 3) \le 0.16 \tag{7.47}$$

Če izrazimo $P(i \le 3)$, dobimo s pomočjo izraza (5.14) naslednji izraz:

$$\begin{aligned} &P(i \le 3) = P(i=0) + P(i=1) + P(i=2) + P(i=3) = \\ &= p'_{0\infty} + p'_{1\infty} + p'_{2\infty} + p'_{3\infty} = \\ &= (1-\rho') + \rho' \cdot (1-\rho') + \rho'^2 \cdot (1-\rho') + \rho'^3 \cdot (1-\rho') = \\ &= (1-\rho')\left[1+\rho'+\rho'^2+\rho'^3\right] \end{aligned} \tag{7.48}$$

kjer je ρ' intenzivnost prometa, ki jo iščemo, da bo izpolnjen pogoj (7.47). Če vstavimo izraz (7.48) v izraz (7.47), dobimo:

$$\begin{aligned} &1 - \left\{(1-\rho') \cdot \left(1+\rho'+\rho'^2+\rho'^3\right)\right\} \le 0.16 \\ &1 - 0.16 \le (1-\rho') \cdot \left(1+\rho'+\rho'^2+\rho'^3\right) \\ &0.84 \le (1-\rho') \cdot \underbrace{\left(1+\rho'+\rho'^2+\rho'^3\right)}_{\frac{1-\rho'^4}{1-\rho'}} \\ &0.84 \le 1-\rho'^4 \\ &\rho'^4 \le 0.16 \\ &\rho' \le \sqrt[4]{0.16} = 0.6325 \end{aligned} \tag{7.49}$$

kjer smo upoštevali tudi zakonitost, definirano v izrazih (5.68) in (5.69).

Če nato intenzivnost prometa izrazimo s pogostostjo prihodov strank in pogostostjo zaključkov strežbe, dobimo:

$$\frac{\lambda}{\mu'} \le 0.6325 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{7}{\mathrm{h}}}{\mu'} \le 0.6325 \quad \Rightarrow \quad \mu' \ge \frac{\frac{7}{\mathrm{h}}}{0.6325} = \frac{11.067}{\mathrm{h}} \tag{7.50}$$

Pogostost zaključkov strežbe v danem servisu torej mora biti najmanj 11.067 strežb na uro, če želimo, da verjetnost, da so ob prihodu več kot 3 stranke v sistemu, ni večja od 0.16 oz 16%.

Primer 3:

Prihodi strank v telefonsko govorilnico tvorijo Poissonov proces s pogostostjo $\lambda = \frac{12}{\mathrm{h}}$. *Časi pogovorov so porazdeljeni eksponentno s povprečjem* $E(W_S)$ *= 2 min. Telekom namerava inštalirati še eno telefonsko govorilnico, če stranke čakajo v vrsti v povprečju več kot 3 minute. Za koliko se mora povečati pogostost prihodov strank, da bo inštalacija druge govorilnice upravičena?*

Najprej na osnovi izraza (5.57) izračunajmo pogostost zaključkov strežbe μ:

$$E(W_S) = 2\,\mathrm{min} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h}} = \frac{30}{\mathrm{h}} \tag{7.51}$$

Nato izračunajmo parameter za intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{12}{\mathrm{h}}}{\frac{30}{\mathrm{h}}} = 0.4 < 1 \tag{7.52}$$

Ker je parameter ρ manjši od 1, očitno ravnovesna porazdelitev obstaja. Ker namerava Telekom inštalirati še eno telefonsko govorilnico v primeru, če bi stranke čakale v vrsti v povprečju več kot 3 minute, lahko na osnovi izraza (5.56) zapišemo naslednji pogoj:

$$E(W_q) = \frac{\lambda'}{\mu \cdot (\mu - \lambda')} > 3\,\mathrm{min} = 3 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h} = \frac{1}{20}\mathrm{h} \tag{7.53}$$

kjer je λ' tista povečana pogostost prihodov strank, pri kateri bi bil ta pogoj izpolnjen. Slednjo torej lahko izračunamo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
&\lambda' > \mu \cdot (\mu - \lambda') \cdot \frac{1}{20}\mathrm{h} \quad && \Rightarrow \quad \lambda' > \left(\mu^2 - \mu \cdot \lambda'\right) \cdot \frac{1}{20}\mathrm{h} = \mu^2 \cdot \frac{1}{20}\mathrm{h} - \mu \cdot \lambda' \cdot \frac{1}{20}\mathrm{h} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \lambda' \cdot \left(1 + \frac{\mu}{20}\mathrm{h}\right) > \frac{\mu^2}{20}\mathrm{h} \quad && \Rightarrow \quad \lambda' \cdot \left(1 + \frac{\frac{30}{\mathrm{h}}}{20}\mathrm{h}\right) > \frac{\frac{30^2}{\mathrm{h}^2}}{20}\mathrm{h} \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \lambda'(2.5) > \frac{45}{\mathrm{h}} \quad && \Rightarrow \quad \lambda' > \frac{18}{\mathrm{h}}
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Torej se mora pogostost prihodov strank povečati za več kot 6, to je iz $\lambda = \frac{12}{\text{h}}$ na $\lambda' > \frac{18}{\text{h}}$, če želimo, da bo inštalacija druge telefonske govorilnice upravičena.

<u>*Primer 4:*</u>

Na cestninsko postajo z enim samim plačilnim mestom pride v povprečju 10 $\frac{\text{vozil}}{\text{min}}$*. Plačilni avtomat na postaji je sposoben obračunati cestnino v povprečju v 4 sekundah. Čas med prihodi in čas strežbe je eksponentno porazdeljen.*

- *Določi verjetnost, da na postaji ne bo nobenega vozila?*
- *Kolikšna je verjetnost, da bo na postaji dvoje vozil?*
- *Kolikšno je povprečno število vozil v vrsti?*
- *Za koliko se je zmanjšalo povprečno število vozil na postaji, če je prej (pred uvedbo avtomata) delavec na postaji oskrbel v povprečju* $\mu' = 12\ \frac{\text{vozil}}{\text{min}}$ *?*
- *Koliko časa v povprečju porabi vozilo na postaji?*
- *Oceni verjetnost, da bo na postaji več kot 5 vozil (ali 5 vozil)?*

Najprej zapišimo vse podatke:

$$\begin{gathered}\lambda = 10\ \frac{\text{vozil}}{\text{min}} \\ E(W_S) = 4 \text{ sekunde} = \frac{1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{4 \text{ sek}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{60} \text{ min}} = \frac{15}{\text{min}}\end{gathered} \tag{7.55}$$

Nato izračunajmo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{10}{\text{min}}}{\frac{15}{\text{min}}} = 0.\overline{66} = \frac{2}{3} \tag{7.56}$$

Verjetnost, da ne bo nobenega vozila na postaji, izračunamo s pomočjo izraza (5.10):

$$p_{0\infty} = (1-\rho) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} = 33\% \tag{7.57}$$

Verjetnost, da bosta na postaji točno 2 vozili, izračunamo s pomočjo izraza (5.14):

$$p_{2\infty} = \rho^2 \cdot (1-\rho) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \tag{7.58}$$

Povprečno število čakajočih vozil v vrsti izračunamo s pomočjo izraza (5.36):

$$E(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \tag{7.59}$$

Povprečno število vozil na postaji oz. v sistemu pri novem stanju, ko je bil uveden avtomat, izračunamo s pomočjo izraza (5.24):

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \tag{7.60}$$

Nato izračunajmo intenzivnost prometa ρ' za staro stanje, pred uvedbo avtomata. V ta namen tvorimo naslednji izraz:

$$\mu' = 12\frac{\text{vozil}}{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad \rho' = \frac{\lambda}{\mu'} = \frac{10\frac{\text{vozil}}{\text{min}}}{12\frac{\text{vozil}}{\text{min}}} = 0.8\overline{33} \tag{7.61}$$

Povprečno število vozil na postaji oz. v sistemu pri starem stanju, ko še ni bil uveden avtomat, zopet izračunamo s pomočjo izraza (5.24):

$$E(N)' = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{0.8\overline{33}}{1-0.8\overline{33}} = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{10}{12}} = \frac{10}{2} = 5 \tag{7.62}$$

Torej se je povprečno število vozil na postaji zmanjšalo za 3, to je iz $E(N)' = 5$ na $E(N) = 2$, ko smo namesto delavca uvedli avtomat na postaji.

Čas, ki ga v povprečju porabi vozilo na postaji, izračunamo s pomočjo izraza (5.54):

$$E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{(15-10)}{\text{min}}} = \frac{1}{5}\,\text{min} = 0.2\,\text{min} = 12\,\text{sek} \tag{7.63}$$

V povprečju torej vozilo porabi na postaji 12 sekund.

Ocenimo še verjetnost, da bo na postaji več ali enako 5 vozil. V ta namen gotovo lahko zapišemo izraz:

$$P(i \geq 5) = P(\text{več ali enako kot 5 vozil}) = 1 - P(\text{manj od 5 vozil}) = 1 - P(i < 5) \tag{7.64}$$

Odtod lahko na osnovi izraza (5.14) zapišemo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} &P(i \geq 5) = 1 - P(i < 5) = 1 - \{p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + p_{3\infty} + p_{4\infty}\} \\ &= 1 - \{(1-\rho) + \rho \cdot (1-\rho) + \rho^2 \cdot (1-\rho) + \rho^3 \cdot (1-\rho) + \rho^4 \cdot (1-\rho)\} = \\ &= 1 - (1-\rho) \cdot (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4) \end{aligned} \tag{7.65}$$

ki z upoštevanjem relacij v izrazih (5.68) in (5.69) preide v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} &P(i \geq 5) = 1 - P(i < 5) = 1 - (1-\rho) \cdot \frac{1-\rho^5}{1-\rho} = \rho^5 = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.1316 \end{aligned} \tag{7.66}$$

Torej je verjetnost 0.1316, da bo na postaji 5 ali več vozil.

<u>*Primer 5:*</u>

Imamo frizerski salon ob sobotah. Iz podatkov razberemo, da stranke prihajajo približno v skladu s Poissonovim procesom z intenzivnostjo prihodov 5 $\frac{\text{strank}}{\text{h}}$. *Prav tako se iz podatkov ugotovi, da so časi striženja strank porazdeljeni eksponentno s povprečnim časom 10 minut. Izračunajte naslednje:*

- Povprečno število strank v sistemu in v vrsti,

- Verjetnost, da je salon prazen in bo stranka takoj na vrsti,

- Salon ima le 4 stole v čakalnici. Kolikšna je verjetnost, da bo morala stranka, ko pride, stati pri čakanju, ker ne bo prostega stola?
- Izračunajte tudi povprečni čas bivanja stranke v sistemu in čakanja v vrsti,
- Izračunajte še verjetnost, da je čas bivanja stranke v sistemu daljši od 45 minut.

Zapišimo najprej podatke:

$$\begin{aligned} &\lambda = \frac{5}{\mathrm{h}} \\ &E(W_S) = 10\,\mathrm{min} = \frac{1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{10\,\mathrm{min}} = \frac{1}{10 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h}} = \frac{6}{\mathrm{h}} \end{aligned} \tag{7.67}$$

Nato izračunajmo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \tag{7.68}$$

Povprečno število strank v sistemu in v vrsti izračunamo na osnovi izrazov (5.24) oz. (5.36):

$$\begin{aligned} &L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5 \\ &L_q = E(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5^2}{6^2}}{\frac{1}{6}} = \frac{5^2}{6} = \frac{25}{6} \end{aligned} \tag{7.69}$$

Verjetnost, da je salon prazen in bo stranka takoj na vrsti, izračunamo na osnovi izraza (5.10):

$$p_{0\infty} = 1-\rho = 1-\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \tag{7.70}$$

Verjetnost, da bo morala stranka, ko pride, stati pri čakanju, ker ne bo prostega stola, izračunamo z naslednjim sklepanjem. Če so vsi 4 stoli zasedeni, pomeni, da vsaj že 4 stranke čakajo, medtem, ko je ena strižena. Torej je vsaj že 5 ljudi v sistemu. Odtod lahko na osnovi izraza (5.20) zapišemo naslednji izraz:

$$P(\text{ne bo stola pri čakanju}) = P(i \geq 5) = \rho^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4018 \tag{7.71}$$

Seveda bi lahko rezultat (7.71) izračunali tudi na drug način. S pomočjo izraza (5.14) bi tvorili naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
&P(i \geq 5) = 1 - P(i < 5) = 1 - \left(p_{0\infty} + p_{1\infty} + p_{2\infty} + p_{3\infty} + p_{4\infty}\right) = \\
&= 1 - \left\{(1-\rho) + \rho\cdot(1-\rho) + \rho^2\cdot(1-\rho) + \rho^3\cdot(1-\rho) + \rho^4\cdot(1-\rho)\right\} = \\
&= 1 - (1-\rho)\cdot\underbrace{\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4\right)}_{\frac{1-\rho^5}{1-\rho}} = 1 - \left(1-\rho^5\right) = \rho^5 = 0.4018
\end{aligned} \tag{7.72}$$

Izračunajmo še povprečni čas bivanja stranke v sistemu in čakanja v vrsti. V ta namen na osnovi izrazov (5.54) in (5.55) tvorimo naslednja izraza:

$$\begin{aligned}
&E(W) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\frac{6}{\mathrm{h}} - \frac{5}{\mathrm{h}}} = \frac{1}{1}\mathrm{h} = 1\mathrm{h} \\
&E(W_q) = \frac{\rho}{\mu\cdot(1-\rho)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{6}{\mathrm{h}}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{6\cdot\frac{1}{6}}\mathrm{h} = \frac{5}{6}\mathrm{h}
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Na koncu izračunajmo še verjetnost, da je čas bivanja stranke v sistemu daljši od 45 minut. V ta namen si pomagamo z izrazom (5.52) in dobimo:

$$P[W > t_0] = e^{-(\mu-\lambda)\cdot t_0} = e^{-\left(\frac{6}{\mathrm{h}}-\frac{5}{\mathrm{h}}\right)\cdot\frac{3}{4}\mathrm{h}} = 0.4723 \tag{7.74}$$

Torej je verjetnost, da bo morala stranka bivati v sistemu več kot 45 minut, enaka 47.23%.

Primer 6:

Predpostavimo, da v povprečju vsi vozniki tankajo bencin, ko so njihovi tanki pol polni (normalne razmere). V povprečju pride 7.5 strank na uro na eno črpalko. V povprečju traja 4 minute, da so avti postreženi. Predpostavimo tudi, da so vmesni časi med prihodi in časi strežbe eksponentno porazdeljeni. Poiščite $L = E(N)$ *in* $E(W)$. *Denimo, da iznenada pride do pomanjkanja nafte in se pojavi panika. Zato sedaj vozniki tankajo že pri* $\frac{3}{4}$ *polnega tanka. Ker vsak voznik tanka krajši čas kot prej, predpostavimo, da se povprečni strežni čas zmanjša na* $3\frac{1}{3}\,\text{min}$. *Kako to vpliva na veličini* $E(N)$ *in* $E(W)$ *?*

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{7.5}{\text{h}}$$
$$E(W_S) = 4\,\text{min} = \frac{1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{4\,\text{min}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{60}\,\text{h}} = \frac{15}{\text{h}} \tag{7.75}$$

Nato izračunajmo intenzivnost prometa v normalnih razmerah:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{7.5}{\text{h}}}{\frac{15}{\text{h}}} = \frac{1}{2} \tag{7.76}$$

Povprečno število strank v sistemu izračunamo na osnovi izraza (5.24):

$$L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\ \text{avto} \tag{7.77}$$

V povprečju imamo torej 1 avto v sistemu. Nato izračunajmo povprečen čas nahajanja avta v sistemu. V ta namen na osnovi izraza (5.54) tvorimo naslednji izraz:

$$E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{15}{\text{h}} - \frac{7.5}{\text{h}}} = 0.1\overline{33}\,\text{h} = 8\,\text{min} \tag{7.78}$$

Povprečen čas, ki ga avto preživi v sistemu, je torej enak 8 minut. Odtod lahko sklepamo, da je precej nemogoče, da bi se pojavile dolge vrste.

V primeru pomanjkanja nafte in morebitne panike se razmere seveda spremenijo. Tedaj lahko tvorimo naslednja izraza za pogostost prihodov strank oz. pogostost zaključkov strežbe:

$$\mu' = \frac{1}{E(W_S)'} = \frac{1}{3\frac{1}{3}\,\text{min}} = \frac{1}{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{60}\,\text{h}} = \frac{18}{\text{h}}$$
$$\lambda' = 2\cdot\lambda = 2\cdot\frac{7.5}{\text{h}} = \frac{15}{\text{h}} \tag{7.79}$$

Glede na to, da je prej vsak voznik v povprečju tankal pol tanka, sedaj pa le še četrt tanka, se očitno pogostost prihodov podvoji (vsak avto pride očitno dvakrat pogosteje na črpalko).

V spremenjenih razmerah je nova intenzivnost prometa enaka:

$$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \tag{7.80}$$

Povprečno število strank v sistemu izračunamo v spremenjenih razmerah ponovno na osnovi izraza (5.24):

$$L' = E(N)' = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 5\ \text{avtov} \tag{7.81}$$

Povprečen čas nahajanja posameznega avta v sistemu v spremenjenih razmerah pa tudi izračunamo na osnovi izraza (5.54). Tako lahko tvorimo naslednji izraz

$$E(W)' = \frac{1}{\mu'-\lambda'} = \frac{1}{\frac{18}{\text{h}}-\frac{15}{\text{h}}} = \frac{1}{3}\text{h} = 20\,\text{min} \tag{7.82}$$

Očitno je panika naredila svoje, saj se povprečno število strank v sistemu občutno poviša (iz enega na pet avtov), pa tudi povprečen čas posameznega avta, preživet v sistemu, se precej podaljša (iz 8 na 20 minut).

7.4 Sistem *M/M/1* (končno število strank)

<u>*Primer 1:*</u>

Neko prevozniško podjetje organizira mrežo servisnih delavnic za popravilo svojih kamionov. Kamioni prihajajo v delavnico v povprečju enkrat na 8 ur. Ena delavnica v povprečju popravi 10 kamionov v 8 urah. Zahtevamo, da naj bo verjetnost $P(1 \le i \le n) \le \frac{1}{2}$*, kar pomeni verjetnost, da jih je lahko od 1 do največ n v okvari. Prihodi kamionov tvorijo Poissonov proces, časi popravil pa so porazdeljeni eksponentno. Kolikšno je največje število kamionov n, ki jih lahko servisira posamezna delavnica, če se naenkrat lahko popravlja le en kamion?*

Najprej zapišimo podatke:

$$\begin{aligned} &\lambda = 3\,\frac{\text{kamioni}}{\text{dan}} = 0.125\frac{\text{kamiona}}{\text{h}} \\ &\mu = \frac{10}{8\,\text{h}} = 1.25\frac{\text{kamiona}}{\text{h}} \end{aligned} \tag{7.83}$$

Nato izračunajmo intenzivnost prometa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{0.125}{\text{h}}}{\frac{1.25}{\text{h}}} = 0.1 \tag{7.84}$$

Posamezna servisna delavnica lahko servisira največ n kamionov. Potem glede na tekst naloge gotovo lahko označimo:

$$\underbrace{P(1 \le i \le n)}_{\substack{\text{Verjetnost, da je od} \\ \text{eden do } n \\ \text{kamionov v okvari}}} = p_{1\infty} + \ldots + p_{n\infty} \le \frac{1}{2} \tag{7.85}$$

Seveda lahko zapišemo tudi naslednji izraz:

$$\underbrace{p_{0\infty}}_{\substack{\text{noben v} \\ \text{okvari}}} + \underbrace{P(1 \le i \le n)}_{\substack{\text{od eden do } n \\ \text{v okvari}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(1 \le i \le n) = 1 - p_{0\infty} \tag{7.86}$$

Če upoštevamo pogoj (7.85), z upoštevanjem izraza (5.119) dobimo:

$$1-p_{0\infty}\le\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad p_{0\infty}\ge\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{S}\ge\frac{1}{2},\quad\text{kjer je}$$
$$S=1+n\cdot\rho+(n-1)\cdot n\cdot\rho^2+\ldots+n!\cdot\rho^n \tag{7.87}$$

Poiskati moramo torej takšen *n*, da bo pogoj v izrazu (7.87) izpolnjen. Gotovo je najustreznejši način, da najbolj primeren *n* poiščemo s poskušanjem. Denimo najprej vzemimo $n=5$. Potem vsota *S* preide v naslednjo obliko:

$$S(5)=1+5\cdot0.1+4\cdot5\cdot0.1^2+3\cdot4\cdot5\cdot0.1^3+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot0.1^4+5!\cdot0.1^5=1.7732 \tag{7.88}$$

Če vstavimo izraz (7.88) v izraz (7.87), dobimo:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S(5)}=\frac{1}{1.7732}=0.564>\frac{1}{2} \tag{7.89}$$

Torej je pri $n=5$ naš pogoj izpolnjen. Mogoče pa lahko glede na postavljeni pogoj delavnica servisira tudi več kot 5, npr. 6 kamionov. Potem vsota *S* preide v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned}S(6)&=1+6\cdot0.1+5\cdot6\cdot0.1^2+4\cdot5\cdot6\cdot0.1^3+3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot0.1^4+\\&+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot0.1^5+6!\cdot0.1^6=2.06392\end{aligned} \tag{7.90}$$

Če vstavimo izraz (7.90) v izraz (7.87), dobimo:

$$p_{0\infty}=\frac{1}{S(6)}=\frac{1}{2.06392}=0.4845<\frac{1}{2} \tag{7.91}$$

Torej pri $n=6$ naš pogoj ni več izpolnjen. Odtod sledi, da je 5 največje število kamionov, ki jih lahko servisira posamezna delavnica, da bo verjetnost, da čaka največ 5 kamionov na popravilo, manjša ali enaka od $\frac{1}{2}$.

7.5 Sistem *M/M/r* (osnovni model)

<u>*Primer 1:*</u>

Prihodi strank v blagovnico tvorijo Poissonov proces s pogostostjo $\frac{40}{\mathrm{h}}$. *Časi strežbe so porazdeljeni eksponentno s povprečjem 5 min. Kolikšno mora biti minimalno število prodajalcev, če želimo zagotoviti, da verjetnost, da bo stranka takoj postrežena, ni manjša od 0.9?*

Najprej zapišimo podatke:

$$\begin{aligned} &\lambda = \frac{40}{\mathrm{h}} \\ &E(W_S) = 5\,\mathrm{min} \\ &\mu = \frac{1}{E(W_S)} = \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{60}\mathrm{h}} = \frac{12}{\mathrm{h}} \end{aligned} \tag{7.92}$$

Določimo minimalno število strežnih mest, da vrste ne bodo poljubno dolge. Glede na izraz (5.164) mora veljati naslednji pogoj:

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} < 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\frac{40}{\mathrm{h}}}{r \cdot \frac{12}{\mathrm{h}}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{\mathrm{h}} < r \cdot \frac{12}{\mathrm{h}} \quad \Rightarrow \\ &r > \frac{40}{12} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3.\overline{33} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = 4 \end{aligned} \tag{7.93}$$

Torej moramo imeti vsaj 4 strežna mesta, da se vrste ne bodo preveč kopičile.

Verjetnost, da bo stranka takoj postrežena (še ni vseh r strežnikov zasedenih), je enaka:

$$p_{\text{NČ}} = P(\text{ne čaka}) = p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r-1,\infty} \tag{7.94}$$

Ta verjetnost mora biti glede na tekst naloge večja ali enaka od 0.9:

$$p_{\text{NČ}} = P(\text{ne čaka}) = p_{0\infty} + p_{1\infty} + ... + p_{r-1,\infty} \geq 0.9 \tag{7.95}$$

Na osnovi izraza (5.158) lahko zapišemo:

$$p_{\text{NČ}} = p_{0\infty} + \underbrace{\rho \cdot r \cdot p_{0\infty}}_{p_{1\infty}} + \underbrace{\frac{(\rho \cdot r)^2}{2!} \cdot p_{0\infty}}_{p_{2\infty}} + \ldots + \underbrace{\frac{(\rho \cdot r)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot p_{0\infty}}_{p_{r-1,\infty}} \geq 0.9 \tag{7.96}$$

Če vstavimo izraz (7.96) v izraz (7.95), dobimo:

$$p_{\text{NČ}} = p_{0\infty} \cdot \left[1 + \rho \cdot r + \frac{(\rho \cdot r)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\rho \cdot r)^{r-1}}{(r-1)!}\right] \geq 0.9 \tag{7.97}$$

Če upoštevamo še izraz (5.162), nam izraz (7.97) preide v obliko:

$$p_{\text{NČ}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)}} \cdot \left[1 + \rho \cdot r + \frac{(\rho \cdot r)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\rho \cdot r)^{r-1}}{(r-1)!}\right] \geq 0.9 \tag{7.98}$$

Za intenzivnost prometa in produkt $\rho \cdot r$ lahko zapišemo:

$$\rho \cdot r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{12} = 3.\overline{33} \qquad \text{in} \qquad \rho = \frac{3.\overline{33}}{r} \tag{7.99}$$

Če to upoštevamo v izrazu (7.98), dobimo:

$$p_{\text{NČ}} = \frac{1 + 3.\overline{33} + \frac{(3.\overline{33})^2}{2!} + \ldots + \frac{(3.\overline{33})^{r-1}}{(r-1)!}}{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(3.\overline{33})^i}{i!} + \frac{(3.\overline{33})^r}{r! \cdot \left(1 - \frac{3.\overline{33}}{r}\right)}} \geq 0.9 \tag{7.100}$$

V nadaljevanju je potrebno poiskati takšno število strežnih mest *r*, da bo izpolnjen pogoj (7.100). Gotovo je najprimerneje, če poskušamo najustreznejši *r* izluščiti s poskušanjem. Denimo najprej vzamemo $r = 6$ in pogledamo, če je pogoj izpolnjen:

$$p_{\text{NČ}} = \frac{1 + 3.\overline{33} + \frac{3.\overline{33}^2}{2!} + \frac{3.\overline{33}^3}{3!} + \frac{3.\overline{33}^4}{4!} + \frac{3.\overline{33}^5}{5!}}{\sum_{i=0}^{6-1} \frac{3.\overline{33}^i}{i!} + \frac{3.\overline{33}^6}{6! \cdot \left(1 - \frac{3.\overline{33}}{6}\right)}} = \tag{7.101}$$

$$= \frac{24.5645}{24.5645 + 4.2555} = \frac{24.5645}{28.82} = 0.8523$$

Dobimo torej: $p_{\text{NČ}} = P(\text{ne čaka}) = 0.8523 < 0.9$. Odtod sledi, da pogoj (7.100) očitno ni izpolnjen. Verjetnost, da stranki ne bo potrebno čakati, je manjša od 90%. Zato sklepamo, da moramo povečati število strežnih mest, npr. iz 6 na 7, če želimo povečati tudi verjetnost $p_{\text{NČ}} = P(\text{ne čaka})$. Če *r* povečamo za 1 strežno mesto, torej vzamemo $r = 7$, pogoj (7.100) preide v obliko:

$$p_{\text{NČ}} = \frac{\overbrace{1 + 3.\overline{33} + \frac{3.\overline{33}^2}{2!} + \frac{3.\overline{33}^3}{3!} + \frac{3.\overline{33}^4}{4!} + \frac{3.\overline{33}^5}{5!} + \frac{3.\overline{33}^6}{6!}}^{\sum_{i=0}^{7-1} \frac{3.\overline{33}^i}{i!}}}{\sum_{i=0}^{7-1} \frac{3.\overline{33}^i}{i!} + \frac{3.\overline{33}^7}{7! \cdot \left(1 - \frac{3.\overline{33}}{7}\right)}} \tag{7.102}$$

V nadaljevanju želimo izračunati vsoto $\sum_{i=0}^{6} \frac{3.\overline{33}^i}{i!}$. V ta namen uporabimo rezultat iz izraza (7.101), kateremu prištejemo še en člen:

$$\sum_{i=0}^{6} \frac{3.\overline{33}^i}{i!} = \underbrace{1 + 3.\overline{33} + \frac{3.\overline{33}^2}{2!} + \frac{3.\overline{33}^3}{3!} + \frac{3.\overline{33}^4}{4!} + \frac{3.\overline{33}^5}{5!}}_{\substack{24.5645 \\ \downarrow \\ \text{SMO ŽE PREJ DOBILI}}} + \frac{3.\overline{33}^6}{6!} = \tag{7.103}$$

$$= 24.5645 + 1.8937 = 26.4582$$

Če vstavimo ta rezultat v izraz (7.102), dobimo:

$$p_{\text{NČ}} = \frac{26.4582}{26.4582 + \dfrac{3.\overline{33}^7}{7! \cdot \left(1 - \dfrac{3.\overline{33}}{7}\right)}} = \frac{26.4582}{26.4582 + 1.7183} = \frac{26.4582}{28.1765} = 0.939 \tag{7.104}$$

Dobimo torej: $p_{\text{NČ}} = P(\text{ne čaka}) = 0.939 > 0.9$. Očitno je tokrat pogoj (7.100) izpolnjen, če vzamemo število strežnih mest $r = 7$!

Seveda velja tudi, da bo verjetnost, da bo stranki potrebno čakati, enaka:

$$p_{\text{Č}} = P(\text{čaka}) = 1 - p_{\text{NČ}} = 1 - 0.939 = 0.0609 \tag{7.105}$$

Torej je potrebno imeti najmanj 7 prodajalcev oz. 7 strežnih mest, da bo verjetnost, da je stranka takoj postrežena, večja od 90 % (in sicer bo enaka 93.9 %).

<u>*Primer 2:*</u>

Denimo imamo banko, v kateri sta aktivni dve bančni okenci. Stranke, ki vstopajo v banko, tvorijo enojno čakalno vrsto in gredo k naslednjemu prostemu okencu, ko pridejo na začetek vrste. V povprečju pride 15 strank na uro v banko, čas strežbe posamezne stranke pa je v povprečju 3 minute. Prihodi strank v banko predstavljajo Poissonov proces, časi zaključkov strežbe pa so porazdeljeni po eksponentnem zakonu. Poiščite verjetnost, da bo morala stranka, ko pride v banko, čakati.

Najprej zapišimo podatke:

$$\lambda = \frac{15}{h} = \frac{15}{60\,\text{min}} = \frac{1}{4} / \min$$

$$\mu = \frac{1}{E(Ws)} = \frac{1}{3\,\text{min}} = \frac{1}{3} / \min \tag{7.106}$$

$$r = 2$$

Ker imamo opravka z dvemi strežnimi mesti, gre očitno za model osnovnega *M/M/2* sistema. V nadaljevanju izračunajmo intenzivnost prometa ρ ter produkt $\rho \cdot r$:

$$\begin{aligned}
&\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{8} \\
&\rho \cdot r = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{7.107}$$

Nato izračunajmo verjetnost, da mora stranka čakati na strežbo. To se seveda zgodi, ko ni nobeno strežno mesto prosto oz. so vsi strežniki zasedeni. Seveda imamo v tem primeru opravka s takoimenovano Erlangovo zakasnitvijo (formula C), ki smo jo spoznali v izrazu (5.167). Slednja v našem primeru preide v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned}
&p_{č} = P(\text{čaka}) = \frac{\frac{(\rho \cdot r)^r}{r!} \cdot \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)}} = \frac{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{8}}}{1 + \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2! \cdot \left(1-\frac{3}{8}\right)}} = \\
&= \frac{\frac{9}{32} \cdot \frac{1}{\frac{5}{8}}}{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32 \cdot \frac{5}{8}}} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{20}{20} + \frac{15}{20} + \frac{9}{20}} = \frac{9}{44} = 0.2045
\end{aligned} \tag{7.108}$$

Torej je 20.45% verjetnosti, da bo morala stranka čakati na postrežbo v banki.

7.6 Sistem *M/M/1* oz. *M/M/r* (osnovna modela)

Primer 1:

Računalniški center ima 2 računalnika enake kapacitete. Center ima opravka z dvemi tipi opravil, notranjimi in zunanjimi. Slednja imajo Poissonove čase prihodov z intenziteto 18 na uro za notranja opravila, ter 15 na uro za zunanja opravila. Servisni čas (strežbe) za posamezno opravilo je porazdeljen eksponentno s srednjo vrednostjo 3 minute.

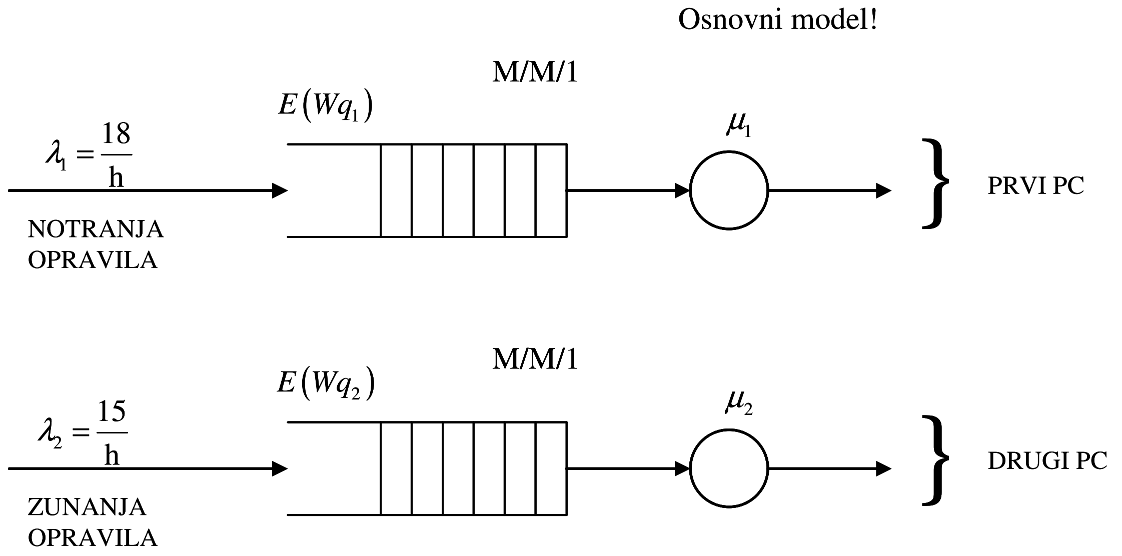
a.) Poiščite povprečen čas čakanja za začetek posameznega opravila, če je en računalnik uporabljen le za notranja opravila, drugi pa le za zunanja opravila.

b.) Kakšna pa je situacija, če si oba računalnika delita obe vrsti opravil?

Rešitev za a) – osnovni model za *M/M/1* sistem:

Sistem lahko za primer a), če je en računalnik uporabljen le za notranja opravila, drugi pa le za zunanja opravila, predstavimo na način, ilustriran na sliki 7.1.

a)



Slika 7.1: Sistem, če je en računalnik uporabljen le za notranja opravila, drugi pa le za zunanja opravila.

Za prvi sistem (le za notranja opravila) lahko na osnovi izrazov (5.5) in (5.55) tvorimo naslednje izraze:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{E(W_{s1})} = \frac{1}{3\,\mathrm{min}} \\ \lambda_1 &= \frac{18}{\mathrm{h}} = \frac{18}{60\,\mathrm{min}} = \frac{3}{10\,\mathrm{min}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{10}$$

$$E\left(W_{q1}\right) = \frac{\rho_1}{\mu_1 \cdot (1-\rho_1)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{9}{10}\right)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}} = 27\,\mathrm{min} \qquad (7.109)$$

Za drugi sistem (le za zunanja opravila) lahko na osnovi izrazov (5.5) in (5.55) tvorimo naslednje izraze:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{E(W_{s2})} = \frac{1}{3\,\text{min}} \\ \lambda_2 &= \frac{15}{\text{h}} = \frac{15}{60\,\text{min}} = \frac{1}{4\,\text{min}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

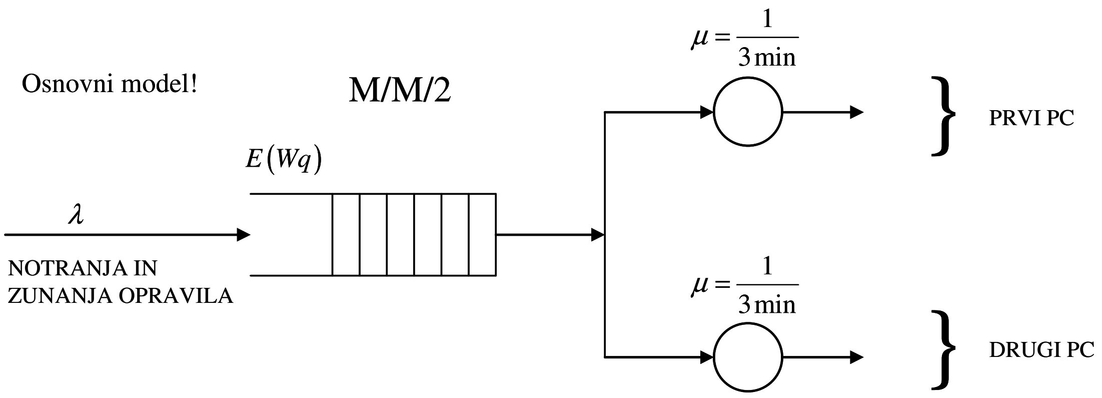
$$E\left(W_{q2}\right) = \frac{\rho_2}{\mu_2 \cdot (1-\rho_2)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = 9\,\text{min} \tag{7.110}$$

Torej je povprečen čas čakanja za začetek posameznega opravila, če je 1. računalnik uporabljen le za notranja opravila, enak 27 minut, pri drugem računalniku, ki je uporabljen le za zunanja opravila, pa je enak 9 minut.

Rešitev za b) – osnovni model za *M/M/r* sistem:

Sistem lahko za primer b), če si oba računalnika delita obe vrsti opravil, predstavimo na način, ilustriran na sliki 7.2.

b)



Slika 7.2.: Sistem, če si oba računalnika delita obe vrsti opravil

V tem primeru lahko tvorimo naslednje izraze:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{3}{10\,\text{min}} + \frac{1}{4\,\text{min}} = \frac{6}{20\,\text{min}} + \frac{5}{20\,\text{min}} = \frac{11}{20\,\text{min}} \\
&r = 2 \\
&\rho = \frac{\lambda}{r \cdot \mu} = \frac{\frac{11}{20\,\text{min}}}{2 \cdot \frac{1}{3\,\text{min}}} = \frac{11 \cdot 3}{40} = \frac{33}{40} \quad ; \quad \rho \cdot r = \frac{66}{40} = \frac{33}{20}
\end{aligned} \tag{7.111}$$

Na osnovi izrazov (5.162) in (5.182) lahko zapišemo tudi naslednja izraza:

$$\begin{aligned}
&E\left(W_q\right) = p_{0\infty} \cdot \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)^2 \cdot r \cdot \mu} \\
&p_{0\infty} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\rho \cdot r)^i}{i!} + \frac{(\rho \cdot r)^r}{r! \cdot (1-\rho)}}
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Tako dobimo za verjetnost za zasedbo 0.tega stanja v stacionarnih razmerah naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
p_{0\infty} &= \frac{1}{1 + \rho \cdot r + \frac{(\rho \cdot r)^2}{2! \cdot (1-\rho)}} = \frac{1}{1 + \frac{66}{40} + \frac{\left(\frac{66}{40}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{33}{40}\right)}} = \frac{1}{1 + \frac{33}{20} + \frac{\left(\frac{33}{20}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{7}{40}\right)}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{33}{20} + \frac{33^2 \cdot 40}{2 \cdot 20^2 \cdot 7}} = \frac{1}{1 + \frac{33}{20} + \frac{33^2 \cdot 20 \cdot 2}{2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 7}} = \frac{1}{1 + \frac{33}{20} + \frac{33^2}{140}} = 0.0958
\end{aligned} \tag{7.113}$$

Za povprečen čas čakanja posameznega opravila v vrsti pa velja:

$$\begin{aligned}
E\left(W_q\right) &= 0.0958 \cdot \frac{\left(\frac{33}{20}\right)^2}{2! \cdot \left(1 - \frac{33}{40}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}} = 0.0958 \cdot \frac{33^2 \cdot 3}{4 \cdot 20^2 \cdot \left(\frac{7}{40}\right)^2} = \\
&= 0.0958 \cdot \frac{33^2 \cdot 3 \cdot 40 \cdot 40}{4 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 49} = 0.0958 \cdot \frac{33^2 \cdot 3}{49} = 6.3873\,\text{min}
\end{aligned} \tag{7.114}$$

Iz obeh rešitev, to je za ločena *M/M/1* sistema, ali pa skupen *M/M/2* sistem, sklepamo, da je očitno krajši čas čakanja za začetek posameznega opravila, če si računalnika delita obe vrsti opravil, kot pa če bi delovala ločeno.

LITERATURA

[1] Benjamin J.R., Cornell, C.A.: *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill, 1970.

[2] Bertsekas D.P., Tsitsiklis, J.N.: *Introduction to Probability,* Athena Scientific, Belmont USA, 2002.

[3] Bhat N.: *An Introduction to Queueing Theory: Modeling and Analysis in Applications*, Birkhauser Boston, 2008.

[4] Bose S.K.: *An Introduction to Queueing Systems*, Springer, 2001.

[5] Bogataj M.: *Zastoji s čakajočimi vrstami in riziko odpovedi celic aktivnosti v logističnih verigah*, CERRISK FPP, RIUS Center, Portorož, 2000.

[6] Dragan D.: *Upravljanje logističnih sistemov*, Učbenik, Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru, 2009.

[7] Drnovšek R., Košir T., Kramar E., Lešnjak G.: *Zbirka rešenih nalog iz verjetnostnega računa,* DMFA Slovenije, 1998.

[8] Grinstead C.M., Snell J.L.: *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 2 Revised edition, 1997.

[9] Gross D.: *Fundamentals of Queueing Theory*, John Wiley&Sons, 2009.

[10] Hines W.W., Montgomery D.C.: *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, John Wiley&Sons, 1990.

[11] Hsu H.: *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*, McGraw-Hill, 1997.

[12] Hudoklin-Božič A.: *Stohastični procesi*, Založba Moderna organizacija, Kranj, 2003.

[13] Hudoklin-Božič A., Sabolek R., Brezavšček A.: *Stohastični procesi, Zbirka rešenih nalog*, Založba Moderna organizacija, Kranj, 2000.

[14] Jamnik R.: *Matematika*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana, 1985

[15] Jamnik, R.: *Uvod v matematično statistiko*, DMFA Slovenije, 1976.

[16] Jamnik R.: *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, 1971.

[17] Jamnik R.: *Verjetnostni račun in statistika*, DMFA Slovenije, 1986.

[18] Juričić Đ., Dragan D.: *Stohastični procesi v logistiki*, Prosojnice iz predavanj, Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru, 2007.

[19] Kinney J.J.: *Probability, An Introduction with Statistical Applications*, John Wiley&Sons, 1997.

[20] Kljajić M., Bernik I., Škraba A.: *Dogodkovna simulacija sistemov,* FOV, Univerza v Mariboru, 1999.

[21] Krishnan V.: *Probability and Random Processes,* John Wiley&Sons, 2006.

[22] Kottegoda N.T., Rosso R.: *Statistics, Probability and Reliability for Civil and Environmental Engineering*, McGraw-Hill, 1997.

[23] Lipschutz S., Lipson M.: *Probability*, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, 2000.

[24] Montgomery D.C., Runger G.C.: *Applied Statistics and Probability for Engineers*, John Wiley&Sons, 1994.

[25] Mosteller F.: *Fifty challenging problems in probability*, Dover Publications, 1965.

[26] Ross S.M.: *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1997.

[27] Ross S.M.: *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 1997.

[28] Rozanov Y.A.: *Probability Theory, A Concise Course*, Dover Publications, 1969.

[29] Spiegel M.R.: *Theory and Problems of Probability and Statistics*, McGraw-Hill, 1997.

[30] Soong T.T.: *Probability and Statistics for Engineers*, Wiley, 2004.

[31] Stewart W.J.: *Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation: The Mathematical Basis of Performance Modeling*, Princeton University Press, 2009.

[32] Takacz L.: *Stochastic processes, Problems and solutions*, Wiley, 1960.

[33] Usenik J.: *Matematične metode v prometu*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet, Portorož, 1998.

[34] Vadnal A.: *Elementarni uvod v verjetnostni račun*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1988.

[35] Virant J.: *Modeliranje in simuliranje računalniških sistemov*, Didakta, Radovljica, 1991.

[36] Yates R.D., Goodman D.: *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers,* John Wiley&Sons, 2004.

[37] Winston, W., L. : *Operations Research, Applications and Algorithms*, Duxbury press, International Thomson Publishing, 1994, ISBN 0-534-20971-8.

PRILOGE

Priloge (Matlab programi) so naslednje:

Priloga P1 – Program *kumulat_plot.m*

Priloga P2 – Program *mc_integ.m*

Priloga P3 – Program *Poisson.m*

Priloga P4 – Program *plot_exp.m*

Priloga P5 – Program *mc_integ_2D.m*

Priloga P6 – Program *markov1.m*

Priloga P7 – Program *markov2.m*

Priloga P8 – Program *markov3.m*

Priloga P9 – Program *markov4.m*

Priloga P10 – Program *markov5.m*

Priloga P11 – Program *markov6.m*

Priloga P12 – Program *markov7_qrn.m*

Priloga P13 – Program *primer22_6p.m*

Priloga P14 – Program *stacionar.m*

Priloga P15 – Program *mc_queue.m*

Priloga P1

```
% Izris funkcije f(x) v Matlabu (kumulat_plot.m):

clear;close all;clc;
a=-2
b=2
c=5
n1=20
n2=20
n3=20
x1=linspace(a,0,n1)
x2=linspace(0,b,n2)
x3=linspace(b,c,n3)
fx1=zeros(n1,1)
fx2=0.5*x2
fx3=zeros(n3,1)
x=[x1 x2 x3]
fx=[fx1' fx2 fx3']
plot(x,fx,'LineWidth',3)
grid
xlabel('x')
title('f(x)')
```

Priloga P2

```
% numericna integracija z monte carlo (mc_integ.m):

clear, clc
f = input('Vnesi funkcijo, npr. x/2','s');
a = input('Vnesi spodnjo mejo');
b = input('Vnesi zgornjo mejo');
N = input('Vnesi stevilo vzorcev');
sv=(b+a)/2;
stres = sv - a;
I = 0;
for i = 1:N
    x=random('Uniform',sv-stres,sv+stres,1,1); % x se lahko giblje le na defin. obmocju
    I = I + (b-a)*eval(f);
end
I=I/N
disp('Rezultat numericne integracije je:')
I
```

Priloga P3

```
% Poisson.m

clc
clear
close all

ch = input('Zelis pognati randraw.m (1-DA/0-NE)')
if ch == 1    % klic randraw.m za generacijo meritev
   lamb = input('Vnesi pravi parameter lamb')
   M = input('Vnesi st. meritev');
   x = randraw('po', [lamb], [1 M]) % vrne meritve
   N = M;
else          % ce bi meritve dobili od kje drugje
   x = input('Vnesi vektor meritev')
   lamb = input('pravi parameter lamb=')
   N = length(x);
end

% Ocena z likelihood:
lamb_oc = sum(x)/N

% Generacija porazdelitev:
for i=1:1:N
    Poc(i) = (lamb_oc^i)*exp(-lamb_oc)/factorial(i);  % ocenjena porazdelitev
    P(i) = (lamb^i)*exp(-lamb)/factorial(i);          % prava porazdelitev
end
P
Poc

plot(1:1:N,P,'ro','LineWidth',2)       % izris prave porazdelitve
hold on
plot(1:1:N,P,'r')
plot(1:1:N,Poc,'b+','LineWidth',2)     % izris ocenjene porazdelitve
plot(1:1:N,Poc,'b')
grid
title('Ocenjena (krizci) in prava (krogci) Poissonova porazdelitev')
xlabel('k')
ylabel('P(k), Poc(k)')

% Tvorjenje vsote I kvadratov absolutnih pogreškov ocene porazdelitve:
e=abs(P-Poc)
I = e*e'
```

Priloga P4

```
% plot_exp.m

clear
close all
clc

lamb=0.3165
x1=[-10:1:0];
x2=0:1:20;
for i=1:length(x2)
    f(i) = lamb*exp(-lamb*x2(i));
end
x = [x1 x2];
f=[zeros(11,1); f']'
plot(x,f,'LineWidth',3)
grid
```

Priloga P5

```
% numericna integracija z monte carlo (mc_integ_2D.m):
% deluje le, ce se funkcija da razcepit na x in y del.

clear, clc
f1 = input('Vnesi funkcijo, npr. x/2','s');    % vnesemo x del funkcije
f2 = input('Vnesi funkcijo, npr. y/2','s');    % vnesemo y del funkcije
a1 = input('Vnesi spodnjo mejo za x del');
b1 = input('Vnesi zgornjo mejo za x del');
a2 = input('Vnesi spodnjo mejo za y del');
b2 = input('Vnesi zgornjo mejo za y del');

ch = input('a imas opravka z eksponentno funkcijo x dela Da(1)/Ne(0)?');
if ch == 1
   k = input('Vnesi koeficient za x del');
   b1 = 10/k
end
ch = input('a imas opravka z eksponentno funkcijo y dela Da(1)/Ne(0)?');
if ch == 1
   k = input('Vnesi koeficient za y del');
   b2 = 10/k
end

N = input('Vnesi stevilo vzorcev');

sv1=(b1+a1)/2;
stres1 = sv1 - a1;
sv2=(b2+a2)/2;
stres2 = sv2 - a2;
I1 = 0;
I2 = 0;

for i = 1:N
    x=random('Uniform',sv1-stres1,sv1+stres1,1,1); % x se lahko giblje le na defin. obmocju
    I1 = I1 + (b1-a1)*eval(f1);
    y=random('Uniform',sv2-stres2,sv2+stres2,1,1); % y se lahko giblje le na defin. obmocju
    I2 = I2 + (b2-a2)*eval(f2);
end

I1=I1/N
I2=I2/N
I = I1*I2
disp('Rezultat numericne integracije je:')
I
```

Priloga P6

```
% markov1.m

clear
clc
close all

P = input('Vnesi prehodno matriko P')
tmax = input('Vnesi tmax');
p0 = input('Vnesi zacetni vektor p0')
st = input('Vnesi vektor stanj')    %zaloga vrednosti za stanja
p0_old = p0;
x = st;      % vektor stanj

pt = [];

% generacija casovnih vektorjev verjetnosti za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
    pt1 = P*p0;
    E(i) = x*pt1;      % pricakovana vrednost za case t = 1,2,...,tmax
    pt = [pt; i pt1'];
    p0 = pt1;
end

disp('Izpis vektorja verj. in E z decimalkami:')
pt
E

disp('Izpis vektorja verj. in E z ulomki:')
sym(pt,'r')
sym(E,'r')

% prikaz casovnih vektorjev verjetnosti za t=0,2,3,...,tmax:

figure
bar(x,p0_old,0.2)
str1 = ['P(x0)'];
title(str1)
str2 = ['x0 (t=0)'];
xlabel(str2)
grid
d=axis;
axis([d(1) d(2) d(3) 1])

for i = 1:tmax
    figure
    bar(x,pt(i,2:end),0.2)
    str1 = ['P(x' num2str(i) ')'];
    title(str1)
    str2 = ['x' num2str(i) ' (t=' num2str(i) ')'];
    xlabel(str2)
    grid
    d=axis;
    axis([d(1) d(2) d(3) 1])
end

% prikaz E(x,t) za t=1,2,3,...,tmax:
figure
plot([1:tmax],E,'LineWidth',2)
hold on
plot([1:tmax],E,'ro','LineWidth',2)
title('E(x,t)')
xlabel('t')
grid
d=axis;
axis([0 d(2)+1 d(3) d(4)])

% izracun stacionarnih verjetnosti:

[LAST_VEKT,LAST_VRED]=eig(P);
p1stac = 1/(1+ LAST_VEKT(2)/LAST_VEKT(1)+LAST_VEKT(3)/LAST_VEKT(1))
p2stac = LAST_VEKT(2)/LAST_VEKT(1) * p1stac
p3stac = LAST_VEKT(3)/LAST_VEKT(1) * p1stac
```

Priloga P7

```
% markov2.m
%
% primer postavitve (pijani mozak):
% primer postavitve za P:  inline('[1 q 0 0 0;0 1-p-q q 0 0;0 p 1-p-q q 0; 0 0 p 1-p-q 0; 0 0
0 p 1]','p','q')
% primer postavitve za p0: inline('[0; 0; 1; 0; 0;]')
% primer postavitve za st: inline('[-2; -1; 0; 1; 2;]')
%
% klice funkcijo inline2sym, dobljeno na file exchange

clear
clc
close all

syms p q

ch = input('Zelis tudi numericni izracun (primer pijanec) 1-DA,0-NE')
if ch == 1
   pn = input('pn=')
   qn=input('qn=')
end

% Setup prehodne matrike:
P = input('Vnesi prehodno matriko P na način: inline("[s 0;0 s]","s") enojni narek')
P = inline2sym(P)
if ch == 1
   Ps = subs(P,p,pn);
   Ps = subs(Ps,q,qn)
end


% Setup max. casa:
tmax = input('Vnesi tmax');

% Setup zacetnega vektorja:
p0 = input('Vnesi zacetni vektor na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek')
p0 = inline2sym(p0)

% Setup vektorja stanj:
st = input('Vnesi vektor stanj na način: inline("[s; 0]","s") enojni narek')    %zaloga
vrednosti za stanja
st = inline2sym(st)
x = st;      % vektor stanj

% generacija simbolicnih casovnih vektorjev verjetnosti in mat. upanja za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
    disp(['izpis za cas: ' num2str(i)])
    pt=P*p0
    E(i) = x'*pt;      % pricakovana vrednost za case t = 1,2,...,tmax
    if ch == 1
       pts = subs(pt,p,pn);
       pts = subs(pts,q,qn)
       Es = subs(E(i),p,pn);
       Es = subs(Es,q,qn)
    end
    p0 = pt;
end

disp('Izpis koncnega vektorja verj. in cas.sprem. E(t):')
pt
E=simplify(E)
```

Priloga P8

```
% markov3.m
%
% test za primer 13 poglavja 6.6 SPL
%

clear
clc
close all

syms p

% Setup prehodne matrike:
P =[1 1-p 0 0 0;0 0 1-p 0 0;0 p 0 1-p 0; 0 0 p 0 0; 0 0 0 p 1]

% Setup max. casa:
tmax = 4;

% Setup zacetnega vektorja:
p0 = [0; 0; 1; 0; 0;]

% Setup vektorja stanj:
st = [0 1 2 3 4]   %zaloga vrednosti za stanja
x = st;      % vektor stanj

% generacija simbolicnih casovnih vektorjev verjetnosti:

for i = 1:tmax
    disp(['izpis za cas: ' num2str(i)])
    pt=P*p0
    p0 = pt;
end

disp('Izpis koncnega vektorja verj.:')
pt
```

Priloga P9

```
% markov4.m
%
% primer za helikopter z 9 stanji
%


clear
clc
close all

P = [0.2 0.0 0.0  0.0 0.2 0.0  0.0  0.2 0.0;...
     0.4 0.0 0.0  0.0 0.4 0.0  0.0  0.4 0.0;...
     0.4 0.0 0.0  0.0 0.4 0.0  0.0  0.4 0.0;...
     0.0 0.4 0.0  0.4 0.0 0.0  0.0  0.0 0.4;...
     0.0 0.4 0.0  0.4 0.0 0.0  0.0  0.0 0.4;...
     0.0 0.2 0.0  0.2 0.0 0.0  0.0  0.0 0.2;...
     0.0 0.0 0.55 0.0 0.0 0.55 0.55 0.0 0.0;...
     0.0 0.0 0.30 0.0 0.0 0.30 0.30 0.0 0.0;...
     0.0 0.0 0.15 0.0 0.0 0.15 0.15 0.0 0.0]

tmax = input('Vnesi tmax');
p0 = input('Vnesi zacetni vektor p0')
st = input('Vnesi vektor stanj')    %zaloga vrednosti za stanja
p0_old = p0;
x = st;      % vektor stanj

pt = [];

% generacija casovnih vektorjev verjetnosti za t=1,2,3,...,tmax:

for i = 1:tmax
    pt1 = P*p0;
    pt = [pt; i pt1'];
    p0 = pt1;
end

disp('Izpis vektorja verj.z decimalkami:')
pt

% prikaz casovnih vektorjev verjetnosti za t=0,2,3,...,tmax:

figure
bar(x,p0_old,0.2)
str1 = ['P(x0)'];
title(str1)
str2 = ['x0 (t=0)'];
xlabel(str2)
grid
d=axis;
axis([d(1) d(2) d(3) 1])

for i = 1:tmax
    figure
    bar(x,pt(i,2:end),0.2)
    str1 = ['P(x' num2str(i) ')'];
    title(str1)
    str2 = ['x' num2str(i) ' (t=' num2str(i) ')'];
    xlabel(str2)
    grid
    d=axis;
    axis([d(1) d(2) d(3) 1])
end
```

Priloga P10

```
% markov5.m
%
% primer s proizvodnim procesom
%

clear
clc
close all

M = input('število minljivih stanj')

disp('Planirani kumulativni časi za izvedbo posametnih faz:')

Tk = [3 0.25 2.5 0.25 1.5 0.25]

disp('prehodna matrika:')

P = [0   0.05 0.0  0.0  0.0  0.0   0.0  0 ;...
     0.9 0    0.0  0.0  0.0  0.0   0.0  0 ;...
     0   0.9  0.0  0.04 0.0  0.0   0.0  0 ;...
     0   0    0.97 0.0  0.0  0.0   0.0  0 ;...
     0   0    0.0  0.92 0.0  0.03  0.0  0 ;...
     0   0    0.0  0.0  0.98 0.0   0.0  0 ;...
     0   0    0.0  0.0  0.0  0.94  1    0 ;...
     0.1 0.05 0.03 0.04 0.02 0.03  0    1 ]

disp('matrike glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:6,1:6)

N = inv(eye(6) - Q)

R = P(7:8,1:6)

NR = R*N

disp('delež izdelkov, ki pridejo na vhod procesa, odpremljen na izhodu procesa, je v povprečju
enak:')

DI = NR(1,1)

disp('povprečno število zasedb posameznih stanj:')

N(:,1)

disp('dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel na vhod:')

for i = 1:M
    Tk1(i) = N(i,1)*Tk(i);
    Tk2(i) = Tk1(i)/DI;
end

Tk1

disp('dejanski povprečni časi obravnave izdelka, ki je prišel do izhoda (odpreme):')

Tk2
```

Priloga P11

```
% markov6.m
%
% primer z zanesljivostjo naprave
%

clear
clc
close all

syms a1 a2 b1 b2

M = input('število minljivih stanj')

disp('ai sta parametra prve enote, bi pa parametra druge enote')
disp('')

disp('prehodna matrika:')

P = [1-a1-a2 0      0      0;...
     a1      1-b2   0      0;...
     a2      0      1-b1   0;...
     0       b2     b1     1];

pretty(P)

disp('matriki Q in N glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:M,1:M);
N = inv(eye(M) - Q);

pretty(Q)
pretty(N)

disp('povprečen čas do odpovedi naprave je enak:')

MTTF = sum(N(:,1));
pretty(MTTF)
```

Priloga P12

```
% markov7_qrn.m
%
% splosen izracun numericnih matrik
%

clc
close all

ch=input('A si vnesel matriko P v workspace-u 1-DA,0-NE')
if ch == 0
   P=input('P=');
end

disp('prehodna matrika P je:')
P

disp('stevilo stanj je:')
s = size(P);
V = s(1)

M = input('število minljivih stanj')

disp('stev ponornih stanj je:')
Y=V-M

disp('matrike Q, N, R in RN  glede na minljiva in ponorna stanja:')

Q = P(1:M,1:M)
N = inv(eye(M) - Q)
R = P(M+1:V,1:M)
RN = R*N
```

Priloga P13

```
%   primer22_6p.m
%
%   program za primer 22:
%

clear
close all
clc

disp('prehodna matrika P je:')

P=[0.75 0.33 0.1;0.1 0.55 0.02;0.15 0.12 0.88]

disp('Matrika A in vektor b za izracun stac. verjetnosti:')

A=[-0.25 0.33 0.1;0.1 -0.45 0.02;0.15 0.12 -0.12;1 1 1]
b = [0 0 0 1]'

disp('stacionarni vektor verjetnosti (1. nacin):')

Pnesk = inv(A'*A)*A'*b

ch = input('Zelis se izracun z mnogokratnim produktom matrike P? 1-DA, 0-NE')

if ch == 0
   return
end

while 1==1

      k = input('stevilo mnozenj je:')
      Pk = P^k
      Pnesk1 = Pk(:,1)

      ch = input('Zelis se ponoviti izracun 1-Da, 0-Ne');
      if ch == 0
         return
      end
end
```

Priloga P14

```
%   stacionar.m
%
%   program za izracun stacionarnih verjetnosti:
%

clc
close all

ch=input('A si vnesel matriko P v workspace-u 1-DA,0-NE')
if ch == 0
   P=input('P=');
end

disp('prehodna matrika P je:')
P

disp('stevilo stanj je:')
s = size(P);
N = s(1)

disp('matrika A in vektor b sta:')

c = ones(N,1)';

A = [ [P-eye(N)]; c]

b = [zeros(N,1);1]

disp('Vektor stacionarnih verjetnosti je:')

Pnesk = inv(A'*A)*A'*b
```

Priloga P15

```
%
% program mc_queue.m
%
% program za monte carlo simulacijo preprostega strežnega sistema
% (primer 25)

clear
clc
close all

M = input('za koliko simulacij zelis casovni potek zasedbe stanj?')
if isempty(M)
   M = 400
end

stanje = 1;       % vedno start iz stanja 1
st_stanj =1;      % tu shranjujemo stanja

% Vnos verjetnosti in stevila simulacij:

p = input('p=')
if isempty(p)
   p = 0.05
end

q = input('q=')
if isempty(q)
   q = 0.08
end

N = input('stevilo simulacij:')
if isempty(N)
   N = 20000
end

% Gremo preko vseh simulacij delovanja streznega sistema:

for i = 1:N

    % za vsako simulacijo vzbudimo sistem:

    random_num = rand(1);

    if random_num < p
       % nova stranka pride v sistem (lahko caka, ali pa bo takoj na vrsti):
       if stanje<3 % omejimo navzgor
          stanje = stanje + 1;  % prehod iz 1 v 2 ali iz 2 v 3
       end
    end

    if random_num > 1-q
       % stranka zaključi strezbo in gre iz sistema:
       if stanje>1   % omejimo navzdol
          stanje = stanje - 1; % prehod iz 3 v 2 ali iz 2 v 1
       end
    end

    st_stanj = [st_stanj stanje];   % zapomnimo si stanje trenutne simulacije

end

% Tvorimo statistiko:

disp ('stevilo stanj 1:')
N1=length(find(st_stanj==1))

disp ('stevilo stanj 2:')
N2=length(find(st_stanj==2))

disp ('stevilo stanj 3:')
N3=length(find(st_stanj==3))
```

```
disp('Procentualni delez zasedbe stanja 1:')
N1/length(st_stanj)

disp('Procentualni delez zasedbe stanja 2:')
N2/length(st_stanj)

disp('Procentualni delez zasedbe stanja 3:')
N3/length(st_stanj)

% Casovni potek stanj v odvisnosti od casa:
figure
plot(st_stanj(1:M),'LineWidth',2)
d = axis;
axis([d(1) d(2) 0 5])
title('Casovni potek zasedbe stanj v odvisnosti od casa')
grid
```